RESISTENCIA DE MATERIALES - SOLUCIONARIO
MARCO LLANOS R.

Diseño de portada: Giovanna Pérez
Composición de interiores: Melissa Chau
Responsable de edición: Yisela Rojas

Jr. Dávalos Lisson 135 - Lima
RUC 20260100808
Telefax: 331-1522
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Primera edición: 2008
Tiraje: 1000 ejemplares

ISBN 978-9972-38-465-3
Registro de Proyecto Editorial n.° 31501000700532
Hecho el depósito legal, según ley n.° 26905
Biblioteca Nacional del Perú
Reg. n.° 2008-04470

Impreso en Perú / Printed in Peru

Pedidos:
Av. Inca Garcilaso de la Vega 974, Lima. Telefax: 424-6563
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com

Composición, diagramación e impresión:
Aníbal Jesus Paredes Galván
Av. Las Lomas # 1600 - S.J.L.
RUC 10090984344

ÍNDICE

Luego: $\sigma_1 = \frac{AB}{A_{AB}} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{8164,966\ N}{400 \times 10^{-6} m^2}$

$\sigma_1 = 20,412\ MPa$

$\therefore\ \sigma_1 \leq \sigma_{AB} = 100\ MPa$ (cumple)

b) $\sigma_{AB} = 100\ MPa$

$A_{AB} = 400\ mm^2$ $\therefore$ $AB = 40\ 000\ N$

Reemplazando en (1): $AC = 48\ 989,795\ N$

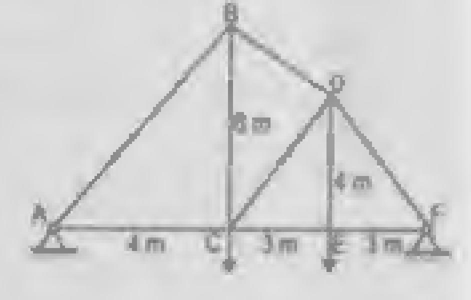
Luego: $\sigma_2 = \frac{AC}{A_{AC}} = 244,949\ MPa \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_{AC}$ (no cumple)

Entonces: $AC = 10\ kN$

$AB = 8,165\ kN$

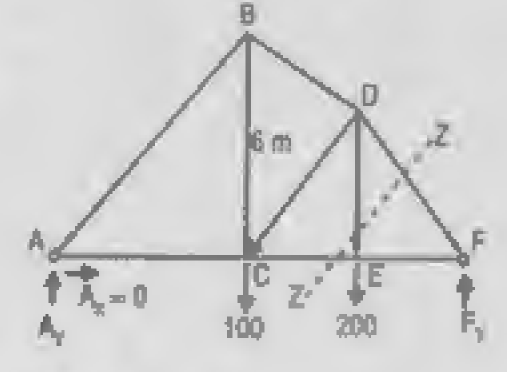
Reemplazando en (2): $\boxed{W = 11,154\ kN}$

104. Calcule, para la armadura de la figura, los esfuerzos producidos en los elementos DF, CE y BD. El área transversal de cada elemento es 1200 mm². Indique la tensión (T) o bien la compresión (C).



Resolución:

D.C.L.



En toda la estructura:

$\Sigma F_y = 0$

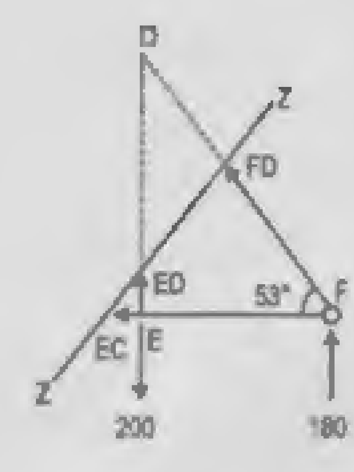
$A_y + F_y = 300\ kN$

$\Sigma M_A = 0$

$F_y(10) - 200(7) - 100(4) = 0$

$F_y = 180\ kN$

En el corte z - z :



$\Sigma M_E = 0$

$FD\left(\frac{4}{5}\right)(3) + 180(3) = 0 \Rightarrow FD = -225\ kN$ (C)

$\sigma_{FD} = \frac{225 \times 10^3\ N}{1200 \times 10^{-6}\ m^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{FD} = 187,5\ MPa}$ (C)

$\Sigma F_y = 0$

$FD\left(\frac{4}{5}\right) + ED + 180 - 200 = 0$

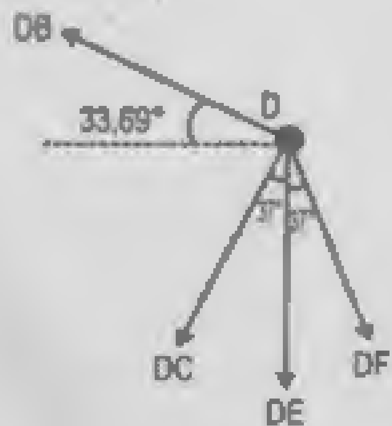
$ED = 20 + 225\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow ED = 200\ kN$ (T)

$\Sigma F_H = 0$

$EC = -FD\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow EC = 135\ kN$ (T)

$\sigma_{EC} = EC / 1200 \times 10^{-6}\ m^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_{EC} = 112,5\ MPa}$ (T)

D.C.L. (nudo "D")



$\Sigma F_H = 0$

$-DB\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - DC\left(\frac{3}{5}\right) = -DF\left(\frac{3}{5}\right)$

$-0,2DC - 0,277DB = 45$ (1)

$\Sigma F_V = 0$

$$DB\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = DE + DC\left(\frac{4}{5}\right) + DF\left(\frac{4}{5}\right)$$

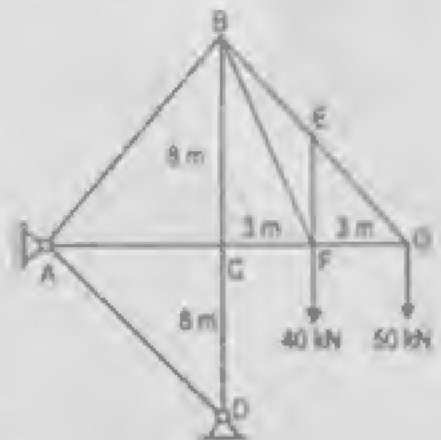
$0{,}554DB = 200 + 0{,}8DC - 180 \Rightarrow 0{,}554DB - 0{,}8\,DC = 20$ ... (2)

Operando:

(1) × 4 + (2): $1{,}662DB = -160$

$DB = -96{,}270$ (C) $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{DB} = 80{,}225 \text{ MPa}}$ (C)

105. Determine, para la armadura de la figura, las áreas transversales de las barras BE, BF y CF, de modo que los esfuerzos no excedan de 100 MN/m² en tensión ni de 80 MN/m² en compresión. Para evitar el peligro de un pandeo, es especifica una tensión reducida en la compresión.



Resolución:

En toda la estructura:

$\Sigma M_A = 0$

$D_y(6) - 40(9) - 50(12) = 0$

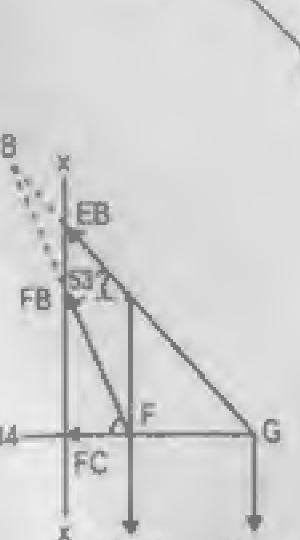
$D_y = 160$ kN

$\Sigma F_V = 0$

$A_y = 90 - 160$

$A_y = -70$ kN

En el corte x-x:



$\Sigma M_F = 0$

$EB\left(\frac{3}{5}\right)(4) = 50(3) \quad \Rightarrow \quad EB = 62{,}5$ kN (T)

$$A_{EB} = \frac{62{,}5\times10^3 \text{N}}{100\times10^6 \text{ N/m}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{EB} = 625 \text{ mm}^2}$$

$\Sigma F_V = 0$

$$EB\left(\frac{4}{5}\right) + FB\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right) = 90$$

$FB\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right) = 90 - 50 \quad \Rightarrow \quad FB = 42{,}72$ kN (T)

$$A_{FB} = \frac{42{,}72\times10^3 \text{ N}}{100\times10^6 \text{ N/m}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{FB} = 427{,}2 \text{ mm}^2}$$

$\Sigma F_H = 0$

$$-EB\left(\frac{3}{5}\right) - FB\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right) - FC = 0$$

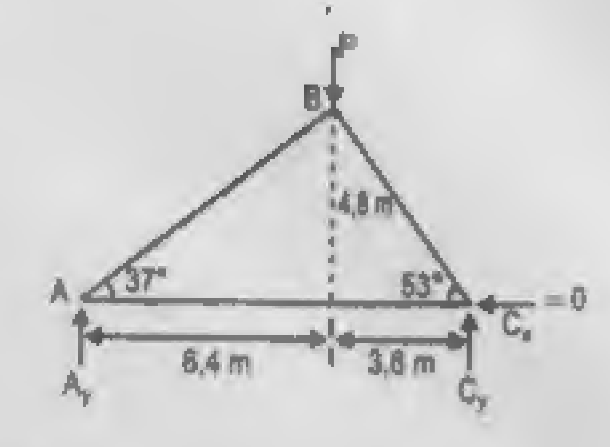
$-FC = 62{,}5\left(\frac{3}{5}\right) + 42{,}73\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right) \Rightarrow FC = -52{,}5$ kN (C)

$$A_{FC} = \frac{52{,}5\times10^3 \text{ N}}{80\times10^6 \text{ N/m}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{FC} = 656{,}25 \text{ mm}^2}$$

106. Todas las barras de la estructura articulada de la figura tienen una sección de 30 mm por 60 mm. Determine la máxima carga P que puede aplicarse sin que los esfuerzos excedan a los fijados en el prob. 105.

Resolución:

D.C.L.



En toda la estructura:

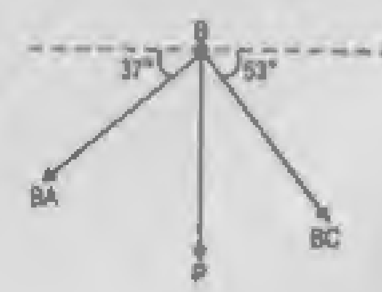
$\Sigma M_c = 0$ (+)

$$A_y(10) = P(3{,}6) \quad \Rightarrow \quad A_y = 0{,}36P$$

$\Sigma F_v = 0$

$$A_y + C_y = P \quad \Rightarrow \quad C_y = 0{,}64P$$

D.C.L. (nudo "B")



$\Sigma F_H = 0$

$$BA\left(\frac{4}{5}\right) = BC\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$4BA = 3BC \quad \Rightarrow \quad BA = \frac{3}{4}BC \quad \ldots \text{(I)}$$

$\Sigma F_v = 0$

$$-BA\left(\frac{3}{5}\right) - BC\left(\frac{4}{5}\right) = P \quad \Rightarrow \quad 3BA + 4BC = -5P$$

Reemplazando (I) en (II):

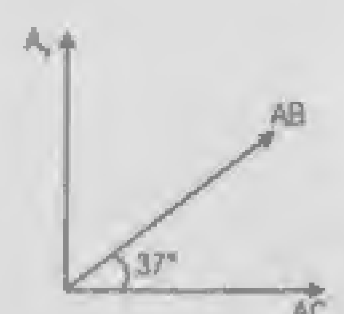
$$3\left(\frac{3}{4}BC\right) + 4BC = -5P$$

$$9BC + 16BC = -20P$$

$$25BC = -20P \quad \Rightarrow \quad BC = -\frac{4}{5}P \quad \text{(C)}$$

Luego: $\boxed{BA = -\frac{3}{5}P}$ (C)

D.C.L. (nudo "A")



$\Sigma F_H = 0$

$$AB\left(\frac{4}{5}\right) + AC = 0$$

$$AC = -\left(-\frac{3}{5}P\right)\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{12}{25}P \quad \text{(T)}$$

$$P = \sigma A$$

$$A = 18 \times 10^{-4}\ m^2$$

En BC: $-\frac{4}{5}P = 80 \times 18 \quad \Rightarrow \quad P = 180$ kN

En BA: $-\frac{3}{5}P = 80 \times 18 \quad \Rightarrow \quad P = 240$ kN

En AC: $\frac{12}{25}P = 100 \times 18 \quad \Rightarrow \quad P = 275$ kN

Escogemos el menor: $\boxed{P = 180 \text{ kN}}$

107. Una columna de hierro fundido (o fundición) soporta una carga axial de compresión de 250 kN. Determinar su diámetro interior si el exterior es de 200 mm y el máximo esfuerzo no debe exceder de 50 MPa.

Resolución:

$\sigma_{máx} = 50$ MPa

P = 250 kN

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{250 \times 10^3\ N}{50 \times 10^6\ N/m^2} \quad \Rightarrow \quad A = 5 \times 10^{-3}\ m^2 = 5000\ mm^2$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D_{ext}^2 - D_{int}^2) \quad \Rightarrow \quad 5000 = \frac{\pi}{4}(200^2 - D_{int}^2)$$

$$D_{int} = \boxed{183{,}395\ mm}$$

R = P

108. Calcule el diámetro exterior de un tirante tubular de acero que debe soportar una fuerza de tensión de 500 kN con un esfuerzo máximo de 140 MN/m². Suponga que el espesor de las paredes es una décima parte del diámetro exterior.

Resolución:

$$\sigma_{máx} = 140\ MN/m^2$$

$$e = (D_{ext} - D_{int})/2$$

$$0{,}1D_{ext} = (D_{ext} - D_{int})/2$$

$$D_{int} = 0{,}8\ D_{ext} \quad ...(I)$$

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{500\times10^3 N}{140\times10^6\ N/m^2}$$

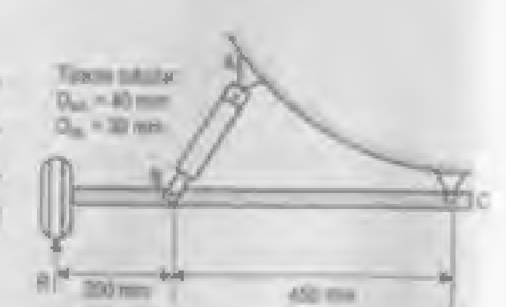
$$A = 3{,}571 \times 10^{-3}\ m^2 = 3571\ mm^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{4}(D_{ext}^2 - D_{int}^2) \quad ...(II)$$

I en II:

$$3571 = \frac{\pi}{4}[D_{ext}^2 - (0{,}8D_{ext})^2]$$

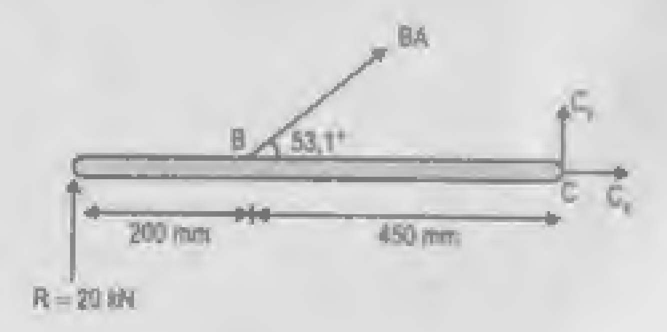
$$4546{,}738 = 0{,}36\ D_{ext}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{ext} = 112\ mm}$$

109. En la figura se muestra parte del tren de aterrizaje de una avioneta. Determine el esfuerzo de compresión en el tornapunta AB producido al aterrizar por una reacción del terreno R = 20 kN. $\overline{AB}$ forma un ángulo de 53,1° con $\overline{BC}$.



Resolución:

D.C.L.



$$\Sigma M_c = 0$$

$$R(650) + BA sen53{,}1°(450) = 0$$

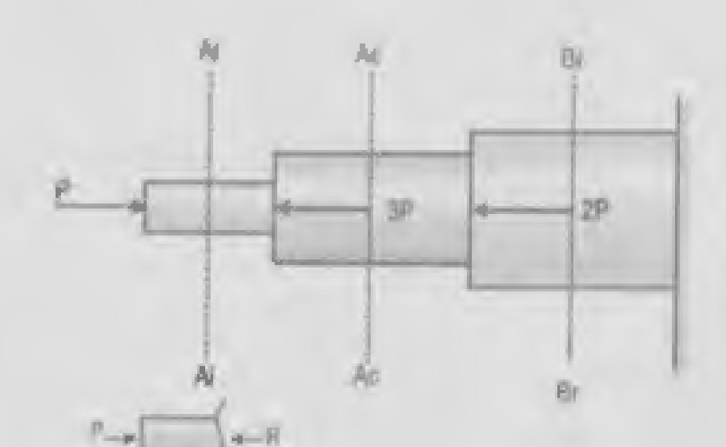
$$[illegible] = 36{,}125\ kN \quad (C)$$

$$A = \frac{\pi}{4}(40^2 - 30^2) = 549{,}779\ mm^2$$

$$\sigma = \frac{36{,}125\times10^3\ N}{549{,}779\times10^{-6} m^2} \Rightarrow \boxed{\sigma = 65{,}708\ MN/m^2}$$

110. Un tubo de acero se encuentra rígidamente sujeto por un perno de aluminio y por otro de bronce, tal como se muestra en la figura. Las cargas axiales se aplican en los puntos indicados. Calcule el máximo valor de P que no exceda un esfuerzo de 80 MPa en el aluminio, de 150 MPa en el acero o de 100 MPa en el bronce.

Resolución:



Corte Al

R = –P (C)

$$\sigma_{Al} = 80 \times 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{P_{Al}}{200\times10^{-6}\ m^2} \Rightarrow P_{Al} = 16\ kN$$

Corte Ac

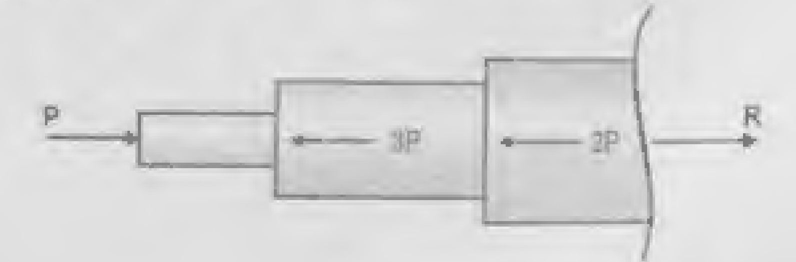
R = –P + 3P = 2P (T)

$$\sigma_{Ac} = 150 \times 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{2P_{Ac}}{400\times10^{-6} m^2} \Rightarrow P_{Ac} = 30\ kN$$

Corte Br

R = –P + 3P + 2P

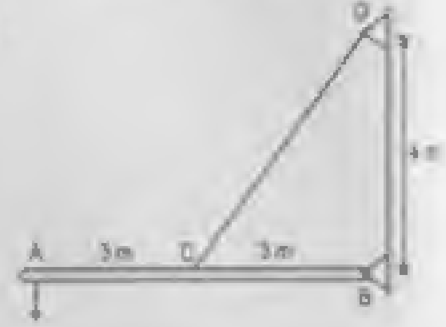
R = 4P (T)



$$\sigma_{Br} = 100\times10^{6}\ \frac{N}{m^2} = \frac{4P_{Br}}{500\times10^{-6}} \quad\Rightarrow\quad P_{Br} = 12{,}5\ kN$$

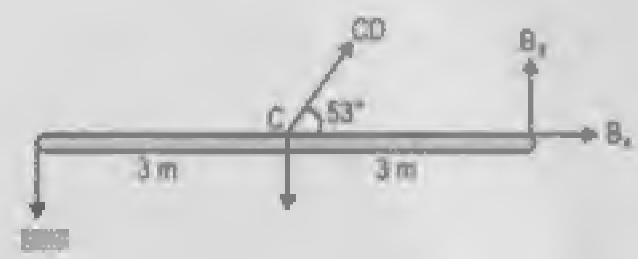
De los 3 valores obtenidos, escogemos el menor. ∴ $\boxed{P = 12{,}5\ kN}$

111. Una barra homogénea AB (de 150 kg) soporta una fuerza de 2 kN, como puede verse en la figura. La barra está sostenida por un perno (en B) y un cable (CD) de 10 mm de diámetro. Determine el esfuerzo ejercido en el cable.



Resolución:

D.C.L.



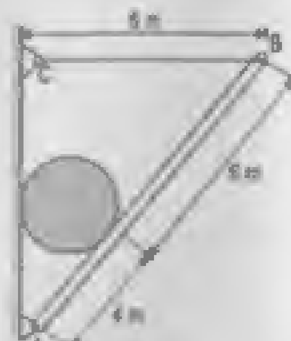
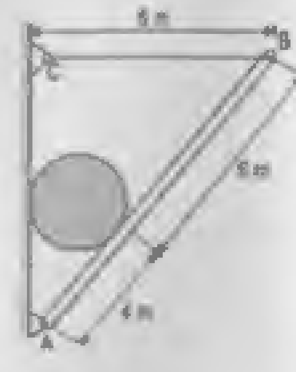
$\Sigma M_B = 0$

$$CD\left(\frac{4}{5}\right)(3) = 2000(6) + 1470(3)$$

$$CD = 6{,}838\ kN \qquad (T)$$

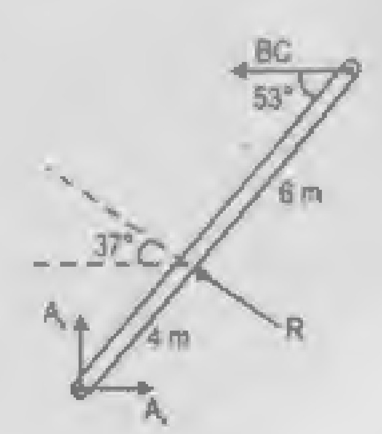
$$A = \frac{\pi}{4}(0{,}01\ m)^2 = 78{,}54\times10^{-6}\ m^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sigma = 87{,}064\ MPa}$$

112. Calcule el peso del cilindro más pesado que se puede colocar en la posición que se indica en la figura, sin rebasar un esfuerzo de 50 MN/m² en el cable BC. Desprecie el peso de la barra AB. El área transversal del cable BC es 100 mm².

Resolución:

D.C.L. (barra)

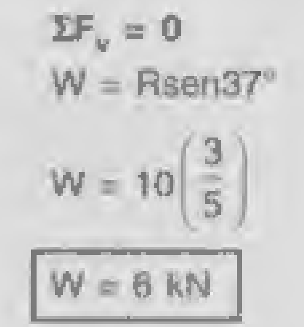


$\Sigma M_A = 0$

$$R(4) + BC\left(\frac{4}{5}\right)(10) = 0 \quad\Rightarrow\quad BC = -R/2 \qquad (C)$$

$$\sigma_{BC} = 50\times10^{6}\ \frac{N}{m^2} = \frac{0{,}5\ R}{100\times10^{-6}m^2} \quad\Rightarrow\quad R = 10\ kN$$

D.C.L. (cilindro)



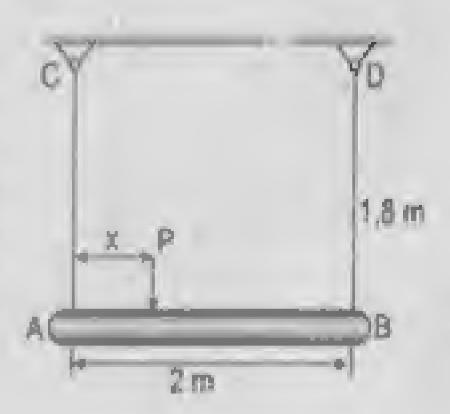
$\Sigma F_y = 0$

$W = R\,\text{sen}37°$

$$W = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

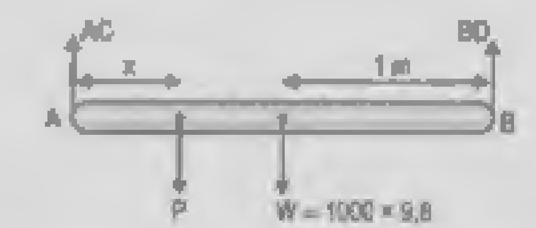
$\boxed{W = 6\ kN}$

113. Una barra homogénea AB(de 1000 kg de masa) pende de dos cables AC y BD, cada uno de los cuales tiene un área transversal de 400 mm², como se observa en la figura. Determine la magnitud P, así como la ubicación de la fuerza adicional máxima que se puede aplicar a la barra. Los esfuerzos en los cables AC y BD tienen un límite de 100 MPa y 50 MPa, respectivamente.



Resolución:

D.C.L.



$$\sigma_{AC} = 100\times10^{6}\ \frac{N}{m^2} = \frac{AC}{400\times10^{-6}m^2} \quad\Rightarrow\quad AC = 40\ kN$$

$\Sigma F_y = 0$

$$AC + BD = 9800 + P \quad\Rightarrow\quad BD = P - 30\,200 \qquad ...(1)$$

$$\sigma_{BD} = 50\times10^{6}\ \frac{N}{m^2} = \frac{BD}{A}$$

Reemplazando BD:

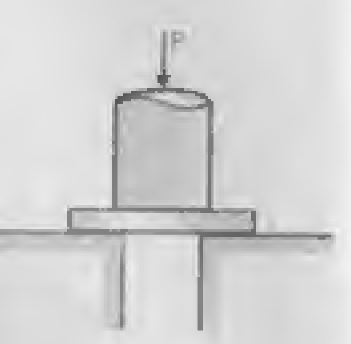
$$50\times10^{6}\ \frac{N}{m^2} = \frac{P - 30\,200}{400\times10^{-6}m^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{P = 50{,}200\ N = 50{,}2\ kN}$$

$\Sigma M_B = 0$

$AC(2) = 9800(1) + P(2 - x)$

$50\,200(2 - x) = 70\,200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0{,}602\ m}$

114. Se quiere punzar una placa, tal como se indica en la figura, que tiene un esfuerzo cortante último de 300 MPa. (a) Si el esfuerzo de compresión admisible en el punzón es 400 MPa, determine el máximo espesor de la placa para poder punzar un orificio de 100 mm de diámetro. (b) Si la placa tiene un espesor de 10 mm, calcule el máximo diámetro que puede punzarse.



Resolución:

τ = 300 MPa (placa)

a) σ_c = 400 MPa (punzón)

D = 100 mm

$$A = \frac{\pi(100)^2}{4} = 7853{,}982\ mm^2$$

$$\frac{P}{A} = \sigma_c$$

$$P = 7853{,}982 \times 10^{-6}\ m^2 \times 400 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \quad \Rightarrow \quad P = 3141{,}59\ kN$$

$$\tau = \frac{P}{\pi D.e}$$

$$300 \times 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{3141{,}59 \times 10^3\ N}{\pi \times 0{,}1\ m \times e} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 0{,}033\ m = 33\ mm}$$

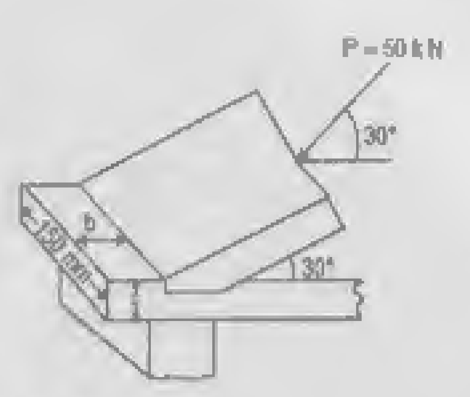
b) e = 10 mm = 0,01 m

$$\sigma_c = \frac{P}{\frac{D^2}{4}} \Rightarrow P = \frac{\pi D^2.\sigma_c}{4} \quad \Rightarrow \quad P = 314\,159{,}265 D^2\ kN$$

$$\tau = \frac{P}{\pi.D.e}$$

$$300 \times 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{314\,159{,}265 \times 10^3 D^2}{\pi.D \times 0{,}01} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 0{,}03\ m = 30\ mm}$$

115. La figura muestra la unión de un tirante y la base de una armadura de madera. Despreciando el rozamiento: (a) determine la dimensión b si el esfuerzo cortante admisible es de 900 kPa. (b) Calcule también la dimensión c si el esfuerzo de contacto no debe exceder de 7 MPa.



Resolución:

a) $\tau = 900 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$; $\quad \tau = \frac{P\cos\alpha}{b \times 0{,}15}$

$$900 \times 10^3 \frac{N}{m^2} = \frac{50\cos 30° \times 10^3\ N}{b \times 0{,}15\ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 0{,}321\ m = 321\ mm}$$

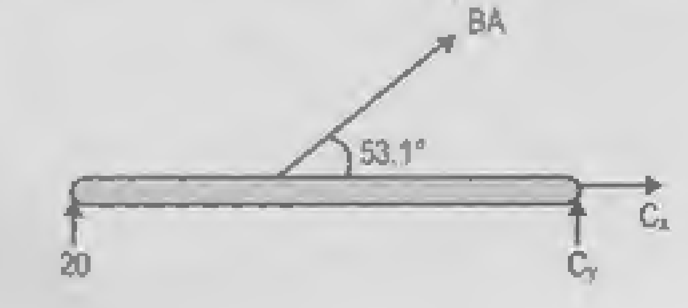
b) $\sigma_c = 7 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$

$$c = \frac{50\cos 30° \times 10^3\ N}{7 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \times 0{,}15\ m} = 0{,}0412\ m \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 41{,}2\ mm}$$

116. En el dispositivo del tren de aterrizaje descrito en el Prob. 09, los pernos en A y B trabajan a cortante simple y el perno en C a cortante doble. Determine los diámetros necesarios si el esfuerzo cortante admisible es de 50 MN/m².

Resolución:

D.C.L.



BA = 36,125 kN (C) $\tau = 50\times10^6 \dfrac{N}{m^2}$ $D=\sqrt{\dfrac{4P}{\pi\tau}}$

$D_{BA} = \sqrt{\dfrac{4\times36{,}125\times10^3\ N}{\pi\times50\times10^6\ N/m^2}} \Rightarrow \boxed{D_{BA} = 0{,}030\ m = 30\ mm}$

$\Sigma F_V = 0$

$C_y = 36{,}125 \times sen53{,}1° - 20 \Rightarrow C_y = 8{,}889\ kN$

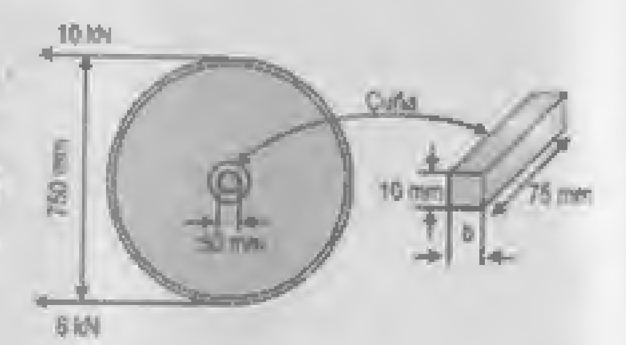
$\Sigma F_H = 0$

$C_x = BAcos53{,}1° \Rightarrow C_x = 21{,}69\ kN$

$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \Rightarrow C = 23{,}441\ kN$

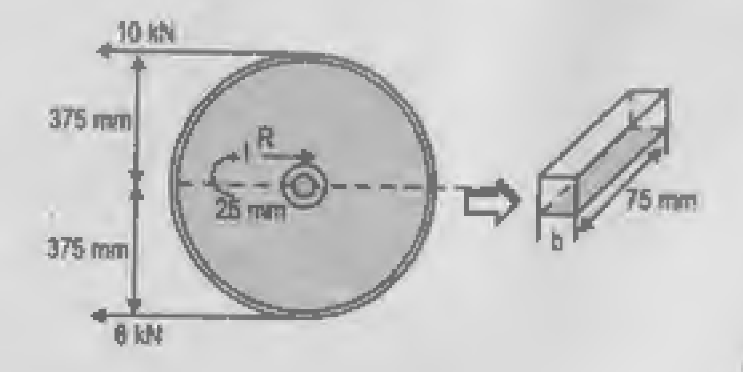
$D_C = \sqrt{\dfrac{2\times23{,}441\times10^3\ N}{\pi\times50\times10^6\ N/m^2}} \Rightarrow \boxed{D_C = 0{,}017\ m = 17\ mm}$

117. Una polea de 750 mm sometida a la acción de las fuerzas que indica la figura está montada mediante una cuña en un eje de 50 mm de diámetro. Calcule el ancho b de la cuña si tiene 75 mm de longitud y el esfuerzo cortante admisible es de 70 MPa.



Resolución:

D.C.L.



$\Sigma M_O = 0$

$R(25) = 10(375) - 6(375) \Rightarrow R = 60\ kN$

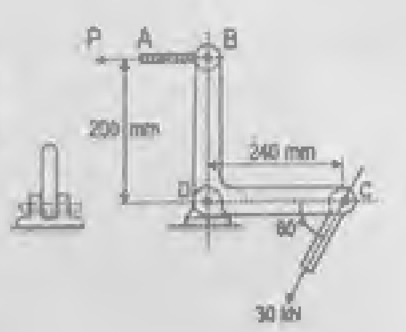
$\tau = 70 \times 10^6 \dfrac{N}{m^2} = \dfrac{60\times10^3 N}{A}$

$A = 857{,}14 \times 10^{-6}\ m^2$

$A = 0{,}075 \times b$

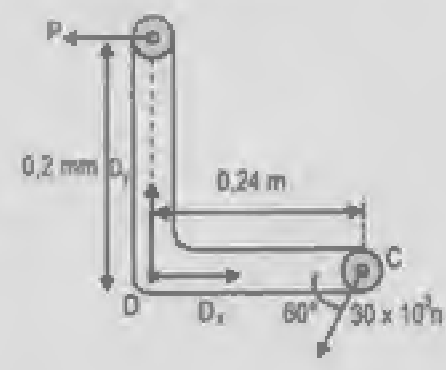
Igualando "A": $\boxed{b = 11{,}4\ mm}$

118. La palanca acodada que representa la figura está en equilibrio. (a) Determine el diámetro de la barra AB si el esfuerzo normal está limitado a 100 MN/m². (b) Determine el esfuerzo cortante en el pasador situado en D, de 20 mm de diámetro.



Resolución:

D.C.L.



$\Sigma M_D = 0$

$P \times 0{,}2 = 30 \times 10^3 \times sen60° \times 0{,}24 \Rightarrow P = 31\ 176{,}914\ N \Rightarrow \boxed{P = 31{,}177\ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$D_y = 30 \times 10^3\ sen60° \Rightarrow D_y = 25{,}981\ kN$

$\Sigma F_x = 0$

$D_x = 30 \times 10^3 + 31{,}177 \Rightarrow D_x = 61{,}177\ kN$

Entonces:

$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}\ \therefore \boxed{D = 66{,}465\ kN}$

a) $D_{AB} = \sqrt{\dfrac{4(AB)}{\pi.\sigma_{AB}}}$; $P = AB \Rightarrow D_{AB} = \sqrt{\dfrac{4\times31\ 176{,}914\ N}{\pi\times100\times10^6 \dfrac{N}{m^2}}}$

$\boxed{D_{AB} = 0{,}02m = 20\ mm}$

b) $\tau_D = \dfrac{D}{2\frac{\pi}{4}(d_D^2)}$; $d_D = 0{,}02\ m \Rightarrow \tau_D = \dfrac{66\,465{,}14\ N}{\frac{\pi}{2}(0{,}02)^2}$

$\boxed{\tau_D = 105{,}782\ MPa}$

119. La masa de la barra homogénea AB mostrada en la figura es 2000 kg. La barra está apoyada mediante un perno en B y mediante una superficie vertical lisa en A. Determine el diámetro del perno más pequeño que puede usarse en B si su esfuerzo cortante está limitado a 60 MPa. El detalle del apoyo en B es idéntico al apoyo D mostrado en la figura del problema 118.

Resolución:

D.C.L.

A
R_A
10 m
B_Y
P = 2000 × 9,8
B_X

$\Sigma M_B = 0$

$R_A(8) = 19{,}6(3) \Rightarrow R_A = 7{,}35\ \text{kN}$

$\Sigma F_V = 0$

$B_y = 19{,}6\ \text{kN}$

$\Sigma F_H = 0$

$B_x = R_A \Rightarrow B_x = 7{,}35\ \text{kN}$

$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \Rightarrow B = 20{,}933\ \text{kN}$

$$d_B = \sqrt{\frac{2P}{\pi.\sigma}}$$

$$d_B = \sqrt{\frac{2\times 20{,}933\times 10^3\ \text{N}}{\pi\times 100\times 10^6\ \text{N/m}^2}} \Rightarrow d_B = 0{,}0149\ \text{m} \Rightarrow \boxed{d_B = 14{,}9\ \text{mm}}$$

120. Dos piezas de madera, de 50 mm de ancho y 20 mm de espesor, están pegadas como indica la figura. (a) Aplicando las ideas que se expresan en la figura 1-4a, determine la fuerza cortante y el esfuerzo cortante en la unión si P= 6000 N. (b) Generalice el procedimiento para demostrar que el esfuerzo cortante en una sección inclinada un ángulo θ respecto a una sección transversal de área A, tiene un valor dado por τ = (P/2A)(sen2θ).

Resolución:

D.C.L.

VISTA LATERAL

VISTA FRONTAL

0.05m
Aθ
0.02m

a) $V = 6000\text{sen}30°$

$V = 3000\ \text{N}$

$A = A_\theta\cos\theta \Rightarrow A_\theta = \dfrac{A}{\cos\theta}$

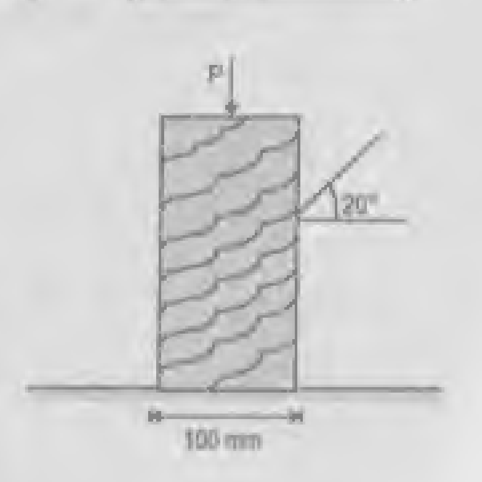
$A_\theta = \dfrac{0{,}05\times 0{,}02}{\cos 30°} = 1154{,}701\times 10^{-6}\ m^2$

$\tau_\theta = \dfrac{V}{A_\theta} = \dfrac{3\,000\text{N}}{1154{,}701\times 10^{-6}\text{m}^2} \Rightarrow \boxed{\tau_\theta = 2{,}60\ \text{MPa}}$

b) De la figura:

$\tau_\theta = \dfrac{P_\theta}{A_\theta} = \dfrac{P\text{sen}\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \tau_\theta = \dfrac{P}{A}\text{sen}\theta\cos\theta\times\left(\dfrac{2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tau_\theta = \dfrac{P}{2A}\text{sen}2\theta}$

121. Un cuerpo rectangular de madera, de sección transversal de 50 mm × 100 mm, se usa como elemento de compresión, según se muestra en la figura. Determine la fuerza axial máxima P que pueda aplicarse con confianza al cuerpo si el esfuerzo de compresión en la madera está limitado a 20 MN/m² y el esfuerzo cortante paralelo a las vetas lo está a 5 MN/m². Las vetas forman un ángulo de 20° con la horizontal, según se muestra. (*Indicación:* use los resultados del problema 120.)



Resolución:

$\sigma_C = 20\times 10^6\ \text{N/m}^2$

$P_C = \sigma_C\ .\ A$

$P_C = 20\times 10^6\ \text{N/m}^2\times(100)(50)\times 10^{-6}\ \text{m}^2 \quad\therefore\ P_C = 100\ \text{kN}$

$\tau_y = \dfrac{P_y}{2A}\text{sen}2\theta$

119. La masa de la barra homogénea AB mostrada en la figura es 2000 kg. La barra está apoyada mediante un perno en B y mediante una superficie vertical lisa en A. Determine el diámetro del perno más pequeño que puede usarse en B si su esfuerzo cortante está limitado a 60 MPa. El detalle del apoyo en B es idéntico al apoyo D mostrado en la figura del problema 118.

Resolución:

D.C.L.

$\Sigma M_B = 0$

$R_A(8) = 19{,}6(3) \Rightarrow R_A = 7{,}35$ kN

$\Sigma F_V = 0$

$B_y = 19{,}6$ kN

$\Sigma F_H = 0$

$B_x = R_A \Rightarrow B_x = 7{,}35$ kN

$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \Rightarrow B = 20{,}933$ kN

$d_B = \sqrt{\dfrac{2P}{\pi . \sigma}}$

$d_B = \sqrt{\dfrac{2 \times 20{,}933 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times 100 \times 10^6 \text{ N/m}^2}} \Rightarrow d_B = 0{,}0149$ m $\Rightarrow$ $\boxed{d_B = 14{,}9 \text{ mm}}$

120. Dos piezas de madera, de 50 mm de ancho y 20 mm de espesor, están pegadas como indica la figura. (a) Aplicando las ideas que se expresan en la figura 1-4a, determine la fuerza cortante y el esfuerzo cortante en la unión si P = 6000 N. (b) Generalice el procedimiento para demostrar que el esfuerzo cortante en una sección inclinada un ángulo θ respecto a una sección transversal de área A, tiene un valor dado por τ = (P/2A)(sen2θ).

Resolución:

D.C.L.

VISTA LATERAL

VISTA FRONTAL

a) $V = 6000\text{sen}30°$

$V = 3000$ N

$A = A_\theta \cos\theta \Rightarrow A_\theta = \dfrac{A}{\cos\theta}$

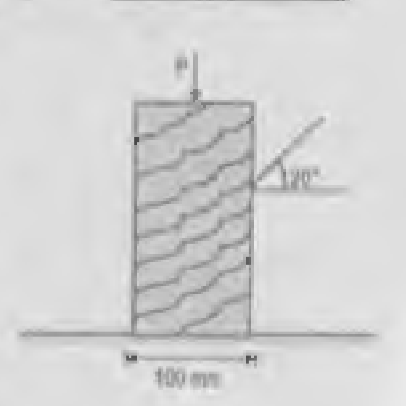
$A_\theta = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}02}{\cos 30°} = 1154{,}701 \times 10^{-6}$ m²

$\tau_\theta = \dfrac{V}{A_\theta} = \dfrac{3\,000\text{N}}{1154{,}701 \times 10^{-6}\text{m}^2} \Rightarrow$ $\boxed{\tau_\theta = 2{,}60 \text{ MPa}}$

b) De la figura:

$\tau_\theta = \dfrac{P_\theta}{A_\theta} = \dfrac{P\text{sen}\theta}{A/\cos\theta} \Rightarrow \tau_\theta = \dfrac{P}{A}\text{sen}\theta\cos\theta \times \left(\dfrac{2}{2}\right) \Rightarrow$ $\boxed{\tau_\theta = \dfrac{P}{2A}\text{sen}2\theta}$

121. Un cuerpo rectangular de madera, de sección transversal de 50 mm × 100 mm, se usa como elemento de compresión, según se muestra en la figura. Determine la fuerza axial máxima P que pueda aplicarse con confianza al cuerpo si el esfuerzo de compresión en la madera está limitado a 20 MN/m² y el esfuerzo cortante paralelo a las vetas lo está a 5 MN/m². Las vetas forman un ángulo de 20° con la horizontal, según se muestra. (*Indicación: use los resultados del problema 120.*)



Resolución:

$\sigma_C = 20 \times 10^6$ N/m²

$P_C = \sigma_C . A$

$P_C = 20 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \times (100)(50) \times 10^{-6} \text{ m}^2 \Rightarrow P_C = 100$ kN

$\tau_\theta = \dfrac{P_V}{2A}\text{sen}2\theta$

$P = 5 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \times 2 \times (100)(50) \times 10^{-6}\ m^2 / \text{sen}2(20°)$

$P_v = 77\,786\ kN$

$\sigma_N = \frac{P_N}{A}\cos^2\alpha \Rightarrow P_N = \sigma_N\ A/\cos^2\alpha \quad \therefore P_N = 113{,}247\ kN$

De los 3 valores escogemos el menor $\therefore$ $\boxed{P = 77{,}786\ kN}$

122 Problema ilustrativo

123 En la figura 1-11 se supone que el remache tiene 20 mm de diámetro y une placas de 100 mm de ancho. (a) Si los esfuerzos admisibles son de 140 MN/m² para el aplastamiento y 80 MN/m² para el esfuerzo cortante, determinar el mínimo espesor de cada placa. (b) Según las condiciones especificadas en la parte (a), ¿cuál será el máximo esfuerzo medio de tensión en las placas?

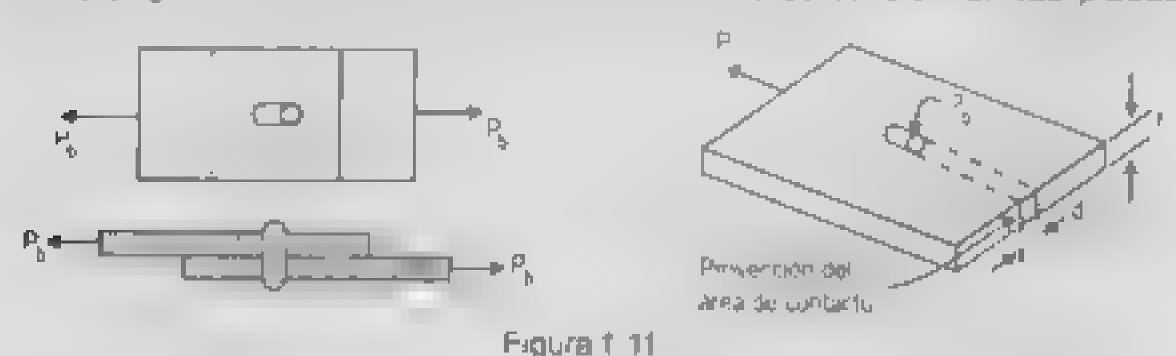


Figura 1-11

Resolución.

a) Del esfuerzo de corte

$P = A \times \tau \Rightarrow P = \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2 \times 80 \times 10^6 \qquad P = 25\,132\,741\ N$

Del esfuerzo de aplastamiento

$P_b = A_b\ \sigma_b \Rightarrow P = (0.02)(t) \times 140 \times 10^6 \qquad P = 2{,}8 \times 10^6 \times t\ N$

Igualando P

$t = 8{,}98 \times 10^{-3}\ m = 8{,}98\ mm \Rightarrow \boxed{t = 8{,}98\ mm}$

b) Del esfuerzo de tensión

$\sigma = \frac{P}{t(a-d)} \Rightarrow \sigma_N = \frac{25\,132{,}741\ N}{8{,}98 \times 10^{-3} m(0{,}1\ m - 0{,}02\ m)}$

$\boxed{\sigma = 34\,984\ MPa}$

124 La junta que se muestra en la figura está sujeta mediante tres remaches de 20 mm de diámetro. Suponiendo que P = 50 kN, determine (a) el esfuerzo cortante en cada remache, (b) el esfuerzo de contacto en cada placa, y (c) el máximo esfuerzo promedio en cada placa. Suponga que la carga aplicada P está distribuida igualmente entre los tres remaches.

Resolución:

a) $\tau = \frac{P}{[illegible]} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4} d^2} \Rightarrow \tau = \frac{50 \times 10^3}{3\left(\frac{\pi}{4}\right)(0{,}02)^2}$

$\boxed{\tau = 53.052\ MPa}$

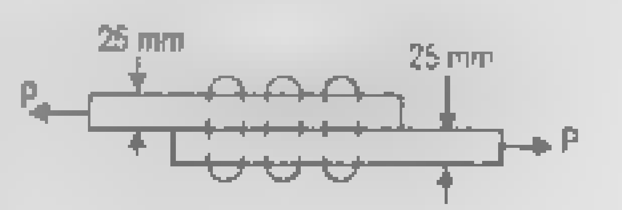
b) $\sigma = \frac{P}{[illegible]} \cdot \frac{1}{t\,d} \Rightarrow \sigma = \frac{50 \times 10}{3(0{,}02)(0{,}025)}$

$\boxed{\sigma_a = 33{,}333\ MPa}$

c) $\sigma = \frac{P}{n.° \text{ remaches}} \times \frac{1}{t(a-d)} \Rightarrow \sigma_N = \frac{50 \times 10^3}{3 \times 0{,}025 \times (0{,}13 - 0{,}02}$

$\boxed{\sigma = 6\,061\ MPa}$

125 Para la junta traslapada del problema 124 determine la máxima carga P que pueda aplicarse con confianza si el esfuerzo cortante en los remaches está limitado a 60 MPa, el esfuerzo de contacto en las placas, a 110 MPa y el esfuerzo de tensión medio en las placas, a 140 MPa.



Resolución

Del esfuerzo cortante

$P_\tau = n.° \text{ remaches} \times \frac{\pi}{4}(d)^2 \times \tau$

$P = 3 \times \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2 \times 60 \times 10^6 \Rightarrow P = 56\,549\ kN$

Del esfuerzo de aplastamiento

P n.° remaches × t d × σ_a

P × (0.025)(0.02) × 110 × 10^6 ⇒ P 165 kN

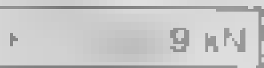
Del esfuerzo de tensión

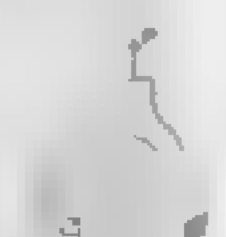
P_N = n°. remaches × t × (a − d) × σ_N

P 3 × 0.025 (0.13 − 0.02) × 140 × 10^6 ⇒ P 1155 kN

De los tres valores escogemos el menor 9 kN

126 En la articulación de la figura 1-10b determine el diámetro mínimo del perno y el mínimo espesor de cada rama de la horquilla si debe soportar una carga P = 55 kN sin sobrepasar un esfuerzo cortante de 80 MPa ni uno de 140 MPa a compresión





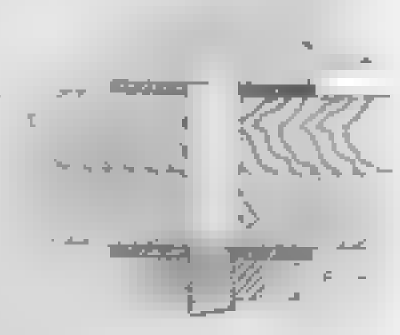
Resolución.

$\frac{\pi}{4}(d^2)$

2 × 0.022 × 140

= 8.928 × 10^{-3} m

127 Un tornillo de 22.2 mm de diámetro exterior y 18.6 mm en el fondo de la rosca, sujeta dos piezas de madera como se indica en la figura. Se aprieta la tuerca hasta tener un esfuerzo de 34 kN en el tornillo. (a) Calcular el esfuerzo cortante en la cabeza del mismo y en la rosca. (b) Determinar también el diámetro exterior de las arandelas si el interior es de 28 mm y el esfuerzo de aplastamiento admisible en la madera es de 6 MPa.



Resolución

P = 34 kN

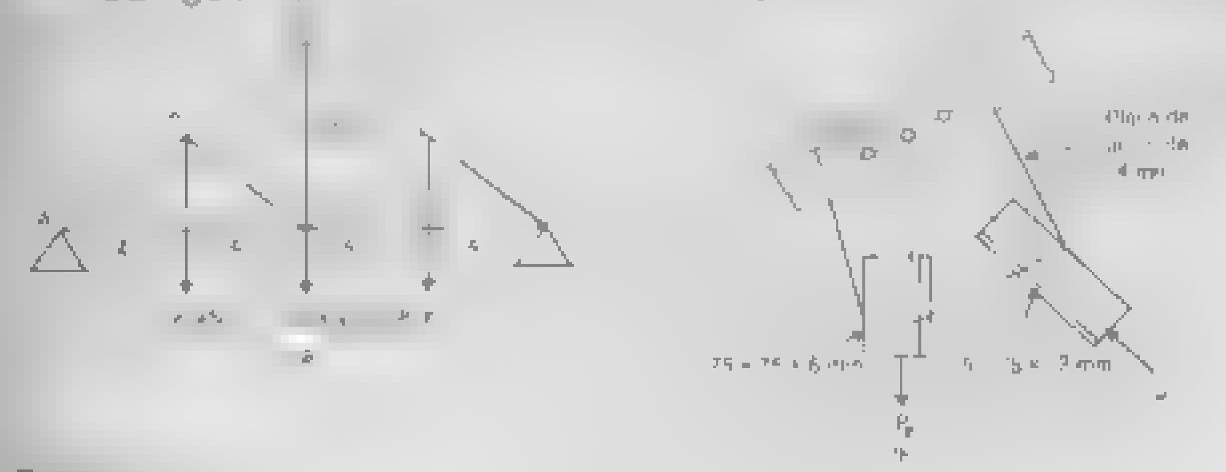
$$\tau_{cabeza} = \frac{34 \times 10^3\ N}{\pi \times 0.022\ m \times 0.012\ m}$$

$$\tau_{rosca} = \frac{34 \times 10^3\ N}{\pi \times 0.186\ m \times 0.16\ m}$$

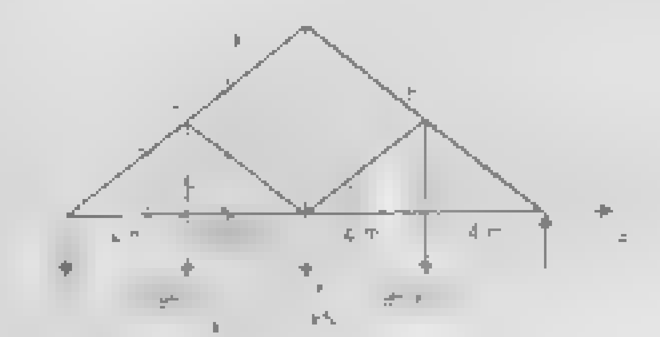
B) $\sigma_a = \dfrac{P}{\frac{\pi}{4}(d_{ext}^2 - d_{int}^2)}$ ⇒

+ $(0.028)^2$ ⇒

En la figura se muestra el esquema de una armadura y en el croquis (b) el ... remaches de 19 mm de diámetro se necesitan para unir la barra BC a la placa ... BE? ¿Cuál es el esfuerzo medio de compresión o de tensión en BC y BE?



Resolución

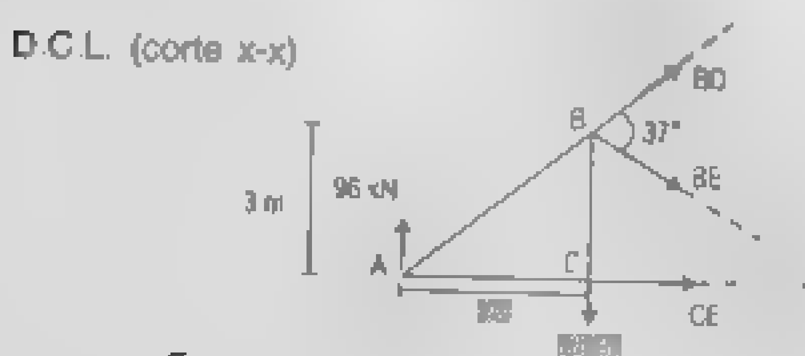


En toda la estructura.

$\Sigma M_H = 0$

$A_y \times 16 = 96 \times 12 + 200 \times 8 + 96 \times 4 \Rightarrow A_y = 196\ kN$

D.C.L. (corte x-x)



$\Sigma M_B = 0$ ↺

$CE(3) = 196(4) \Rightarrow CE = 261{,}333\ kN$ (T)

$\Sigma F_H = 0$

$$BD\left(\frac{4}{5}\right) + BE\left(\frac{3}{5}\right) + CE = 0 \Rightarrow 4BD + 3BE = -1306.667 \qquad (I)$$

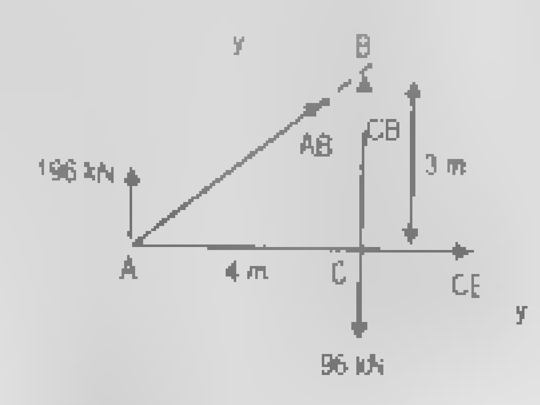
$\Sigma F_V = 0$

$$BD\left(\frac{3}{5}\right) - BE\left(\frac{4}{5}\right) + 196 - 96 = 0 \Rightarrow 3BD - 4BE = -500 \qquad (II)$$

De (I) y (II)

$BE = -76.80\ kN$ (C) ; $BD = -269.067\ kN$ (C)

D.C.L. (corte y-y)

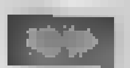


$\Sigma M_A = 0$ ↺

$CB(4)$ $96(4) \Rightarrow CB$ $96\ kN$ (T)

$$\tau \quad \frac{P}{n\ \frac{\pi d^2}{4}} \qquad \sigma \quad \frac{P}{n(t \times d)}$$

n = n ° remaches



En la barra BC

$$n_{\sigma_b} = \frac{96 \times 10^3\ N}{0{,}006\ m \times 0{,}019\ m \times 140 \times 10^6\ \frac{N}{m^2}} = 6\ 015$$

$n_{\sigma_b} = 7$ remaches

$$n \quad \frac{4 \times 96 \times 10^3\ N}{\pi \times (0{,}019\ m)^2 \times 70 \times 10^6\ \frac{N}{}} = 4{,}837$$

$n_\tau = 5$ remaches

para la barra BC se necesitarán 7 remaches

En la barra BE

$$n \quad \frac{76{,}8 \times 10^3\ N}{0{,}013\ m \times 0{,}019\ m \times 140 \times 10^6\ \frac{N}{m^2}}$$

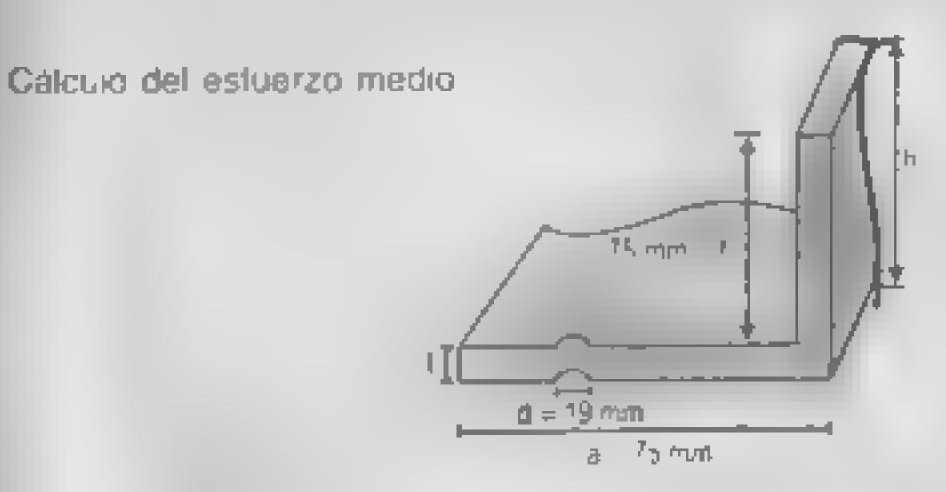
$n_{\sigma_b} = 3$ remaches

$$n \quad \frac{4 \times 76{,}8 \times 10^3\ N}{\pi \times (0{,}019\ m)^2 \times 70 \times 10^6\ \frac{N}{}} \quad 3.869$$

n 4 remaches

para la barra BE se necesitarán 4 remaches

Cálculo del esfuerzo medio



A = t × a d) − (1 t) × t

A t × (a d t)

$$\sigma = \frac{96\times10^3}{7\times0.006\times(2\times0.075-0.0019-0.006)} \Rightarrow \boxed{\sigma_{BC} = 18.286\ \text{MPa}}$$

$$\sigma = \frac{76.8\times10^3}{4\times0.013\times(2\times0.075-0.019-0.013)} \Rightarrow \boxed{12.516\ \text{MPa}}$$

129. Repetir el problema anterior con remaches de 22 mm de diámetro sin variar lo demás datos

Resolucion

Del problema anterior

BE = 76.8 kN (C) ⇒ BC = 96 kN (T)

Para nuestro caso d = 0.022 m

En la barra BC

$$\frac{1}{\pi(0.022)^2\times70\times10^6} = 3.608 \Rightarrow \quad 4\ \text{remaches}$$

$$n_{db} = \frac{\quad}{0.006\ \ 0.022\ \ 110\ \ 10^6} = 5.195 \Rightarrow \quad n_{a}\ \ 6\ \text{remaches}$$

para la barra BC se necesitarán 6 remaches

$$\sigma_{BC} = \frac{96\times10^3}{6\times0.006\times(2\times0.075-0.022-0.006)} \Rightarrow \quad \sigma_{BC} = 21.858\ \text{MPa}$$

En la barra BE

n = 3 remaches

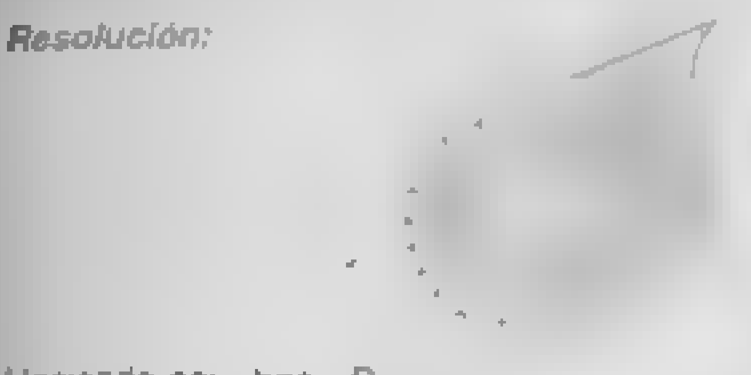
$$\frac{76.8}{0.013\times0.022\times140\times10^6} = 1.918 \Rightarrow \quad n\ \ 2\ \text{remaches}$$

para la barra BE se necesitarán 2 remaches

$$\sigma_{BE} = \frac{76.8\times10^3}{3\times0.013\times(2\times0.075-0.022-0.013)} \Rightarrow \boxed{\sigma_{BE} = 17.124\ \text{MPa}}$$

uestre que el esfuerzo en un cascaron esferico de pared delgada, de diametro D y espesor t sujeto a una presion interna p está dado por σ = pD/4t

Resolución:



Haciendo equilibrio P ...

D

Un recipiente cilíndrico a presión está fabricado de placas de acero que tienen un espesor de 20 mm. El diámetro del recipiente es 500 mm y su longitud, m. Determine la máxima presión interna que puede aplicarse e si el esfuerzo el acero esta limitado a 140 MPa. Si se aumentara la presión interna hasta que el recipiente fallara, bosqueje el tipo de fractura que ocurriría

Resolucion

longitudinal

Junta circunferencial

Falla por junta

Hallar la velocidad periférica límite de un anillo giratorio de acero si el esfuerzo normal admisible es de 140 MN/m² y la densidad del acero, 7850 kg/m³. Si el radio medio es de 250 mm, ¿a qué velocidad angular se alcanzará un esfuerzo de 200 MN/m²?

Resolucion.

De $\sigma = \rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\ } \Rightarrow v = \ldots$ $\boxed{v = 133.545\ \text{m/s}}$

$\sigma = \rho(\omega \cdot r_c)^2$

$\omega = \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho\, r^2}} = \sqrt{\dfrac{200 \times 10^6}{7850 \times 0.25^2}}$ **ω = 638.47 rad/s**

134 Un depósito cilíndrico de agua de eje vertical tiene 8 m de diámetro y 12 m de altura. Si ha de llenarse hasta el borde, determinar el mínimo espesor de las placas que lo componen si el esfuerzo está limitado a 40 MPa

Resolución

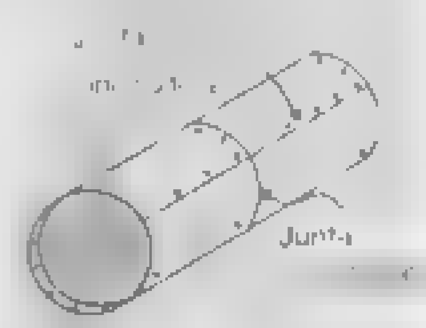
$p = \rho \times g \times L$

$p = 1000\dfrac{kg}{m^3} \times 9.81\dfrac{m}{s^2} \times 12\ m \Rightarrow p = 117\ 720\ N/m^2$

$\sigma = \dfrac{p \times D}{2 \times t} \Rightarrow t = \dfrac{p \times D}{2 \times \sigma_c} \Rightarrow t = \dfrac{117\ 720 \times 8}{2 \times 40 \times 10^6} = 0.0118\ m$

t = 11.8 mm

135 En el depósito cilíndrico de la figura 1-16 la resistencia de las juntas longitudinales es de 480 kN y de las transversales de 200 kN. Si la presión interior ha de ser de 1.5 MN/m², determinar el máximo diámetro que se puede dar al depósito.



Resolución

Junta longitudinal $\Rightarrow \sigma_{long}$

Junta circunferencial $\Rightarrow \sigma_{circ}$

De la resistencia longitudinal:

$P = \dfrac{\pi D^2}{4} p$

$D = 2\sqrt{\dfrac{P}{\pi\, p}} = 2\sqrt{\dfrac{480 \times 10^3}{\pi \times 1.5 \times 10^6}} \Rightarrow D_L = 0.638\ m \Rightarrow D_L = 638\ mm$

$P_T = (\pi D_T\, t)\,\sigma_L = (\pi D_T\, t) \times \dfrac{p.D_T}{4t} \Rightarrow P_T = \dfrac{\pi D_T^2}{4} p$

$D = 2\sqrt{\dfrac{P}{\pi\, p}} = 2\sqrt{\dfrac{200 \times 10^3}{\pi \times 1.5 \times 10^6}} \Rightarrow D_T = 0.412\ m = 412\ mm$

De los 2 valores obtenidos escogemos el menor, por lo tanto **D = 412 mm**

136 Una tubería que conduce vapor a 3,5 MPa tiene un diámetro exterior de 450 mm y un espesor de 10 mm. Se cierra uno de sus extremos mediante una placa atornillada al reborde de este extremo, con interposición de una junta o empaquetadura. ¿Cuántos tornillos de 40 mm de diámetro se necesitan para sujetar la tapa si el esfuerzo admisible es de 80 MPa y tiene un esfuerzo de apriete de 55 MPa? ¿Qué esfuerzo circunferencial se desarrolla en la tubería? ¿Por qué es necesario el apriete inicial de los tornillos de la tapa? ¿Qué sucedería si la presión del vapor hiciera duplicar el esfuerzo de apriete?

Resolución

$F = \dfrac{\pi D^2}{4} p$

$F = \dfrac{\pi}{4} \times (0{,}45\ m)^2 \times 3{,}5 \times 10^6\ \dfrac{N}{m^2} \Rightarrow$ **F = 556 651 kN**

$\tau = \dfrac{F}{n_t\left(\pi\dfrac{d^2}{4}\right)} \Rightarrow n_t = \dfrac{F}{\tau\, \pi \dfrac{d^2}{4}}$

$n_t = \dfrac{556{,}651 \times 10^3}{55 \times 10^6 \times \left(\dfrac{\pi}{4}\right) \times (0{,}04\ m)^2} = 8{,}05 \Rightarrow n_t = 9$ tornillos

Área útil

$\sigma = \dfrac{P}{A}$

$A = (\pi D\, t - n\, d\, t) \Rightarrow A = t(\pi D_{ext} - n.d)$

$A = \dfrac{P}{\sigma} \Rightarrow t(\pi . D_{ext} - n \times d) = \dfrac{P}{\sigma}$

$\pi D - \dfrac{P}{\sigma t} = n\, d \Rightarrow n = \dfrac{\pi D}{d} - \dfrac{P}{\sigma\, t\, d}$

Entonces

$n = \dfrac{\pi \times 0{,}43}{0.04} - \dfrac{556{,}651 \times 10^3}{80 \times 10^6 \times 0.01 \times 0.04} \Rightarrow n_e = 16{,}377 \Rightarrow n_e = 17$ tornillos

De ambos valores escogemos el mayor **se necesitarán 17 tornillos**

$\sigma = \frac{P\,D}{2t}$

$D_{int} = D_{ext} - 2t \Rightarrow D_{int} = 450\text{ mm} - 2 \times 10\text{ mm} \Rightarrow D_{int} = 0{,}43\text{ m}$

$$\sigma = \frac{3{,}5\times10^{6}\ \frac{N}{m^{2}} \times 0{,}43\text{ m}}{2\times0{,}01\text{ m}} \qquad \boxed{\sigma = 75{,}25\text{ MPa}}$$

- El apriete inicial permite que los tornillos permanezcan fijos
- Si se duplica el esfuerzo de apriete los pernos fallarían

137 [illegible] tiene 1,5 m [illegible] de 3 m [illegible] MPa [illegible] una presión [illegible] MPa [illegible] de un extremo de la tubería (esfuerzo longitudinal). ¿Cuál es el esfuerzo circunferencia?

Resolución:

$D = 1{,}5$ m	$P = 1{,}25$ MPa
$t = 0{,}01$ m	$\tau = 70$ MPa
$d = 0{,}02$ m	$\sigma_b = 140$ MPa
	$L = 3$ m(paso)

$$\sigma_c = \frac{P\,D}{2t} \Rightarrow \sigma_c = \frac{1{,}25\times10^{6}\times1{,}5}{2\times0{,}01} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 93{,}75\text{ MPa}}$$

$F = P\,D\,L \Rightarrow F = 1{,}25 \times 10^{6} \times 1{,}5 \times 3 \Rightarrow F = 5625\text{ kN}$

$\tau = \frac{P}{nA} \Rightarrow n = \frac{P}{\tau A}$

$$n = \frac{5625\times10^{3}}{70\times10^{6}\times\frac{\pi(0{,}02)^{2}}{4}} \Rightarrow n = 256$$

$\sigma = \frac{P}{nA} \Rightarrow n = \frac{P}{\sigma\,t\,d}$

$$n = \frac{5625\times10^{3}}{[illegible]} \Rightarrow n = 201$$

$$s = \frac{\pi D}{n} \Rightarrow s = \frac{\pi(1{,}5)}{256} \Rightarrow \boxed{s = 36{,}81\text{ mm}}$$

138 Resolver el problema anterior con un diámetro del conducto de 2 m y remaches de 30 mm de diámetro sin modificar los otros datos.

$$\sigma_c = \frac{1{,}25\times10^{6}\times2}{2\times0{,}01} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 125\text{ MPa}}$$

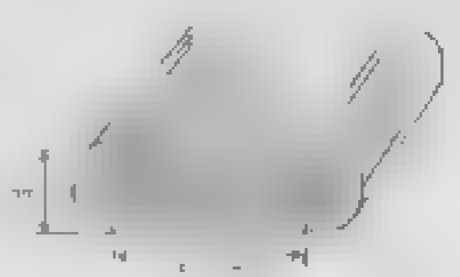
$F = 1{,}25 \times 10^{6} \times 2 \times 3 \Rightarrow F = 7500\text{ kN}$

$n = [illegible] \Rightarrow n = 152$

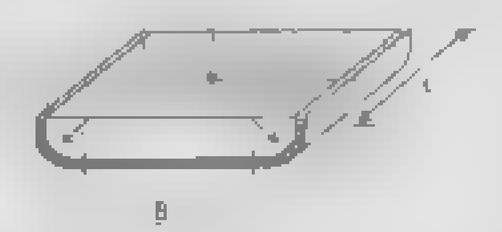
$$n = \frac{7500\times10^{3}}{140\times10^{6}\times(0{,}01)(0{,}03)} \Rightarrow [illegible]$$

$s = \frac{\pi D}{n} \Rightarrow [illegible] \Rightarrow$ [illegible]

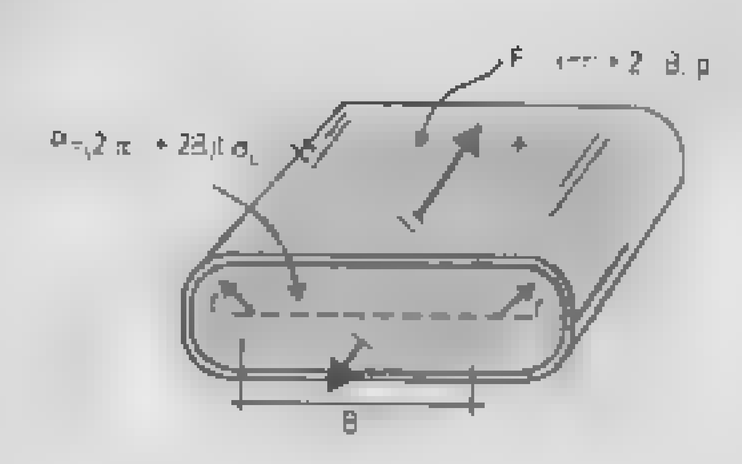
139 El depósito de la figura se construyó con placa de 10 mm de acero. Calcular los esfuerzos máximos circunferencial y longitudinal que originará una presión interior de 1,2 MPa.



Resolución



$$\sigma_c = \frac{P\,L}{2t} \Rightarrow \sigma_c = \frac{1{,}2\times10^{6}(0{,}6+0{,}4)}{2\times0{,}01} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 60\text{ MPa}}$$



$P = F$

$(\pi \; D + 2 \; B) \; t \; \sigma \quad \frac{\pi D}{4} \quad BD \quad p$

$$\sigma_L = \frac{(\pi D^2 + 4 \; BD)p}{4(\pi D + 2B).t} \Rightarrow \sigma_L = \frac{(\pi \times 0,4^2 + 4 \times 0,6 \times 0,4) \times 1,2 \times 10^6}{4(\pi \times 0,4 + 2 \times 0,6) \times 0,01}$$

σ $\boxed{\sigma \quad 17\,862 \text{ MPa}}$

140 C[illegible] el [illegible] espesor de la placa que forma el depósito del problema anterior si el esfuerzo [illegible] es de 40 MN/m[illegible] y la presión interior es 1,5 MN/m

De las ecuaciones halladas en el P-139

$$\sigma \quad \frac{p(B + D)}{2t}$$

$$t \quad \frac{p(B + D)}{2\sigma} = \frac{1,5 \times 10^6 \times (0,6 + 0,4)}{2 \times 40 \times 10^6} \quad \Rightarrow \quad t = 0.01875 \text{ m} = 18,75 \text{ mm}$$

También

$$\sigma \quad \frac{(\pi \times D^2 + 4 \; B \; D).p}{4(\pi.D + 2.B).t}$$

$$t \quad \frac{\pi \; L \quad 4BD \; p}{4\,\sigma\,(\pi D + 2B)} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi \; 0\,4 \quad 4 \; 0\,6 \; 0\,4 \quad 1\,5 \; 10}{4 \times 40 \times 10^6 (\pi \times 0,4 + 2 \times 0,6)}$$

$t = 0,0056$ m $\quad \Rightarrow \quad t = 5\,6$ mm

De ambos valores escogemos el mayor, entonces $\boxed{t = 18\,75 \text{ mm}}$

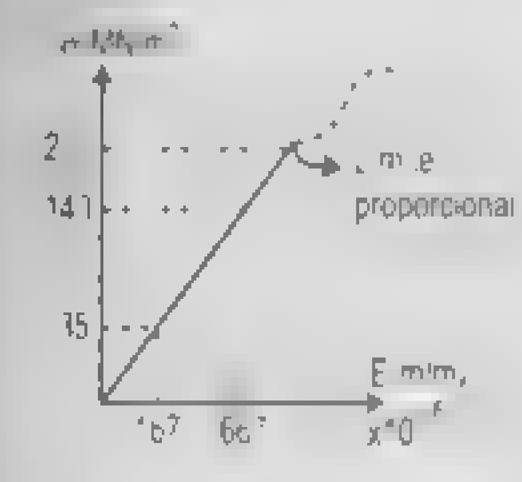
CAPÍTULO 2

DEFORMACIÓN SIMPLE

201, 202 problemas ilustrativos

203 Durante una prueba esfuerzo-deformación se ha obtenido que para un esfuerzo de 35 MN/m^2 la deformación ha sido de 167×10^{-6} m/m y para un esfuerzo de 140 MN/m^2, de 667×10^{-6} m/m. Si el límite de proporcionalidad es de 200 MN/m^2, ¿cuál es el valor del módulo elástico? ¿Cuál es el esfuerzo correspondiente a una deformación unitaria de 0,002? Si el límite de proporcionalidad hubiese sido de 150 MN/m^2, ¿se hubiera deducido los mismos resultados? Razonar la respuesta.

Resolución



$$E \quad \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \frac{35}{167} = \frac{140}{667}$$

$E \quad 209,581 \times 10^9$ N/m^2

$\boxed{E = 209\,581 \text{ GPa}}$

$$\frac{140 \times 10^6 \text{ N/m}^2}{667 \; 10 \; m \; m} = \frac{x}{0\,002 \; m \; m}$$

$x = 419,79 \times 10^6$ N/m^2

$\boxed{\sigma = 419\,79 \text{ MPa}}$

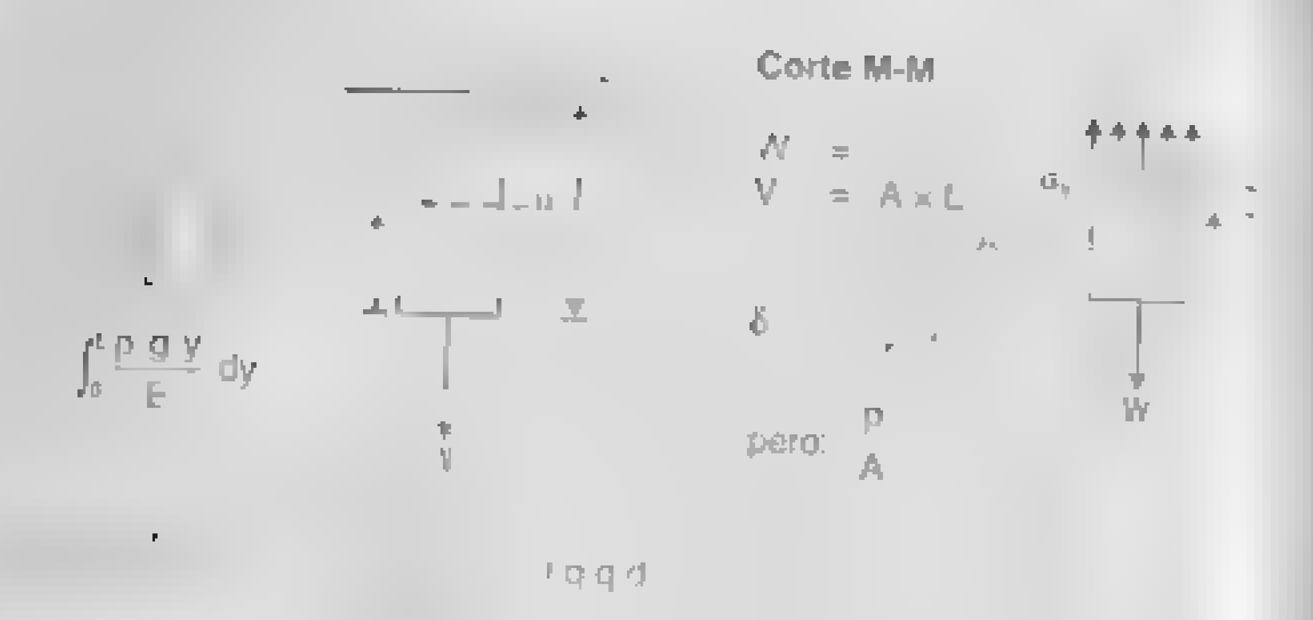
Para una deformación de 0,002 se supera el límite de proporcionalidad. Si el límite de proporcionalidad hubiera sido 150 MN/m^2 se hubiera producido los mismos resultados puesto que la deformación de 0,002 supera igual que el problema anterior el límite de proporcionalidad.

204 Una barra prismática de longitud L, sección transversal A y densidad ρ se suspende verticalmente de un extremo. Demostrar que su alargamiento total es $\delta = \rho g L^2/2AE$. Llamando M a su masa total, demostrar que también $\delta = MgL/2AE$

Resolución:

$\Sigma F_y \quad 0$

$\sigma \; A \quad \rho \; g \; A \; y \quad 0$



Premultiplicando por A: $\delta = \frac{\rho g L^2}{2E}\left(\frac{A}{A}\right)$, pero $M = \rho V \Rightarrow M = \rho L$

Reemplazando: $\delta = \frac{\ \ }{2AE}$ | l q q d

205 Una varilla de acero que tiene una sección constante de 300 mm² y una lo

Indicación: aplique el resultado del problema 204

Resolución

δ = carga axial + peso propio $\Rightarrow \delta = \frac{P L}{E A} + \frac{\rho g L^2}{2E}$

$300\times10^{-6}\times200\times10^{9}$ ... $2\ 200\times10^{9}$ = 0.0543 m $\Rightarrow$ $\boxed{\delta = 54.3\ mm}$

206

inferior a 5 mm. Supóngase E = 200 GPa

Resolución

$\frac{P L}{E A}$, donde A =

$\Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{2000\times10}{0.005\times\pi\times200\times10^{9}}} = 0.00505$ m

2000

los 2 valores escogemos el mayor $\boxed{d = 5.05\ mm}$

llanta de acero, de 10 mm de espesor, 80 mm de ancho y de 1500 mm de ... inferior, se calienta y luego se monta sobre una rueda de acero de ... mm de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática es 0.30, ¿qué par ... iere para girar la llanta con respecto a la rueda? Desprecie la deformación de la rueda y use E = 200 GPa

Resolución

a la dilatación hay un incremento radial λ = 0.25 mm ... (1)

incremento es causa del esfuerzo σ, así

$\lambda = \frac{\sigma R}{E}$ ... (2) donde: R = 750 mm $\wedge$ E = 200 GPa

el esfuerzo es provocado por la fuerza N sobre el área de acción

A $\pi(r_e^2 - r_i^2)$

$N = \sigma\pi(r_e + r_i)(r_e - r_i)$ ... (3)

recordar que $r_e - r_i = h$ = 80 mm (ancho)

no existe rozamiento, la fuerza de acción es $F_r = \mu N$ ... (4)

μ = 0.3

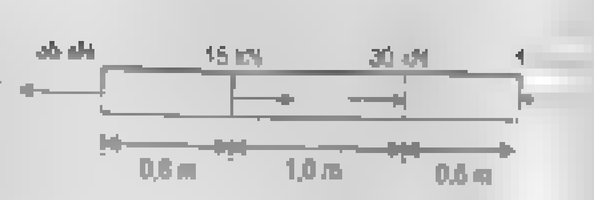
par necesario es $M = F_r \times e$ ... (5), donde e = 10 mm (espesor)

(2), (3), (4) y (5): $M = \mu\lambda\frac{(r_e + r_i)}{}(E\pi h e) = \mu\lambda 2 E\pi r h e$

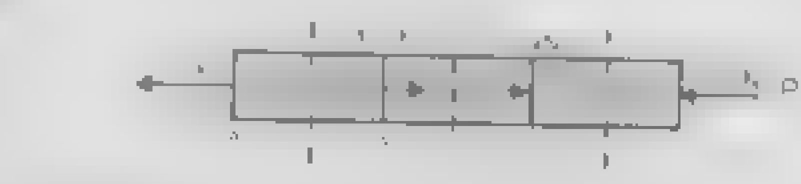
Reemplazando datos

$= (0.3)(0.25\times10^{-3}\ m)(2)(200.10^{9}\ \frac{N}{m^2})(3.14)(80\ 10^{-3} m)(0.01\ m) \Rightarrow \boxed{M = 75.36\ kN\ m}$

208. Una barra de aluminio de sección constante de 160 mm² soporta unas fuerzas axiales aplicadas en los puntos que indica la figura. Si E = 70 GPa, determinar el alargamiento o acortamiento total de la barra. (No hay pandeo de este elemento)



Resolución.



35 kN ← → P_{AB} = 35 kN

35 kN ← → $P_{BC} = 35 - 15 = 20$ kN

35 kN ← → P = 35 − 15 − 30 = −10 kN

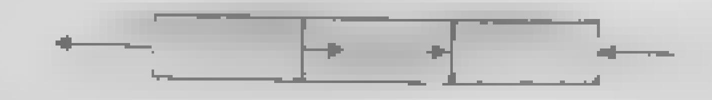
$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} - \delta_{CD}$

$$\delta = [(35\times10^3)(0{,}8) + (20\times10^3)(1{,}0) + (-10\times10^3)(0{,}6)] \times \frac{1}{(70\times10^9)(160\times10^{-6})}$$

$\boxed{\delta = 3{,}39 \text{ mm}}$ (alargamiento)

209. Resolver el problema 208 intercambiando las fuerzas aplicadas en sus extremos: en el izquierdo la fuerza de 10 kN y en el derecho la de 35 kN.

Resolución.



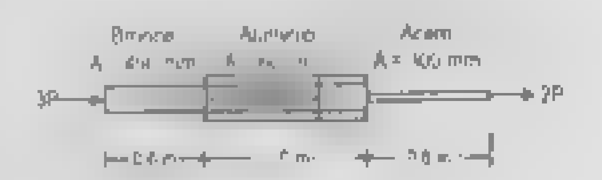
$P_{AB} = 10$ kN $P_{BC} = -5$ kN $P_{CD} = -35$ kN

$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$

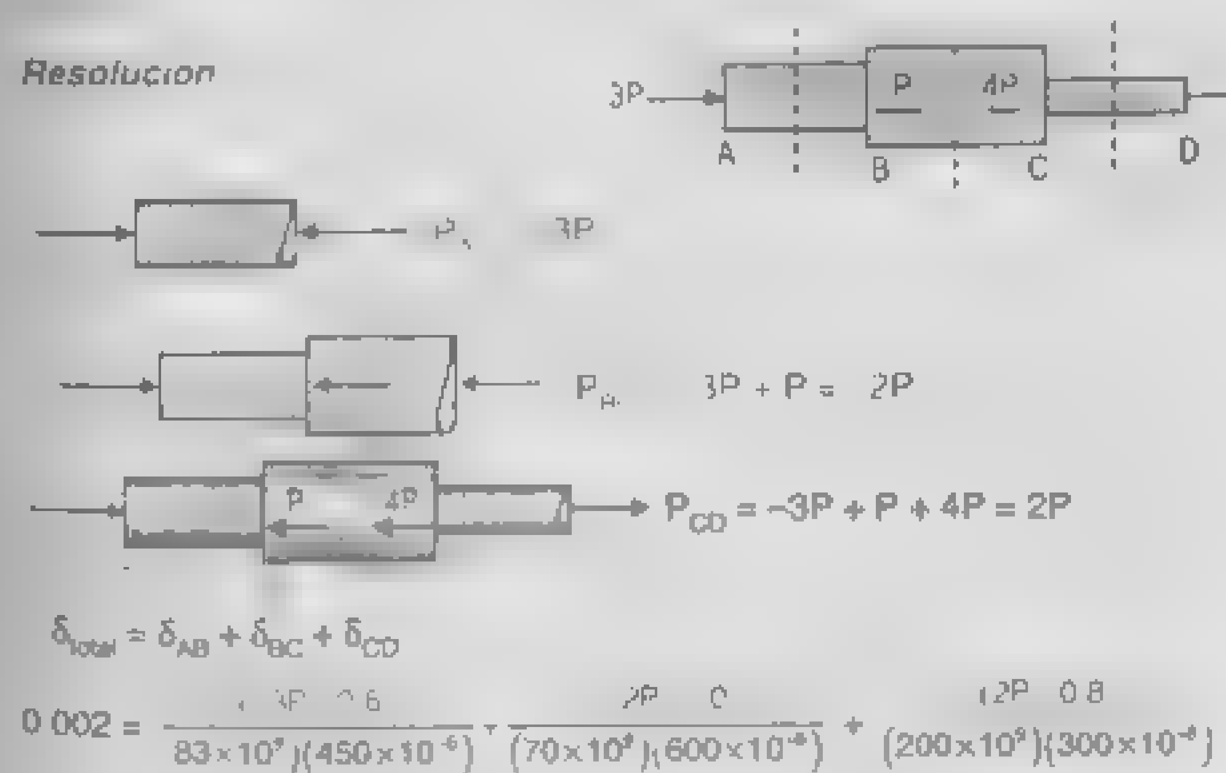
$$\delta = [(10\times10^3)(0{,}8) - (5\times10^3)(1) - (35\times10^3)(0{,}6)] \times \frac{1}{(70\times10^9)(160\times10^{-6})}$$

$\delta = -1{,}607\times10^{-3}$ m $\Rightarrow$ $\boxed{\delta = 1{,}61 \text{ mm}}$ (acortamiento)

210. Un tubo de aluminio está unido a una varilla de acero y a otra de bronce, tal como se indica en la figura, y soporta unas fuerzas axiales en las posiciones señaladas. Determinar el valor de P con las siguientes condiciones: la deformación total no ha de exceder de 2 mm, ni las tensiones han de sobrepasar 140 MN/m² en el acero, 80 MN/m² en el aluminio ni 120 MN/m² en el bronce. Se supone que el conjunto está convenientemente anclado para evitar el pandeo y que los módulos de elasticidad son 200 × 10³ MN/m² para el acero, 70 × 10³ MN/m² para el aluminio y 83 × 10³ MN/m² para el bronce.



Resolución



$P_{AB} = 3P$

$P_{BC} = -3P + P = -2P$

$P_{CD} = -3P + P + 4P = 2P$

$\delta_{total} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$

$$0{,}002 = \frac{(-3P)(0{,}6)}{(83\times10^9)(450\times10^{-6})} + \frac{(-2P)(1)}{(70\times10^9)(600\times10^{-6})} + \frac{(2P)(0{,}8)}{(200\times10^9)(300\times10^{-6})}$$

$0{,}002 = -4{,}819\times10^{-8}P - 4{,}762\times10^{-8}P + 2{,}667\times10^{-8}P$

P = 28 927 kN

Del bronce: $\sigma = 120 \times 10^6 = \dfrac{3P}{450 \times 10^{-6}} \Rightarrow P_{bronce} = 18$ kN

Del aluminio: $\sigma = 80 \times 10^6 = \dfrac{2P}{600 \times 10^{-6}} \Rightarrow P_{aluminio} = 24$ kN

Del acero: $\sigma = 140 \times 10^6 = \dfrac{2P}{300 \times 10^{-6}} \Rightarrow P_{acero} = 18$ kN

De los 4 valores obtenidos escogemos el menor, por lo tanto: $\boxed{P = 18 \text{ kN}}$

211 Dos barras AB y CD que se suponen absolutamente rígidas están articuladas en A y en D y separadas en C mediante un rodillo como indica la figura. En B, una varilla de acero ayuda a soportar la carga de 50 kN. Determinar el desplazamiento vertical del rodillo situado en C.

Resolución:

$\Sigma M_C = 0$

D ...

D ... kN

D.C.L. (lado derecho)

$\Sigma M_C = 0$

$A_y(4.5) + T_B(1.5) = 0$

$T_B = -3A_y$

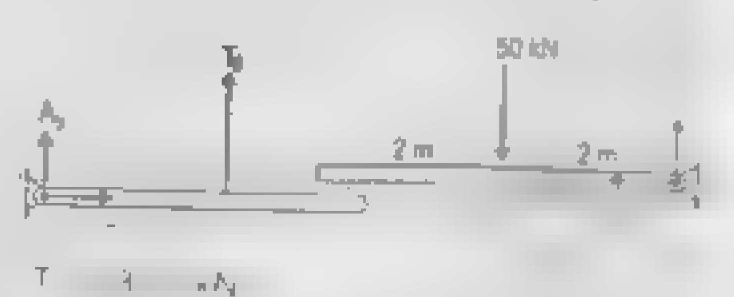
D.C.L. (lado izquierdo)

D.C.L. (toda la estructura)

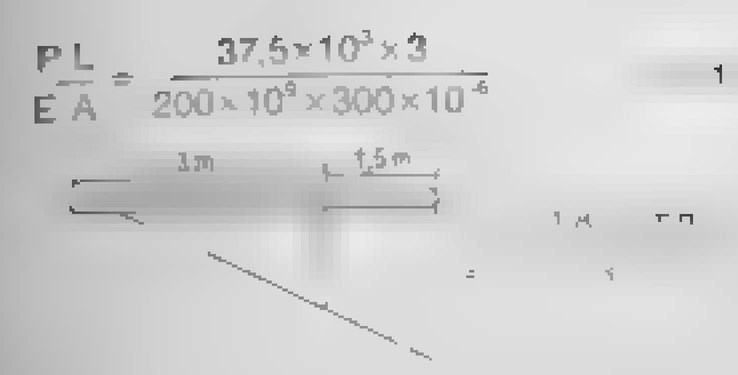
$\Sigma F_y = 0$

$A_y + D_y + T_B = 50$

$A_y + 25 - 3(A_y) = 50$

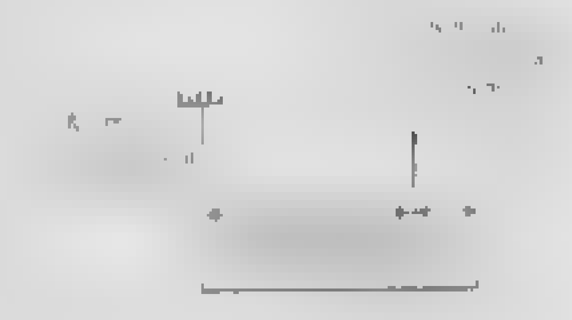


$\dfrac{PL}{EA} = \dfrac{37.5 \times 10^3 \times 3}{200 \times 10^9 \times 300 \times 10^{-6}}$



$\boxed{y = 2.8125 \text{ mm}}$

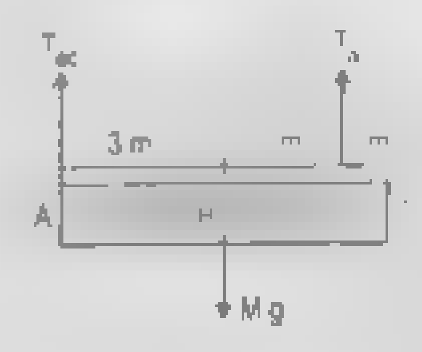
... bloque prismático de concreto de masa ... ha de ser suspendido de dos varillas ... extremos inferiores están al mismo ..., tal como se indica en la figura. De... la relación de las secciones de ...



Resolución

$\Sigma M_A = 0$

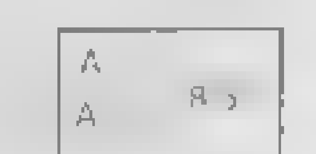
... M ...



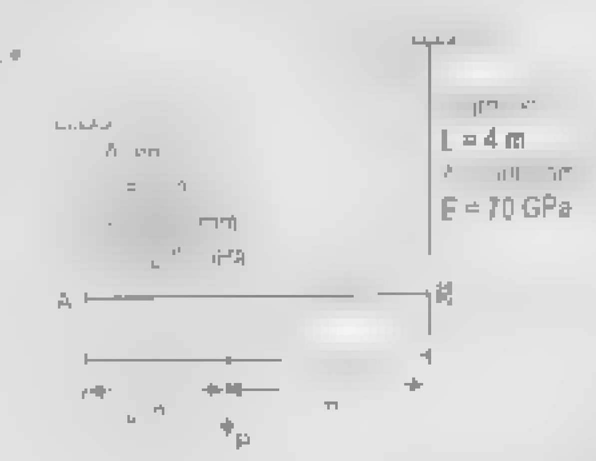
$\Sigma F_y = 0$

$T \quad T = M\ g \Rightarrow T_{ac} = \dfrac{2}{5} M\ g$

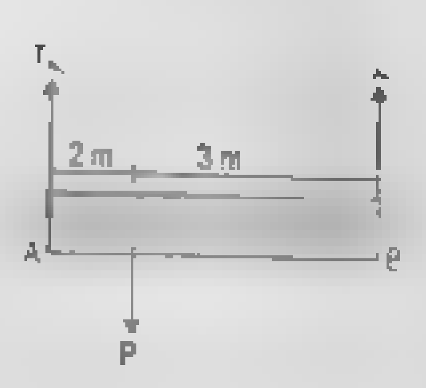
$\dfrac{T_{al}\ L_{al}}{E_{al}\ A_{al}} \Rightarrow \dfrac{\frac{2}{5} Mg(3)}{200 \times 10^9 \cdot A_{ac}} = \dfrac{\frac{3}{5} Mg(6)}{70 \times 10^9\ A_{al}}$



... barra rígida AB sujeta a dos varillas verticales como se muestra en la figura, está ... posición horizontal antes de aplicar la ... P. Si P = 50 kN, determine el movimiento vertical de la barra.



Resolucion



$\Sigma M_A = 0$

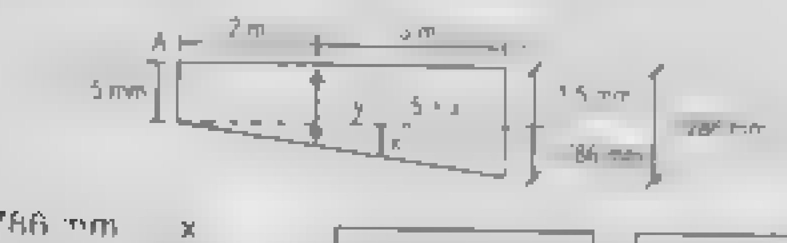
$T_{al}(5) = P(2) \Rightarrow T_{al} = 20\ kN$

$\Sigma F_V = 0$

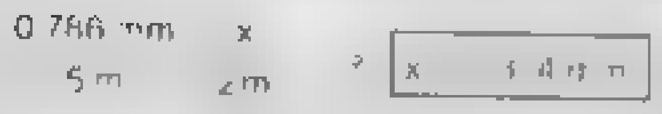
$T_{ac} + T_{al} = P \Rightarrow T_{ac} = 30\ kN$

δ_A ... $\frac{30 \quad 10 \quad 3}{200 \quad 10 \quad 300 \quad 10}$ ... 1.5 mm

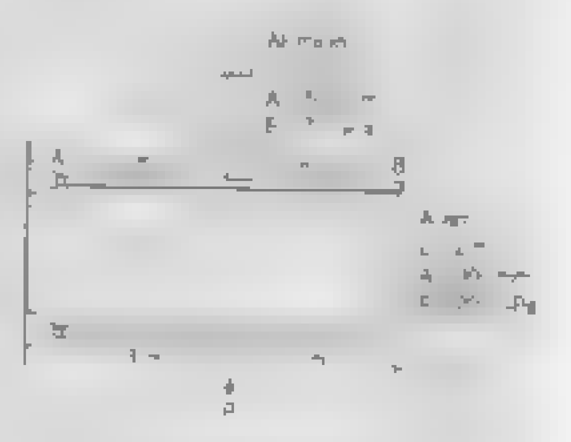
δ_B ... $\frac{20 \quad 10 \quad 4}{70\times10^9\times500\times10^{-6}}$ ... 2.286 mm



$\frac{0.786\ mm}{5\ m}$ ... $\frac{x}{2\ m}$

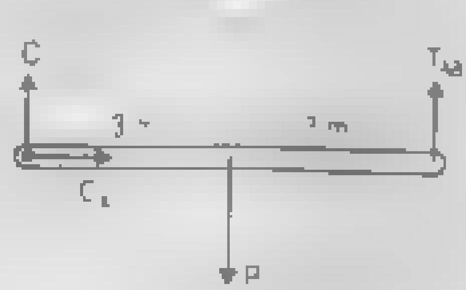


214. Las barras rígidas AB y CD mostradas en la figura están apoyadas mediante pernos en A y en C, y mediante las varillas mostradas. Determine la máxima fuerza P que pueda aplicarse como se muestra si el movimiento vertical de las barras está limitado a 5 mm. Desprecie los pesos de todos los miembros.



Resolución

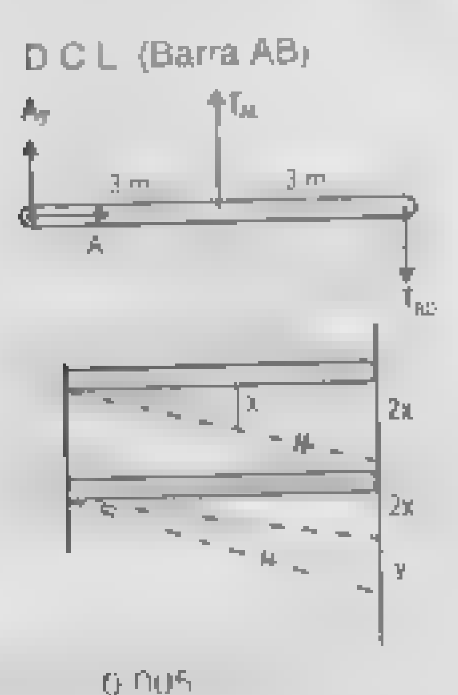
D C L (barra C)



$\Sigma M_C = 0$

$T_{DB}(6) = P(3) \Rightarrow T_{DB} = P/2$

D C L (Barra AB)



$\Sigma M_A = 0$

$T_a(3) = T_{br}(6) \Rightarrow T_a = 2\frac{P}{2}$

$T_a = P$

$2x + y = 5\ mm$ ... $\delta_a = x$ ... $\delta_{br} = y$

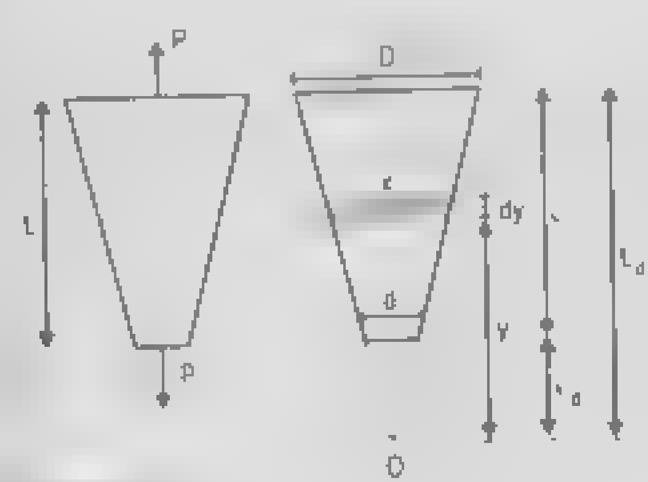
$2\delta_a + \delta_{br} = 0.005$

$2\left[\frac{P(2)}{70\times10^9\times500\times10^{-6}}\right] + \left[\frac{P/2(2)}{200\times10^9\times300\times10}\right] = 0.005$

$1.309\times10^{-1}\ P = 0.005 \Rightarrow$ **P = 38,182 kN**

215 Una varilla de longitud L y sección circular tiene un diámetro que varía linealmente desde D en un extremo hasta d en el otro. Determinar el alargamiento que le producirá una fuerza P de tensión.

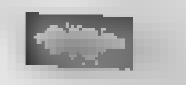
Resolucion



De la relación de triángulos

$\frac{x}{y} = \frac{D - d}{L}$ ... $\Rightarrow x = \frac{Dy}{L_D}$ ... $\frac{L}{L} \quad \frac{D}{d}$

$\delta = \int \frac{P}{E}\frac{dy}{A}$



A

P

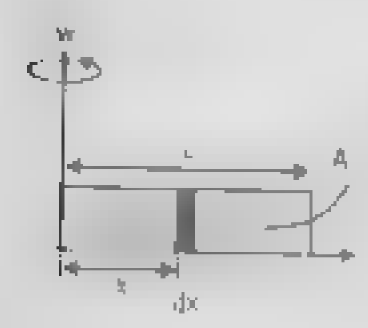
t

$$\delta = \frac{P}{\pi E D^2}$$

$$\frac{4 P L_0^2}{\pi E D^2}\left[\frac{L_0 - L}{L_0 \; L}\right]$$

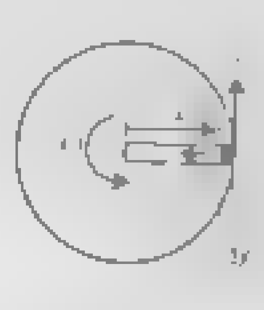
216 Una varilla delgada de
plano horizontal
por uno de sus ex
demostrar que el alargam

Resolución



F A x

F A



$$\delta = \int_0^L \frac{F_x}{E\,A}\,dx$$

A

$E\,A$

$$E \int_0^L x^2\,dx = \frac{\omega}{E}$$

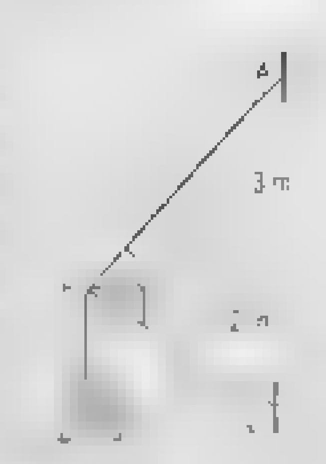
AB, BC A, C

P

E

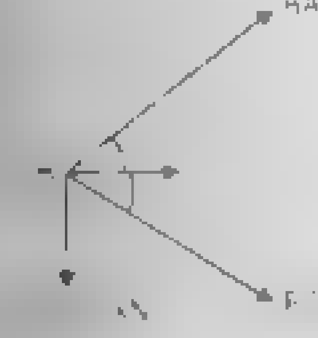
determ

dérese $\alpha = 30°$ y θ



Resolución

D C L

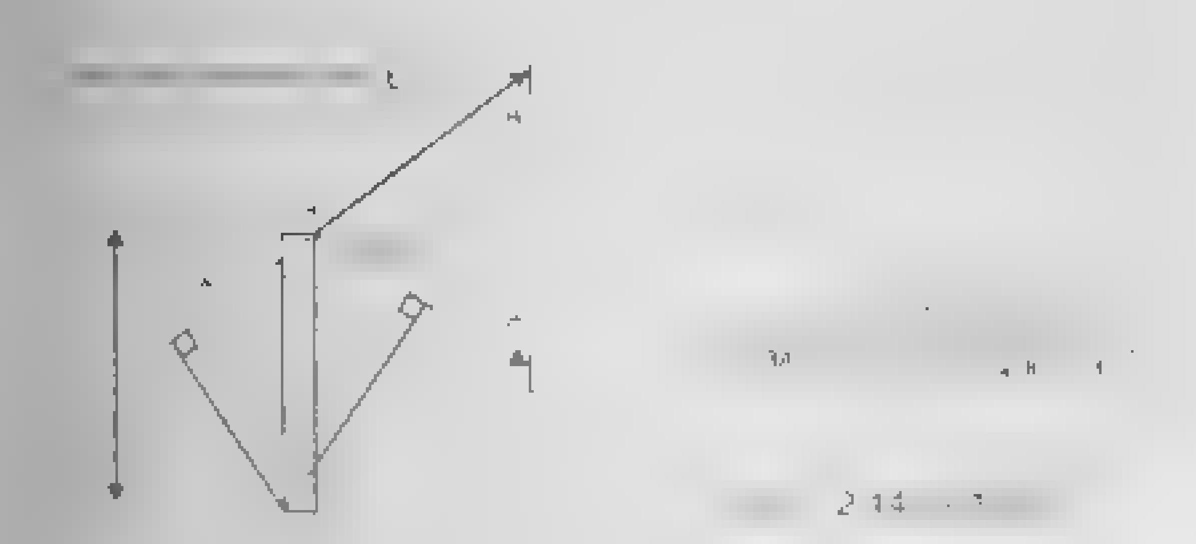


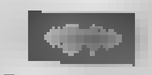
$\Sigma F_x = 0$

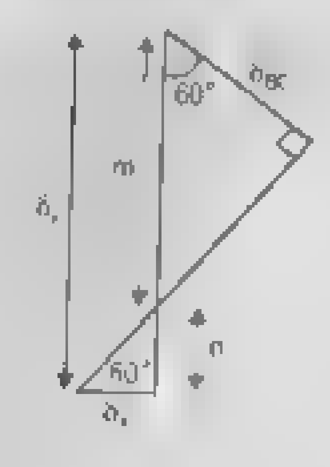
$\Sigma F_y = 0$

P

P







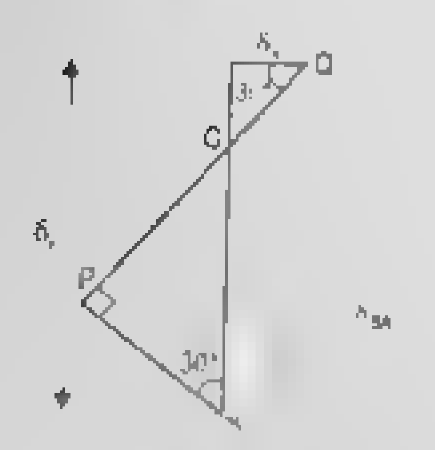
$\delta_{BC} = \dfrac{20 \times 10^3 \times 2}{70 \times 10^3 \times 400 \times 10^{-6}}$

$\delta_{BC} = 1{,}429 \times 10^{-3}\ m$

$\delta_y = m + n$

$\delta_y = \delta_{BC}\sec 60° + \delta_x \tan 60$

$\delta_y = 2\delta_{BC} + \sqrt{3}\,\delta_x$ (I)



$\delta_{BA} = QO + OP$ (II)

$QO = \delta_x \sec 30$

$QO = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\delta_x$

$OP = \dfrac{\delta_y}{2} - \dfrac{\delta_x}{2\sqrt{3}}$ (β)

(γ) y (β) en (II)

$\dfrac{\delta_y}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\delta_x = \delta_{BA} \Rightarrow 2\delta_{BA} = \delta_y + \sqrt{3}\,\delta_x$ (III)

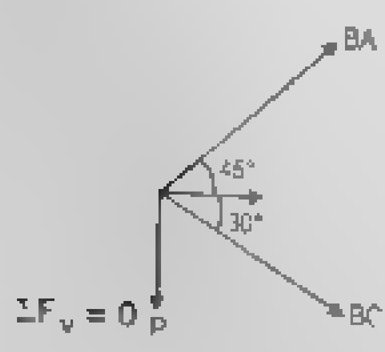
De (I) y (III)

$\delta_x = 0{,}412$ mm $\delta_y = 3{,}571$ mm

218. Resolver el problema 217 si la varilla AB es de acero, de E = 200 × 10³ MN/m², α = 45° y θ = 30°, sin modificar los demás datos.

Resolución

D.C.L



$\Sigma F_H = 0$

$BA\cos 45 = BC\cos 30$

$BA = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,BC$

$\Sigma F_V = 0$

$BA\ \text{sen}45 - BC\ \text{sen}30 = P$

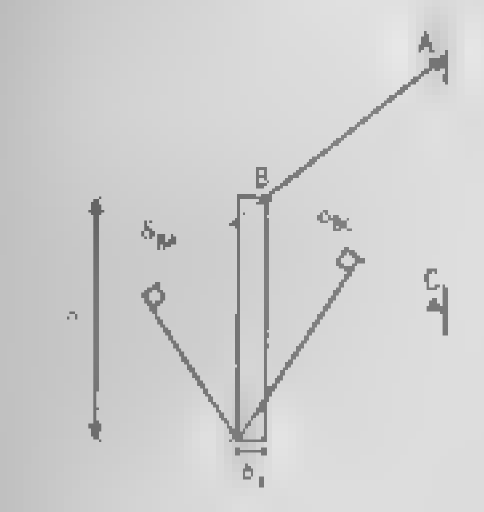
$BA\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - BC\left(\dfrac{1}{2}\right) = P \Rightarrow \left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}BC\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \dfrac{BC}{2} = P \Rightarrow BC = -0{,}732P$

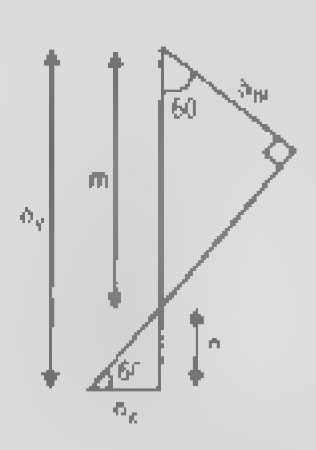
$BA = 0{,}897P$

$\delta_{BA} = \dfrac{0{,}897 \times 20 \times 10^3 \times 3}{200 \times 10^9 \times 400 \times 10^{-6}} \Rightarrow \delta_{BA} = 0{,}673 \times 10^{-3}\ m$ (alargamiento)

$\delta_{BC} = \dfrac{0{,}732 \times 20 \times 10^3 \times 2}{70 \times 10^9 \times 400 \times 10^{-6}} \Rightarrow \delta_{BC} = 1{,}046 \times 10^{-3}\ m$ (acortamiento)

Desplazamiento de "B"



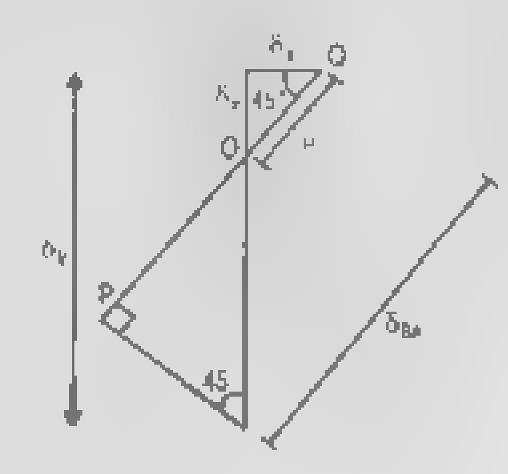


$\delta_y = m + n$

$\delta_y = 2\delta_{BC} + \sqrt{3}\,\delta_x$ (I)

$\delta_x = \dots$ donde $\mu = \delta_x\sqrt{2}$

$\delta_x = \dfrac{\delta_{BA}}{\sqrt{2}}$ (II)



De (I) y (II):

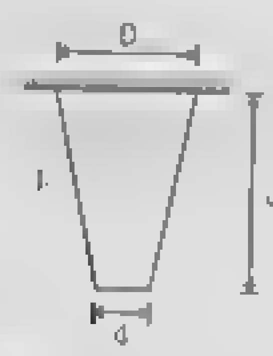
Tenemos

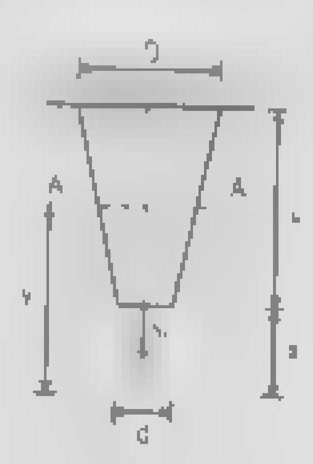
$\delta_x = \dfrac{0{,}673}{\sqrt{2}}$ $\delta_x = 0{,}476$ mm (alargamiento)

$\delta_y = 0{,}933$ mm (acortamiento)

219 Una barra de sección circular que varía [illegible] desde un diámetro D en [illegible] extremo hasta otro menor d en el opuesto, se suspende [illegible] extremo más ancho. Si la densidad [illegible] es [illegible], determinar el [illegible] lo debido a su peso propio. Aplicar el resultado a la determinación del [illegible] miento de un sólido de forma cónica suspendido de su base.

Resolución



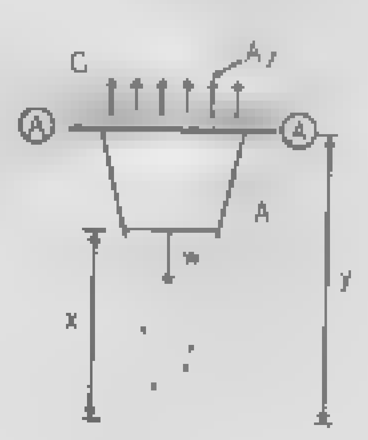


De la relación

$$\frac{x}{d/2} = \frac{x+L}{D/2} \Rightarrow \frac{x}{d} = \frac{x+L}{D} \Rightarrow xD = xd + dL \Rightarrow \boxed{x = \frac{dL}{(D-d)}}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{d/2}{x} \Rightarrow z = \frac{d\,y}{2}\left(\frac{D-d}{dL}\right) \Rightarrow z = \frac{y(D-d)}{2L}$$

Corte A – A



$\Sigma F_y = 0$

$$\sigma_y A_y = W \Rightarrow \sigma_y A_y = \rho g V \qquad ...(\alpha)$$

[illegible]

$$V = \frac{1}{3}A_y \ldots = \frac{1}{3}\pi\frac{z^2}{4}\ldots x$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{(D-d)}{4L}\right)^2 y^3 - \frac{1}{3}\pi\frac{d^2}{4}\ldots$$

[illegible] ...(1)

[illegible]

$$\sigma_y = \frac{\rho g}{3}\left[y - \frac{d^3L^3}{y^2(D-d)^3}\right]$$

Pero:

$$\delta = \frac{1}{E}\int \sigma_y\, dy$$

$$\delta = \frac{\rho g}{3E}\int\left[y - \frac{d^3L^3}{(D-d)^3 y^2}\right]dy$$

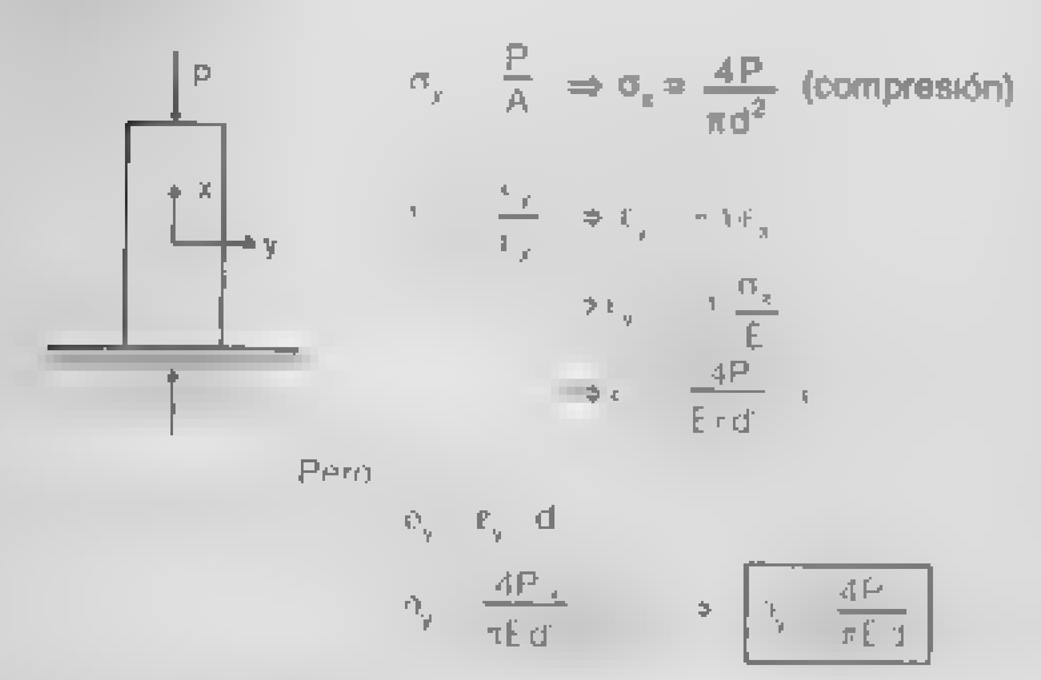
$$\delta = \frac{\rho g}{3E}\left[\frac{(x+L)^2 - x^2}{2} + \frac{d^3L^3}{(D-d)^3}\left(\frac{1}{x+L} - \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\delta = \frac{\rho g}{3E}\left[\frac{dL^2}{(D-d)} + \frac{L^2}{2} - \frac{d^2L^2}{(D-d)D}\right]$$

[illegible boxed result]

222. Un cilindro macizo de diámetro d soporta una carga axial P. Demostrar que la variación en su diámetro es 4 Pν/πEd.

Resolución:



$$\sigma_x = \frac{P}{A} \Rightarrow \sigma_x = \frac{4P}{\pi d^2} \text{ (compresión)}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = \nu\frac{\sigma_x}{E}$$

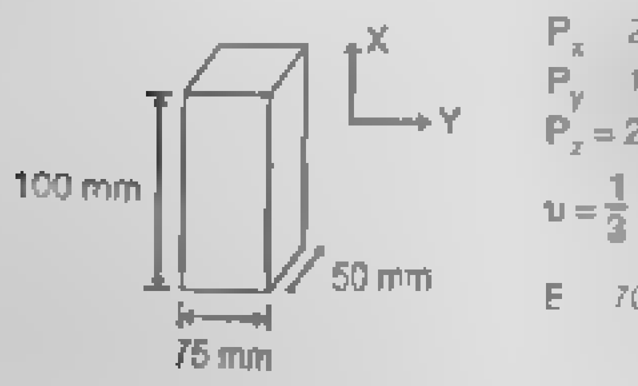
$$\Rightarrow \varepsilon_y = \frac{4P\nu}{E\pi d^2}$$

Pero

$$\delta_y = \varepsilon_y\, d$$

$$\delta_y = \frac{4P\nu}{\pi E d} \Rightarrow \boxed{\delta_y = \frac{4P\nu}{\pi E d}}$$

223. Un bloque rectangular de aluminio tiene 100 mm de longitud según la dirección X, 75 mm de ancho según la dirección Y y 50 mm de grueso en la dirección Z. Está sometido a tres fuerzas según tres direcciones. Una fuerza de tensión uniformemente distribuida de 200 kN en la dirección X y fuerzas de compresión uniformemente distribuidas de 160 y 220 kN según las direcciones Y y Z respectivamente. Si $\nu = \frac{1}{3}$ y E = 70 GPa determinar qué carga total uniformemente distribuida en la dirección X produciría la misma deformación transversal en la dirección Z que las cargas dadas.



$P_x = 200$ kN (tensión)
$P_y = 160$ kN (compresión)
$P_z = 220$ kN (compresión)
$\nu = \frac{1}{3}$ (aluminio)
$E = 70 \times 10^9$ Pa

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\sigma_x = \frac{200\times10^3\text{ N}}{(75\times50)\times10^{-6}\text{ m}^2} = 53{,}33 \text{ MPa } (+)$$

$$\sigma_y = \frac{160\times10^3\text{ N}}{(50\times100)\times10^{-6}\text{ m}^2} = 32 \text{ MPa } (-)$$

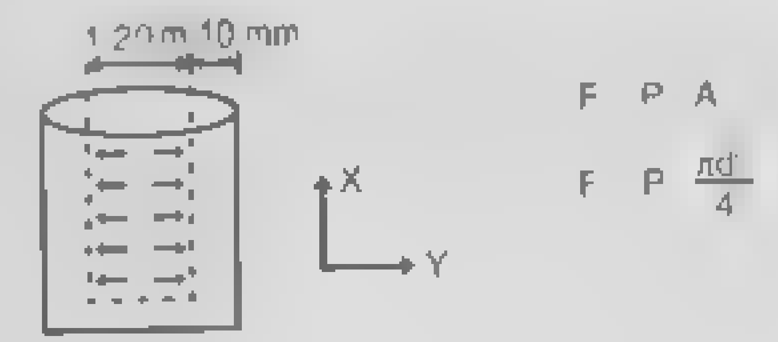
$$\sigma_z = \frac{220\times10^3\text{ N}}{(75\times100)\times10^{-6}\text{ m}^2} = 29{,}33 \text{ MPa } (-) \Rightarrow \varepsilon_z = -5{,}200\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x) \Rightarrow \frac{\varepsilon E A}{\nu} = P_x$$

$$P_x = \frac{(\ldots)(70\times10^{9})(75\times50)\times10^{-6}}{1/3} \Rightarrow \boxed{P_x = 409{,}97\text{ kN}}$$

224. Un tambor cilíndrico de acero construido de placa soldada de 10 mm, tiene un diámetro interior de 1,20 m. Calcular el aumento de diámetro bajo la acción de una presión interior de 1,5 MPa. Supónga que la relación de Poisson es 0,30 y E = 200 GPa.

Resolución



$$F = P\,A$$

$$F = P\,\frac{\pi d^2}{4}$$

$$F = 1{,}5\times10^6 \times \pi\frac{(1{,}2)^2}{4} \Rightarrow F = 1696{,}46 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_x = -\nu\cdot\frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{1}{3}\frac{(-1{,}5\times10^6)}{200\times10^3} \therefore \varepsilon_x = 2{,}5\times10^{-6}$$

$$\delta = \varepsilon L$$

$$\delta_x = \varepsilon_x\cdot d \Rightarrow \delta_x = 2{,}5\times10^{-6}\times 1200 \text{ mm} = 3\times10^{-3}\text{ mm} \qquad \boxed{\delta_x = 0{,}003\text{ mm}}$$

esfuerzo circunferencial en el tubo cuando se le aplica una fuerza axial de compresión de 10 kN. El coeficiente $\upsilon = 0{,}30$ y $E = 200\times10^9$ N/m². Desprec... posibilidad de pandeo en las paredes del tubo.

Resolución

$$\sigma_L = \frac{P.D}{2\sigma}$$

$$4(10\times10^3)$$

$$\sigma_y = 0.30\,(5092.958\times10^3) \Rightarrow \sigma \quad 1527.887 \text{ kPa}$$

$$\sigma_c = \frac{1527.887\times10^3\times0.05}{2\times0.02} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 1909.859 \text{ kPa}}$$

de diámetro y 3 mm de espesor. Se introduce sin holgura en un orificio de ...

ble y se somete a una presión interior de 4 MN/m². Con los valores $\upsilon = \frac{1}{4}$ y $E = 83\times10^3$ MN/m², determinar el esfuerzo circunferencial en el tubo.

Resolución:

$$F = \frac{\pi(0.08)^2}{4}\times 4\times10^6 \text{ N/m}^2 \Rightarrow F = 20.106 \text{ kN}$$

$$= \frac{20.106\times10^3\times0.15}{\dots} \Rightarrow \delta_y = 7{,}229\times10^{-6}$$

$$48.193\times10^{-6} \Rightarrow \sigma_y = 4\times10^6 \text{ N/m}^2$$

$16.0n4\times10$

... de aluminio de 200 mm de largo, cerrado en sus extremos, tiene 100 mm ... y una pared de 2 mm de espesor. Si el tubo cabe justamente entre ... rígidas con presión interna nula, determine los esfuerzos longitudina... ...ncial para una presión interna de 4,00 MN/m². Suponga $\upsilon = \frac{1}{3}$ y ... 10^9 N/m²

Resolución

... a anterior

$$q = -\frac{\dots}{2(1-\upsilon)t+d}$$

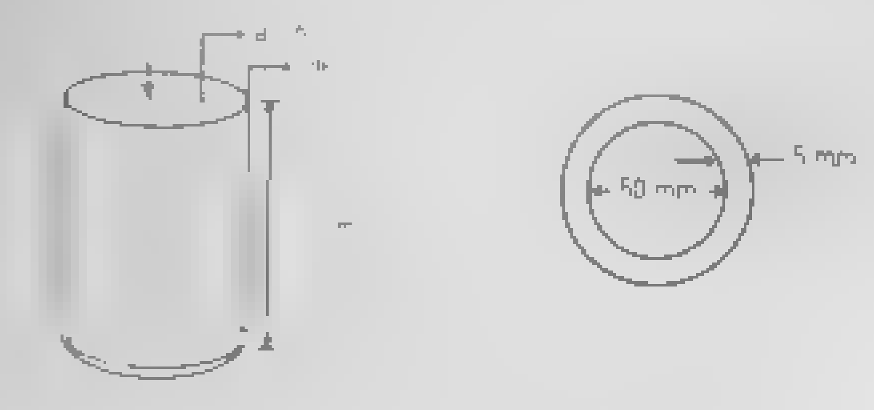
$$q = -\frac{2\times1/3\times4\times10^6\times0.002}{2(1-1/3)\times0.02+0.1} \Rightarrow q = -42\,105.28 \text{ N/m}^2 \therefore q = -0{,}042 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_t = \frac{-qd}{2t} \Rightarrow \sigma_t = \frac{0.042\times0.1}{2\times0.002} \quad \boxed{\sigma_t = 1{,}05 \text{ MN/m}}$$

230. 231. problemas ilustrativos

... de acero de 50 mm de diámetro y 2 m de longitud se envuelve con un ... de hierro fundido de 5 mm de espesor. Calcular la fuerza de compresión que es preciso aplicar para producir un acortamiento de 1 mm en la longitud ... m de la barra compuesta. Para el acero, $E = 200\times10^9$ N/m², y para el hierro $E = 100\times10^9$ N/m²

Resolución



La fuerza P de compresión, será la suma de las fuerzas que soporta el nucleo de acero y el tubo de hierro

$$P = P_a + P_h$$

P_a: fuerza que soporta el nucleo de acero
P_h: fuerza que soporta el tubo de hierro
Como ambos tienen una compresión de 1 mm, así: $\delta_a = \delta_h$ = 1 mm = 0,001 m
Por lo tanto:

$$\delta_a = \frac{P_a L}{E_a A_a} = \frac{P_a(2m)}{(200\times10^9 N/m^2)\left(\frac{\pi}{4}\right)(0.05)^2} = 0.001\ m$$

$$\Rightarrow P_a = 196{,}35\ kN \quad \ldots(1)$$

$$\delta_h = \frac{P_h L}{E_h A_h} = \frac{P_h(2m)}{(100\times10^9 N/m^2)\left(\frac{\pi}{4}\right)([illegible] - 0.05^2)} = 0.001\ m$$

$$\Rightarrow P_h = 43{,}19\ kN \quad \ldots(2)$$

Así $P = (196{,}35 + 43{,}19)$ kN = 239,54 kN $\boxed{P = [illegible]\ kN}$

233. Una columna de concreto armado de 250 mm de diámetro se diseña para soportar una fuerza axial de compresión de 400 kN. Si el esfuerzo [illegible] en el concreto es de 6 MPa y en el acero de 120 MPa, determinar la sección de refuerzo de acero que se necesitará. E_c = 14 GPa y E_a = 200 GPa

Resolución:

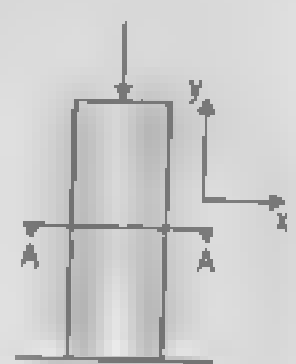
Equilibrio en el eje y

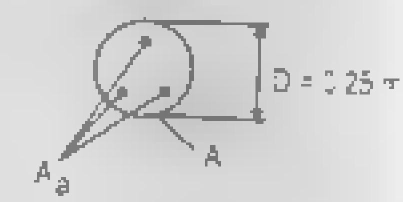
$P_a + P_c = P$ o $A_a\sigma_a + A_c\sigma_c = P$
o
$A_a\sigma_a + (A - A_a)\sigma_c = P$ ...(1)

Compatibilidad de deformaciones: $\delta_a = \delta_c$

$$\frac{P_a L}{A_a E_a} = \frac{P_c L}{A_c E_c} \Rightarrow \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

$$\frac{\sigma_a}{200\times10^9} = \frac{\sigma_c}{14\times10^9} \Rightarrow \sigma_c = 0.07\sigma_a \quad \ldots(2)$$





De la ecuación (2), cuando $\sigma_a = \sigma_a^{adm}$

$$\sigma_c = 0.07\ \sigma_a^{adm} = 0.07 \times 120 \times 10^6\ Pa$$

$$\sigma_c = 8.4 \times 10^6\ Pa > \sigma_c^{adm}$$

Esto quiere decir que el primero que llega a su esfuerzo admisible es el concreto. Por lo que

$$\sigma_c = \sigma_c^{adm} = 6\times10^6\ Pa \Rightarrow \sigma_a = \frac{\sigma_c}{0.07} = \frac{\sigma_c^{adm}}{0.07} = 85{,}7\times10^6\ Pa$$

En la ecuación (1)

$$A_a \times 85{,}7 \times 10^6 + (A - A_a) \times 6 \times 10^6 = 400 \times 10^3$$

donde:

$$A = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi}{4}(0.25)^2 = 0.0491\ m^2$$

$$A_a \times 85{,}7 \times 10^3 + (0.0491 - A_a) \times 6 \times 10^3 = 400$$

$$A_a = 1{,}322 \times 10^{-3}\ m^2 \quad \therefore \boxed{A_a = 1322\ mm^2}$$

234. Una columna de madera de sección 250 × 250 mm se refuerza mediante placas de acero de 250 mm de ancho y espesor t, en sus cuatro caras laterales. Determinar el espesor de las placas de manera que el conjunto pueda soportar una carga axial de 120 kN sin que se excedan los esfuerzos admisibles de 8 MN/m² en la madera y de 140 MN/m² en el acero. Los módulos elásticos son E_m = 10 × 10³ MN/m² y E_a = 200 × 10³ MN/m².

Resolución

Equilibrio en el eje Y: $P_m + P_a = P$
o: $A_m\sigma_m + A_a\sigma_a = P$ (1)

Compatibilidad de deformaciones: $\delta_a = \delta_m$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_a}{E_a} \Rightarrow \frac{\sigma_m}{10\times10^9} = \frac{\sigma_a}{200\times10^9}$$

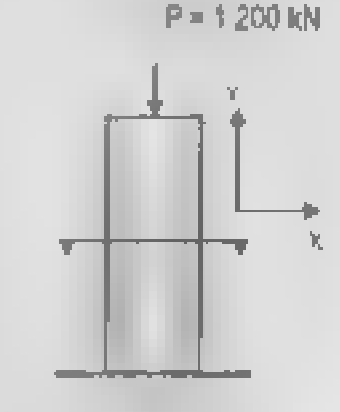
$$\Rightarrow \sigma_a = 20\sigma_m \quad \ldots(2)$$

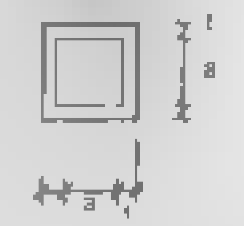
Si $\sigma_a = \sigma_a^{adm} = 140\times10^6\ Pa$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{\sigma_a}{20} \Rightarrow \sigma_m = 7\times10^6 Pa < \sigma_m^{adm}$$

$$\sigma_a = \sigma_a^{adm} = 140\times10^6\ Pa$$

$$\sigma_m = 7 \times 10^6\ Pa$$





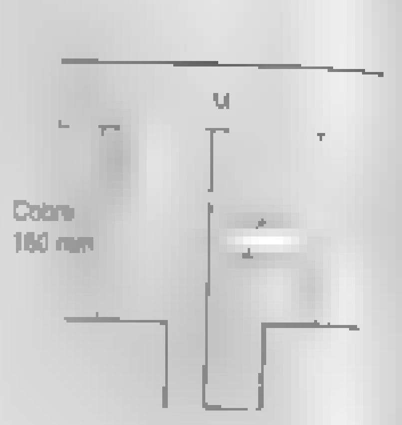
En (1), con $A_m = 250^2 \times 10^{-6}\ m^2 = a^2$

$\Rightarrow\ A_{total} = A_m + A_a = 67\ 946.4\ mm^2$

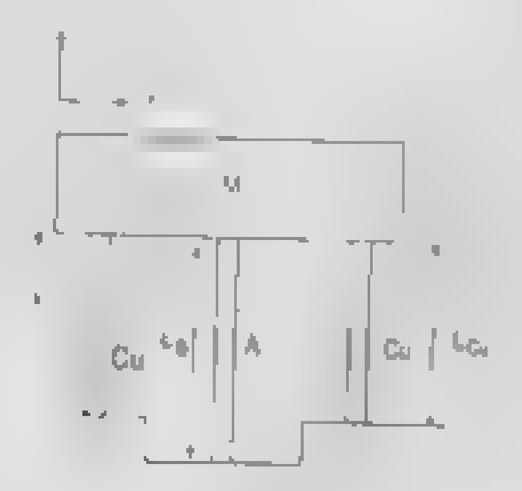
$A_{total} = (250 + 2t)^2$

$\Rightarrow\ (250 + 2t)^2 = 67\ 946.4\ mm^2 \quad \therefore$ $\boxed{t = 5.33\ mm}$

235 Un bloque completamente rígido de masa M se apoya en tres varillas situadas en un mismo plano, como indica la figura. Las varillas de cobre tienen una sección de 900 mm², E = 120 GPa, y esfuerzo admisible de 70 MPa. La varilla de acero tiene una sección de 1200 mm², E = 200 GPa, y el esfuerzo admisible es 140 MPa. Calcular el máximo valor de M.



Resolución.



Compatibilidad de deformación

$$\frac{\sigma_a \times 0.24\ m}{200 \times 10^9 Pa} = \frac{\sigma_{Cu} \times 0.16\ m}{120 \times 10^9 Pa}$$

Si $\sigma_a = \sigma_a^{adm} = 140 \times 10^6$ Pa en (1)

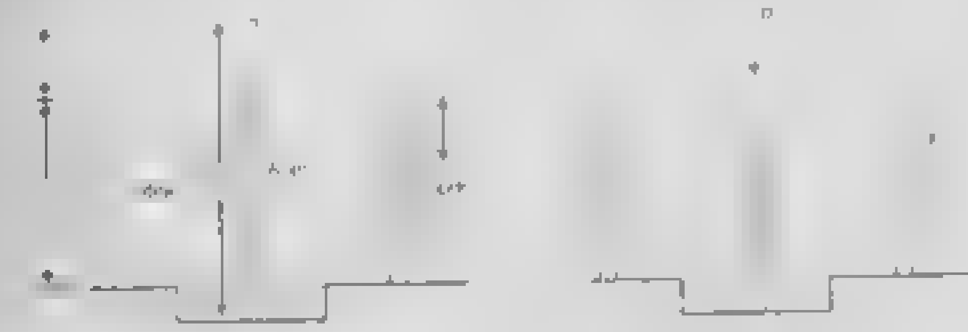
$\sigma_{Cu} = 0.9 \times 140 \times 10^6\ Pa = 126 \times 10^6\ Pa > \sigma_{Cu}^{adm}$

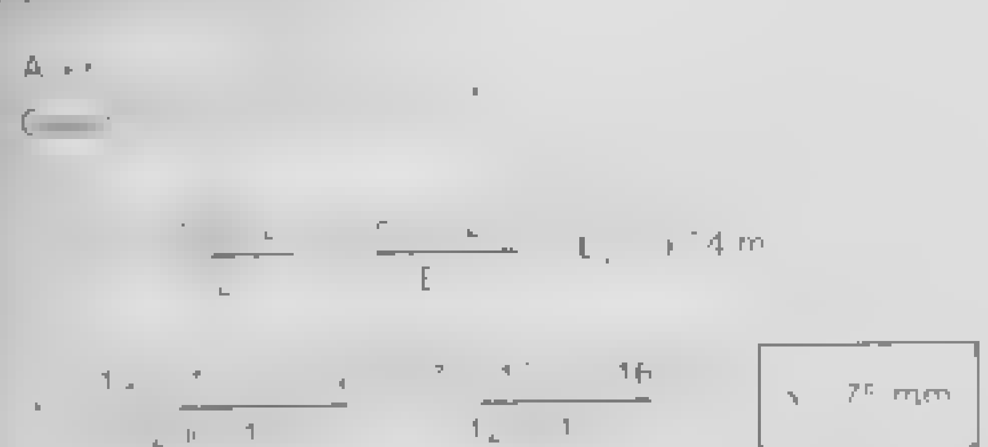
$\sigma_{Cu} = \sigma_{Cu}^{adm} = 70 \times 10^6\ Pa \Rightarrow \sigma_a = \dfrac{\sigma_{Cu}}{0.9} = 77.8 \times 10^6\ Pa$

$\times (900 \times 10^{-6}\ m^2) \times (70 \times 10^6) + (1200 \times 10^{-6}\ m^2) \times (140 \times 10^6) = M$

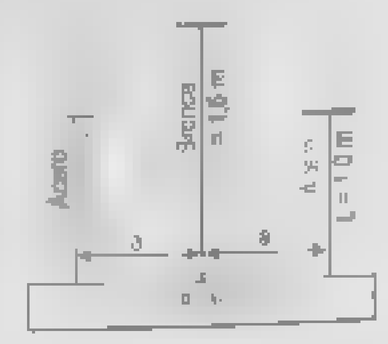
... 235, ¿qué variación ha de tener la longitud de la varilla de acero ... las tres varillas trabajen a su máximo esfuerzo admisible?

Resolución.

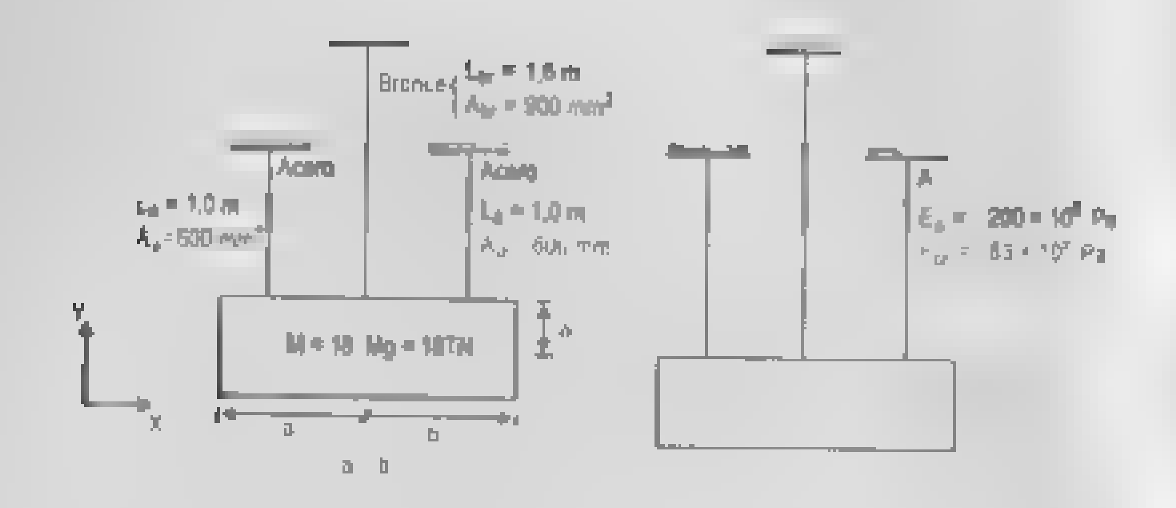




... extremos inferiores de las barras de la figura están ... el mismo nivel antes de colgar de ellas un bloque rígido de masa 18 Mg. Las barras de acero tienen una sección de 600 mm² y E = 200 GN/m². La barra de bronce ... una sección de 900 mm² y E = 83 GN/m². Determinar el esfuerzo en las tres barras.



Resolucion



Compatibilidad de deformación. $\delta_a = \delta_{br} = \delta$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma_a L_a}{E_a} = \frac{\sigma_{br} L_{br}}{E_{br}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_a \; 1{,}0}{200 \times 10^9} = \frac{\sigma_{br} \; 1{,}6}{83 \times 10^9}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{br} = 0{,}26\sigma_a \qquad \ldots(1)$$

Equilibrio en el eje Y: $2P_a + P_{br} = M$

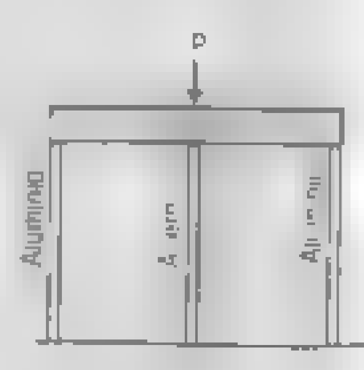
$$2 \times \sigma_a A_a + \sigma_{br} A_{br} = M \quad \Rightarrow \quad 2\sigma_a A_a + 0{,}26\,\sigma_a A_{br} = M$$

$$\sigma_a[(2 \times 600 \times 10^{-6}\ m^2) + (0{,}26 \times 900 \times 10^{-6}\ m^2)] = 18 \times 10^3\ kg \times 9{,}81$$

$$\boxed{\sigma_a = 123{,}1\ MPa}$$

En (1) $\boxed{\sigma_{br} = [illegible]\ MPa}$

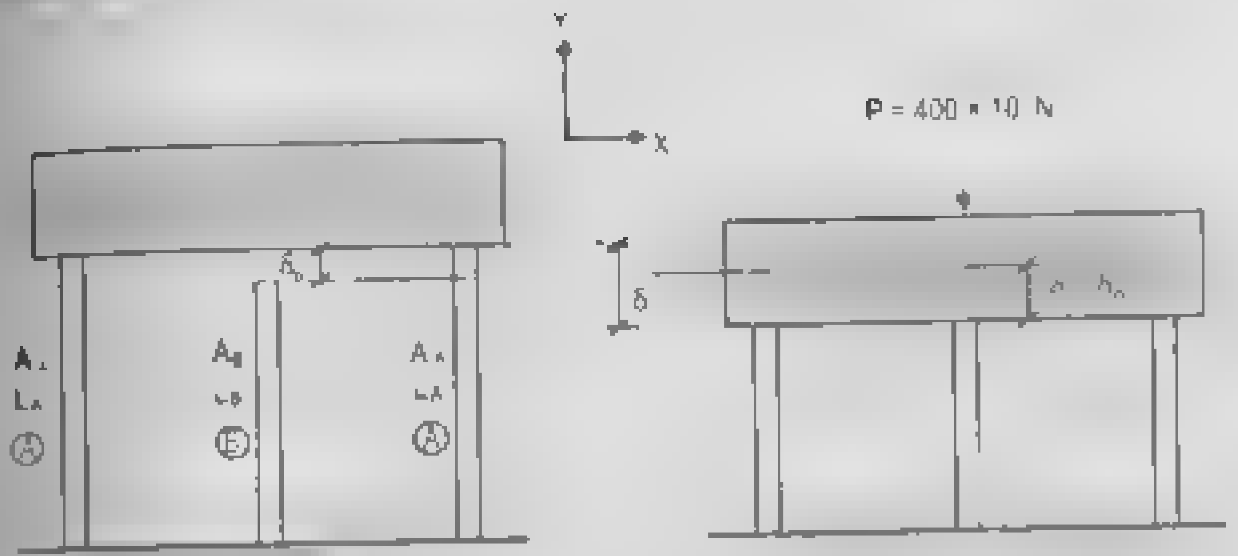
238. La plataforma rígida de la figura tiene una masa despreciable y descansa sobre dos barras de aluminio, cada una de 250.00 mm de longitud. La barra central es de acero y tiene una longitud de 249.90 mm. Calcule el esfuerzo en la barra de acero una vez que la carga central P de 400 kN se haya aplicado. Cada barra de aluminio tiene un área de 120 mm² y un módulo E de 70 GPa. La barra de acero tiene un área de 2400 mm² y un módulo E de 200 GPa.



Resolucion

A [illegible] barra A

A [illegible] barra B



Equilibrio en el eje Y: $2P_A + P_B = P$

$$2A_A\sigma_A + A_B\sigma_B = P \quad \Rightarrow \quad 2 \times (120 \times 10^{-6})\sigma_A + (2400 \times 10^{-6})\sigma_B = 400 \times 10^3 \qquad \ldots(1)$$

Compatibilidad de deformación: δ

Barra A: $\delta = \frac{\sigma_A L_A}{E_A}$ barra (B) $\delta - \delta_0 = \frac{\sigma_B L_B}{E_B}$

[illegible]

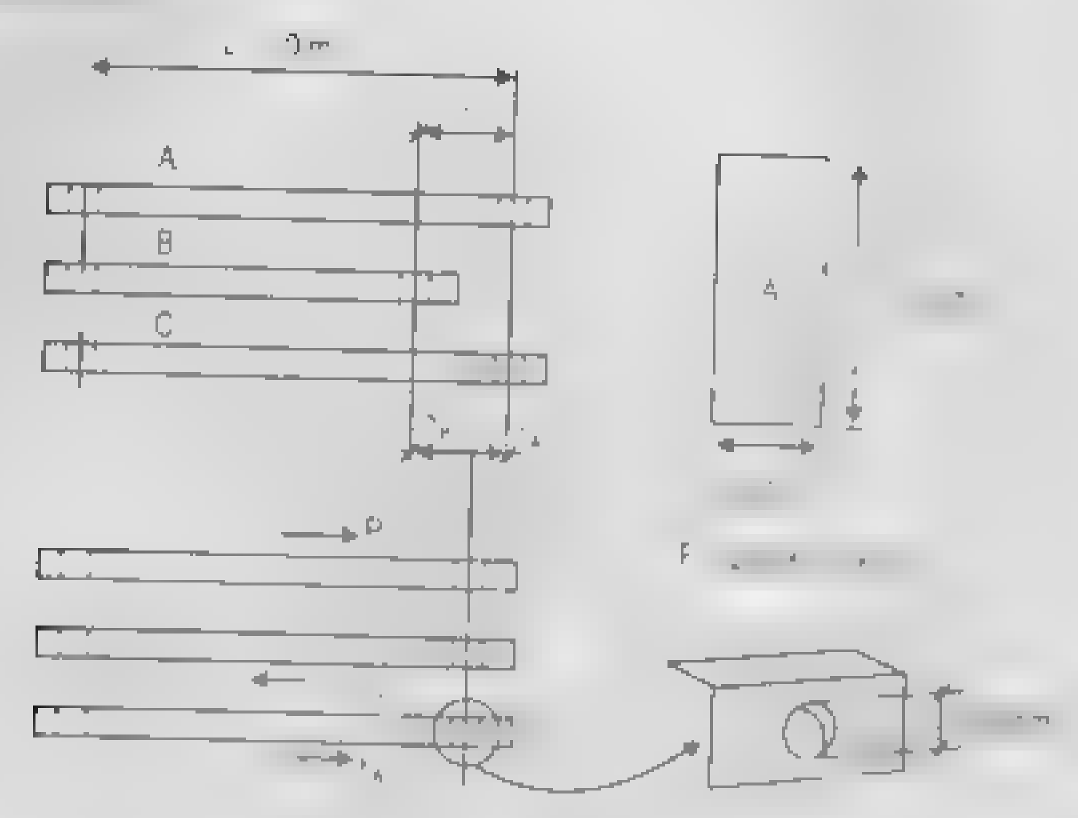
$$\frac{\sigma_A}{70 \times 10^9} - \frac{\sigma_B}{200 \times 10^9} = \frac{0{,}1}{250} \qquad \ldots(2)$$

De (1) y (2):

$$\boxed{\sigma_A = 56{,}39 \times 10^6\ Pa} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_B = 161{,}03 \times 10^6\ Pa}$$

239. Tres barras de acero de secciones iguales de 100 × 25 mm han de unirse mediante pasadores rígidos de 20 mm de diámetro que las atravesarán por unos orificios realizados en los extremos de las barras. La distancia entre centros de orificios es de 10 m en las dos barras laterales o exteriores, pero es 1,25 mm más corta en la barra central. Determinar el esfuerzo cortante en los pasadores despreciando la deformación local en los orificios.

Resolucion



Compatibi dad de deformaciones

Del gráfico: $\delta_A + \delta_B = \delta \Rightarrow \sigma_A \frac{L}{E} + \sigma_B \frac{L}{E} = \delta$ ...(2)

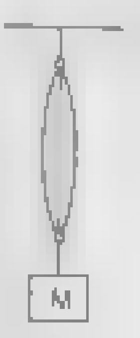
De (1) y (2)

$A = 25 \times 100 = 2500\ mm^2 \Rightarrow P_A = \sigma_A A \Rightarrow P_A = 20.83\ kN$

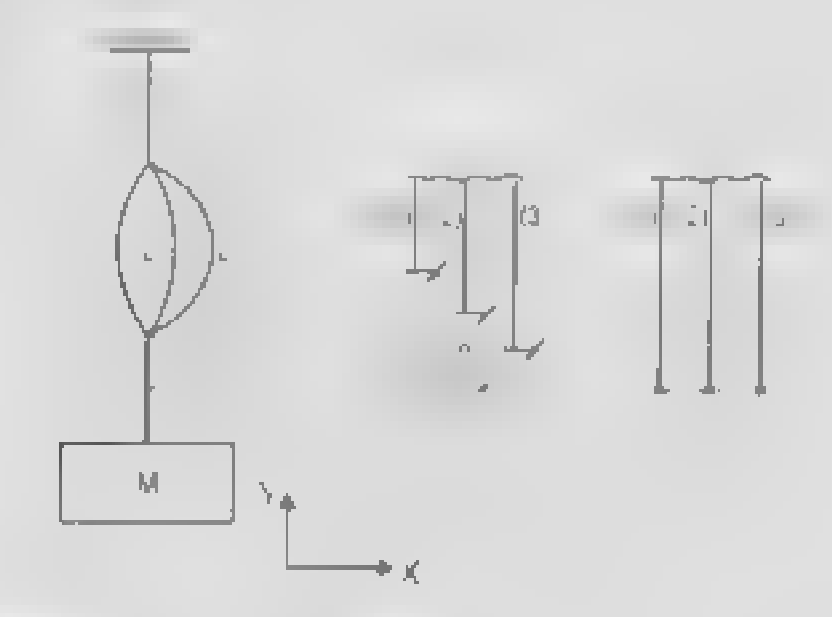
Area del orificio:

$\tau = \frac{P_A}{A} = \frac{20.83 \times 10^3\ N}{314\ ...}$

... o indica la figura, tres alambres de acero de 30 mm² de sec- ... cada uno soportan una carga de masa M. Las longitudes in- ... de los alambres son 19,994 m, 19 997 m y 20,000 m. (a) ¿Cuál es el esfuerzo en el alambre más largo, si M = 600 kg? ... Si M = 200 kg, determinar el esfuerzo en el alambre más corto ... E = 200 GN/m²



Resolucion



E ... Y: P + P + P = M

Como $\delta = \frac{PL}{EA} \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = M\left(\frac{L}{EA}\right)$ ...(1)

Compatibilidad de deformaciones

... 2

$\delta_2 = \delta_3 + (L_3 - L_2)$ ...(3)

De (1), (2) y (3): $\delta_3 = \frac{\frac{ML}{EA} - \left[(L_3 - L_1) + (L_2 - L_1)\right]}{3}$ (*)

i. Para. M = 600 kg = 600 × 9.81 N = 5886 N

$\delta = \frac{\frac{5.886 \times 10^3 N \times 20\ m}{...} - (6 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3})}{3}$

$9.54 \times 10^{-3}\ m = 9.54\ mm$

Reemplazando en las ecuaciones (2) y (3)

$\delta_1 = 6.54$ mm

$\delta_2 = 3.54$ mm > 0

Como: $\sigma = \delta\frac{E}{L}$ ⇒ $\boxed{\sigma_1 = 95.4 \text{ MPa}}$

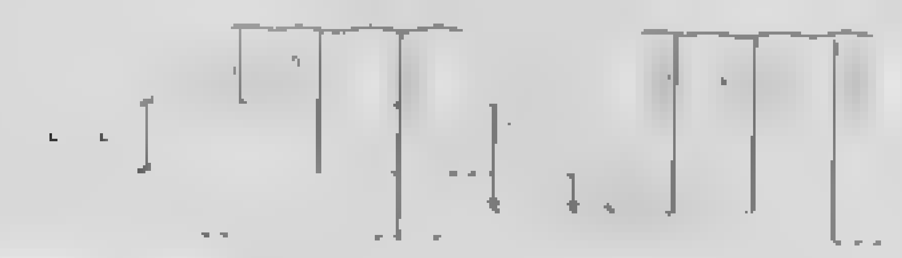
$\boxed{\sigma_2 = 65.4 \text{ MPa}}$

$\boxed{\sigma_3 = 35.4 \text{ MPa}}$

I. Para M = 200 kg = 1962 N

En la ecuación (*) $\delta_3 = -8.2 \times 10^{-4}$ m

Pero este valor es incoherente. Lo que realmente sucede es que el cable (3) no se deforma. $\delta_3 = 0$



$\ldots + d_2$ ...(1)

Por equilibrio $P_1 + P_2 = M$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M}{A} \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = \frac{ML}{EA} \quad \ldots(2)$$

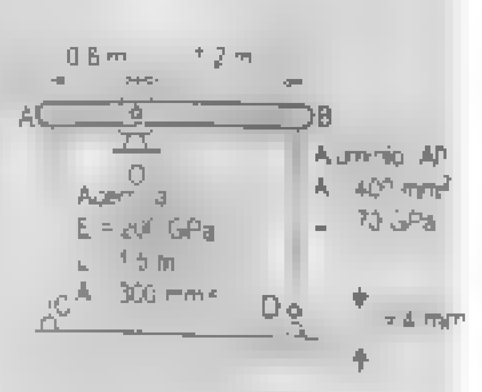
Con: $(L_2 - L_1) = 3 \times 10^{-3}$m , M = 1962 N

Se resuelven (1) y (2)

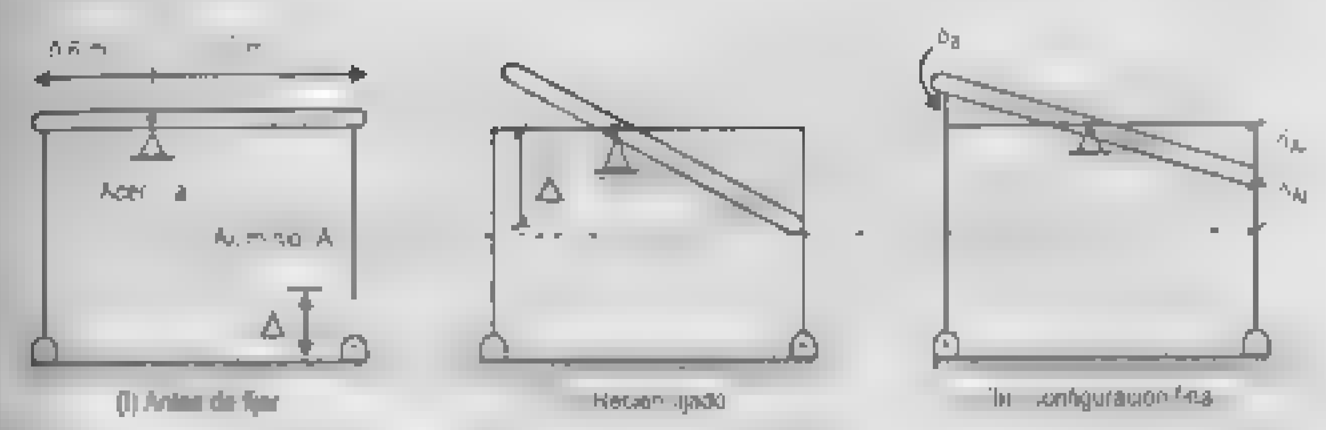
$\delta_1 = 4.77$ mm ⇒ $\boxed{\sigma_1 = \delta_1 (E/L) = 47.7 \times 10^6 \text{ Pa}}$

$\delta_2 = 1.77$ mm ⇒ $\boxed{\sigma_2 = \delta_2 (E/L) = 17.7 \times 10^6 \text{ Pa}}$

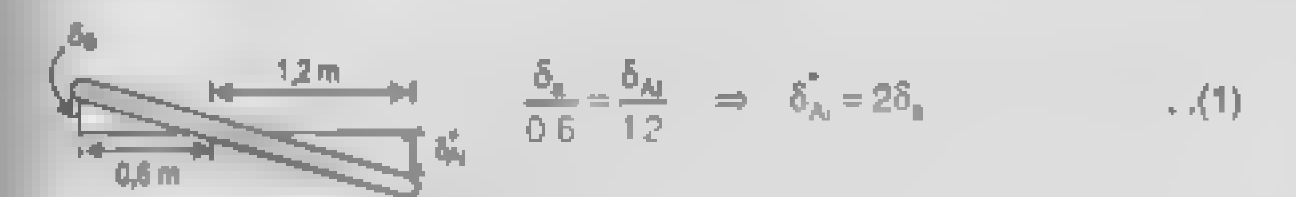
241 El conjunto de la figura consiste de una barra rígida AB, de masa despreciable, articulada en O mediante un perno y fija a las varillas de aluminio y de acero. En la configuración mostrada la barra AB está en posición horizontal y hay un claro Δ = 4 mm entre la punta inferior de la varilla de aluminio y su articulación en D. Calcule el esfuerzo en la varilla de acero cuando la punta inferior de la varilla de aluminio se articula en el apoyo D.



Resolución:



De (III)

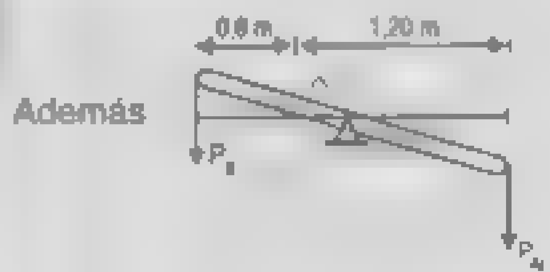


$$\frac{\delta_a}{0.6} = \frac{\delta_{Al}}{1.2} \Rightarrow \delta_{Al}^* = 2\delta_a \quad \ldots(1)$$

Pero: $\delta_{Al}^* + \delta_{Al} = \Delta \Rightarrow \delta_{Al}^* = \Delta - \delta_{Al}$ ...(2)

(2) en (1): $2\delta_a + \delta_{Al} = \Delta$, $\delta = \frac{\sigma L}{E}$ ⇒ $\frac{\sigma_a}{E_a} + \frac{\sigma_{Al}}{2E_A} = \frac{\Delta}{2L}$ ...(*)

Además



$\sum M_O = 0$ ⊕ $1.20 \times P_A - 0.6 P_a = 0$

$$\Rightarrow 2P_{Al} = P_a \Rightarrow \frac{2P_{Al}}{A_a A_A} = \frac{P_a}{A_a A_{Al}}$$

$$\frac{2\sigma_A}{A_a} = \frac{\sigma_a}{A_A} \Rightarrow \frac{\sigma_a}{A_A} - \frac{2\sigma_A}{A_a} = 0 \quad (**)$$

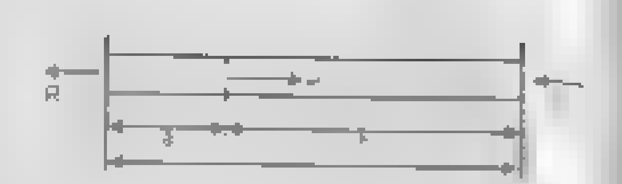
Con: $\Delta = 4 \times 10^{-3}$ m

$A_a = 300 \times 10^{-6}$ m², $E_a = 200 \times 10^9$ Pa

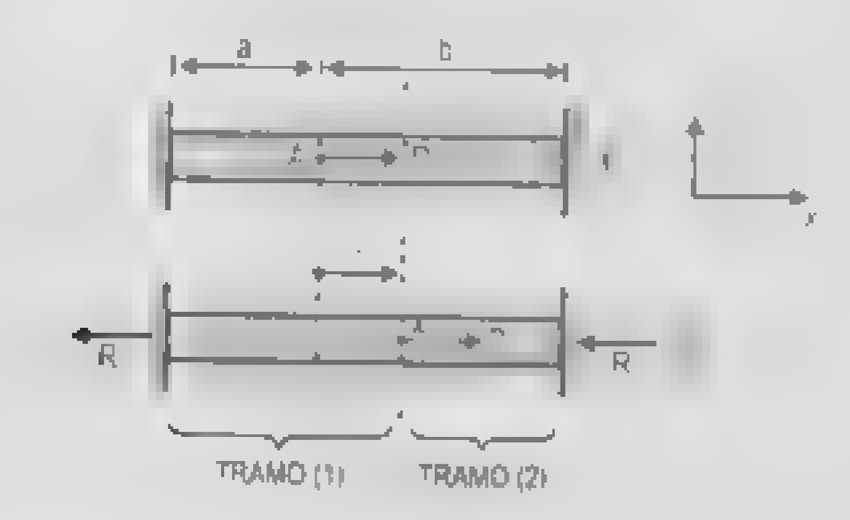
$A_{Al} = 400 \times 10^{-6}$ m², $E_{Al} = 70 \times 10^9$ Pa

Se resuelven: (*) y (**): $\sigma_a = 173.6$ MPa ⇒ $\boxed{\sigma_{Al} = 65.1 \text{ MPa}}$

242 Una varilla homogénea de sección constante se empotra en sus extremos en soportes indeformables. Soporta una carga axial P aplicada, como indica la figura. Demostrar que las reacciones vienen dadas por $R_1 = Pb/L$ y $R_2 = Pa/L$. Obsérvese que estas reacciones son análogas a las de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada transversal aplicada en el mismo punto.



Resolución:



De (II)

TRAMO (1): R₁ A P

TRAMO (2): A P R

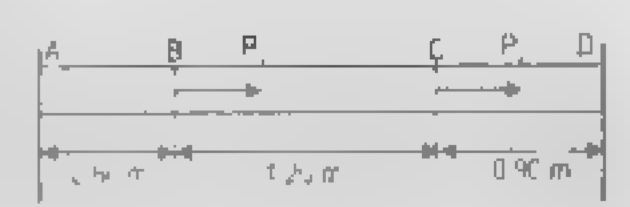
(1), (2)

Equilibrio es el eje X: $R_1 + R_2 = P$

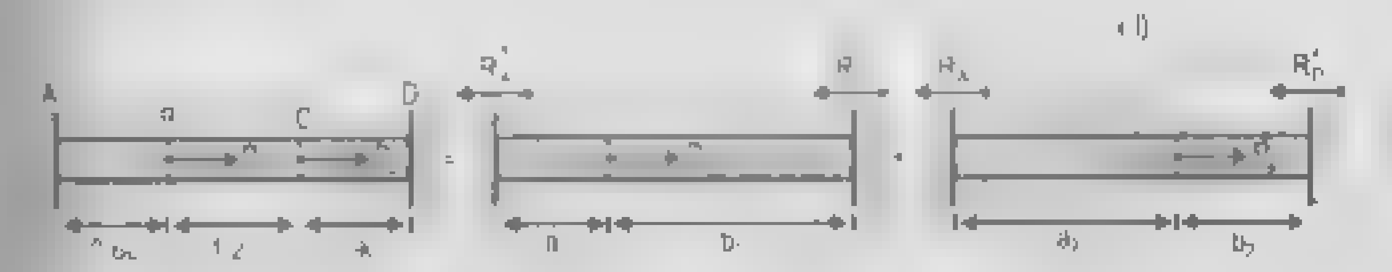
De

$R_1 = Pb / L$

243 Una barra homogénea de sección constante igual a 500 mm² se empotra en sus extremos en soportes rígidos. Se somete a la acción de las fuerzas axiales $P_1 = 25$ kN y $P_2 = 50$ kN, aplicadas como indica la figura. Determinar el esfuerzo en el segmento BC. *Indicación:* aprovechar el resultado del problema anterior y emplear el método de superposición.



Resolución:



Del problema anterior

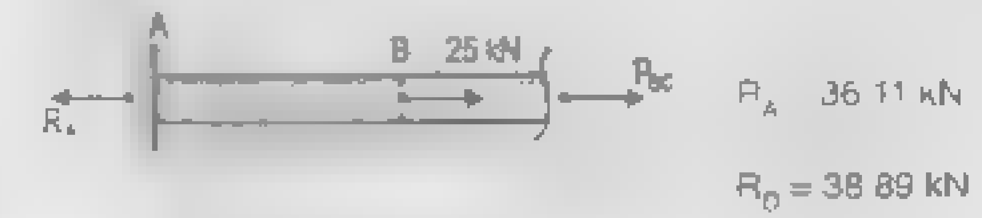
(I) $R_A^1 = P_1 b_1 1/L$, $R_D^1 = P_1 a_1 /L$

(II): $R_A^2 = P_2 b_2 /L$, $R_D^2 = P_2 a_2 /L$

Por lo que

$R_A = R_A^1 + R_A^2 \Rightarrow R_A = \frac{1}{L} P_1 b_1 \ldots$ $\frac{1}{L} P a_1 + P a_2$

Reemplazando valores



R_A 36.11 kN

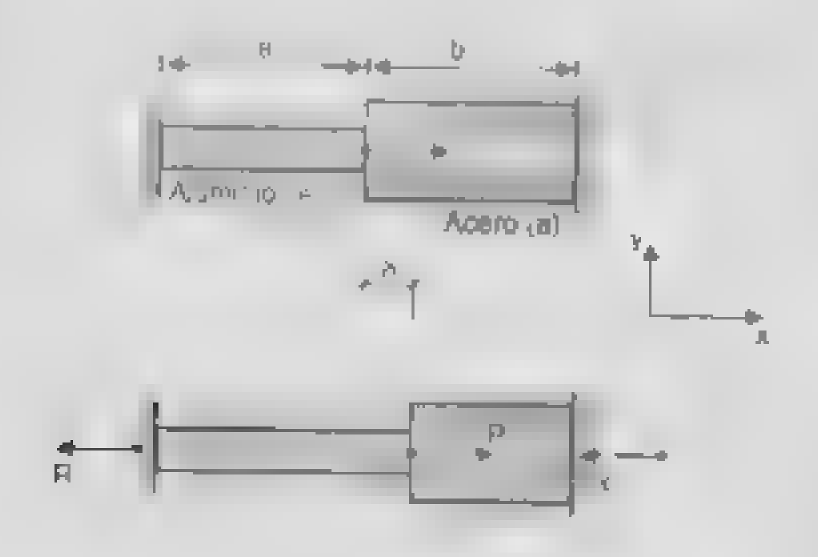
$R_D = 38.89$ kN

$P_{BC} + 25\text{ kN} = R_A \Rightarrow P_{BC} = 11{,}11\text{ kN}$

$A = 500\text{ mm}^2 \Rightarrow \sigma_{BC} = \dfrac{P_{BC}}{A}$ $\boxed{\sigma_{BC} = 22{,}22\text{ MPa}}$

244 La barra representada en la figura está firmemente empotrada en sus extremos. Determinar los esfuerzos en cada material cuando se aplica la fuerza axial P = 200 kN.

Resolución:



Compatibilidad de deformación: $d = d_{Al} = d$

$$\frac{R_1 a}{E_{Al}A_{Al}} = \frac{R_2 b}{E_a A_a} \Rightarrow \frac{R_1 \times 0{,}20\text{m}}{(70\times10^9\text{Pa})(900)} = \frac{R_2\times0{,}30\text{m}}{(200\times10^9\text{Pa})(1200)}$$

$R_1 = 0{,}394\ R_2$ ...(1)

Equilibrio en el eje x: $R_1 + R_2 = P$ ...(2)

De (1) y (2)

$R_1 = 56{,}50\text{ kN} \wedge R_2 = 143{,}50\text{ kN}$

$\sigma_{Al} = R_1/A_{Al} \Rightarrow \boxed{\sigma_{Al} = 62{,}78\text{ MPa}}$

$\sigma_a = R_2/A_a \Rightarrow \boxed{\sigma_a = 119{,}58\text{ MPa}}$

En el problema anterior, ¿qué fuerza máxima P puede aplicarse sin que se sobrepasen los esfuerzos admisibles de 70 MPa en el aluminio y de 120 MPa en el acero? ¿Se puede aplicar una fuerza mayor si se modifica la longitud de la varilla de aluminio permaneciendo constante la de acero? En caso afirmativo, determinar la nueva longitud de aquella.

Resolución

I. Fuerza máxima P

Las deformaciones se mantienen iguales: $\delta_{Al} = \delta_a$

[illegible]

$\sigma_{Al} = \dots 0{,}525\ \ 133{,}3\text{ MPa} > \dots$

Esto quiere decir que el primero que alcanzará el esfuerzo admisible será el acero

$\sigma_{Al} = 0{,}525\,\sigma_a = 0{,}525\,\sigma_a^{adm} \Rightarrow \sigma_{Al} = 63\text{ MPa}$

$\sigma_a = 120\text{ MPa}$

Además $R_1 + R_2 = P$ [illegible]

Reemplazando valores $\boxed{P = 200{,}7\text{ kN}}$

II. Fuerza mayor, variando la longitud

[illegible] ...(1)

Además [illegible]

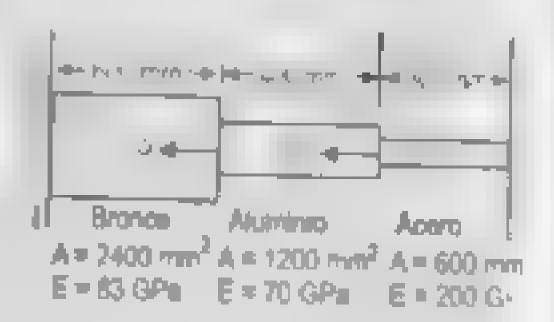
P' será máximo cuando $\sigma_{Al} = \sigma_{Al}^{adm} = 70\text{ MPa}$

$\sigma_a = \sigma_a^{adm} = 120\text{ MPa}$

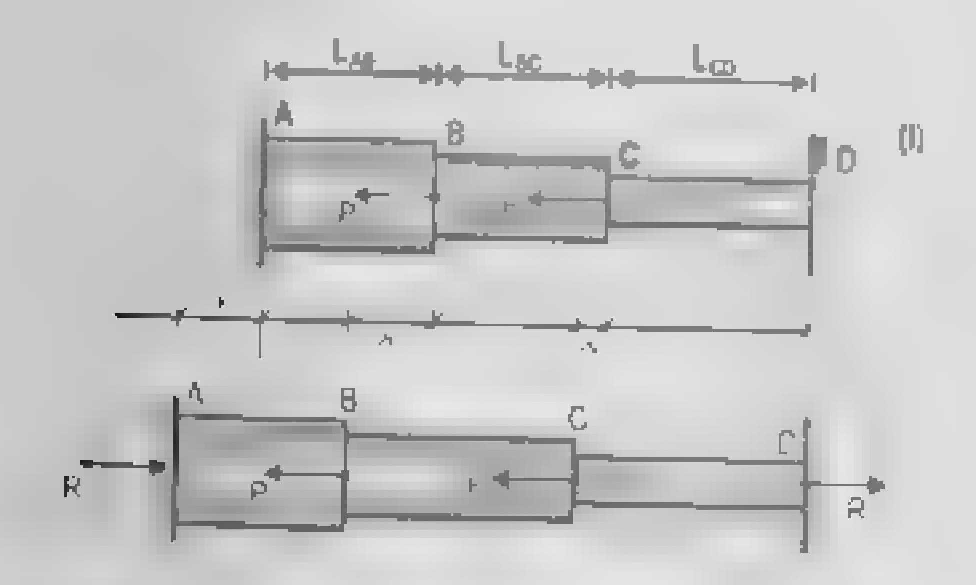
Reemplazando en (2) $\boxed{P = 207{,}0\ \text{kN}}$

Esto ocurre cuando: a $= \dfrac{120\ \text{MPa}}{70\ \text{MPa}}\left(\dfrac{70\times10^9}{200\times10^9}\right)\times 0{,}30$ $\boxed{a = 0{,}18\ \text{m}}$

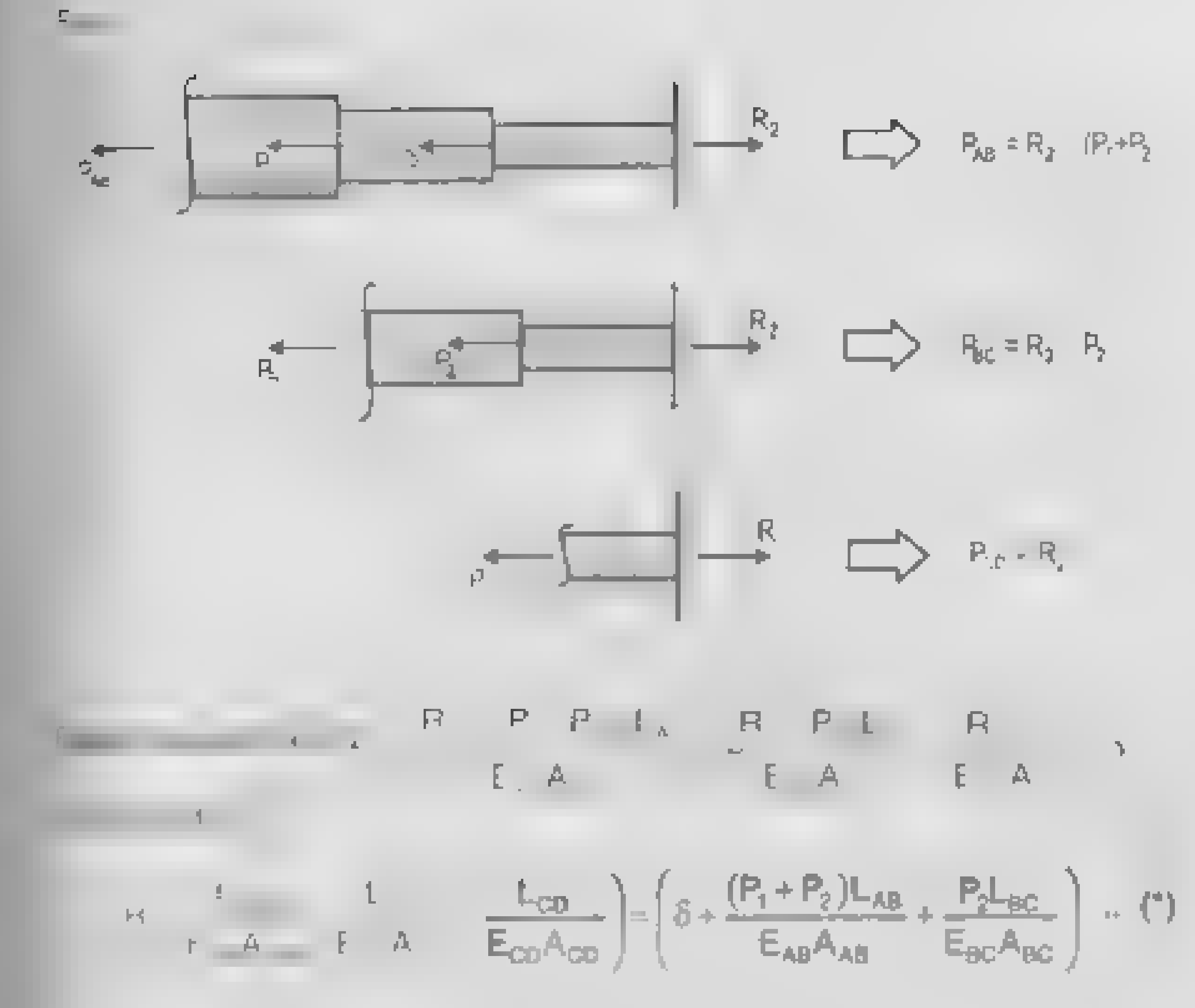
246 Una varilla está formada de tres partes distintas, como indica la figura y soporta unas fuerzas axiales $P_1 = 120$ kN y $P_2 = 50$ kN. Determinar los esfuerzos en cada material si los extremos están firmemente empotrados en unos muros rígidos e indeformables.



Resolución:



$$\frac{\sigma L}{E} \Rightarrow \frac{\sigma_{AB}L_{AB}}{E_{AB}} + \frac{\sigma_{BC}L_{BC}}{E} + \frac{\sigma_{CD}L_{CD}}{E} = \delta \quad \text{.. (2)}$$



$$\left(\frac{L_{CD}}{E_{CD}A_{CD}}\right) = \left(\delta + \frac{(P_1+P_2)L_{AB}}{E_{AB}A_{AB}} + \frac{P_2L_{BC}}{E_{BC}A_{BC}}\right) \quad \text{.. (*)}$$

Para este problema: $\delta = 0$

Al reemplazar valores se tiene: $R_2 = 73{,}01$ kN

Además: $R_1 + R_2 = P_1 + P_2 \Rightarrow R = 96{,}99$ kN

$\Rightarrow P_{AB} = R_2 - (P_1 + P_2) = -96{,}99$ kN (Compresión)

$P_{BC} = R_2 - P_2 = +23{,}01$ kN (Tracción)

$P_{CD} = R_2 = +73{,}01$ kN (Tracción)

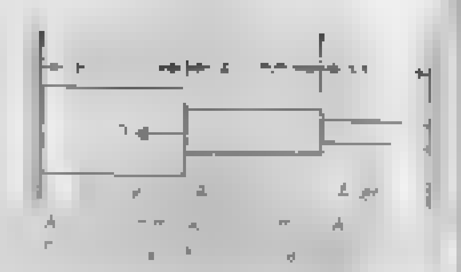
Dividiendo a cada fuerza por su respectiva área.

$\boxed{\sigma_{AB} = 40{,}41\ \text{MPa}}$ (Compresión)

$\boxed{\sigma_{BC} = 19{,}18\ \text{MPa}}$ (Tracción)

$\boxed{\ \ldots\ 121{,}70\ \text{MPa}}$ (Tracción)

247 Resolver el problema anterior si los muros ceden separándose 0,60 mm, al aplicar las fuerzas dadas



Resolucion

Reemplazando en la ecuación (*) del problema anterior: $R_2 = 131.41$ kN

Como. $R_1 + R_2 = P_1 + P_2 \Rightarrow R_1 = 38\ 59$ kN (compresión)

También

P_{AB} R $(P_1 + P_2) = -38.59$ kN (Compresión)

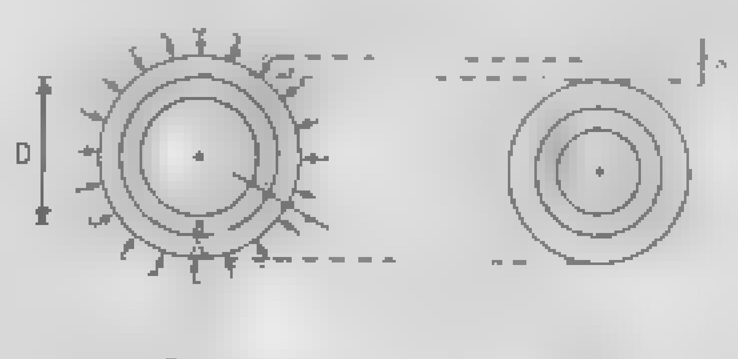
$P_{BC} = R_2 - P_2 = 81{,}41$ kN (Tracción)

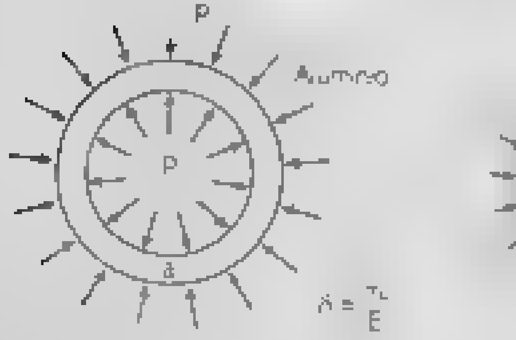
P R 131 41 kN (Tracción)

[illegible] $\sigma_{CD} = 219.02$ MPa

248. Un tubo de acero de 2 5 mm de espesor ajusta exactamente dentro de otro aluminio del mismo espesor Si el diámetro de contacto es de 100 mm, determinar la presión de contacto y los esfuerzos circunferenciales si se somete el tubo de aluminio a una presión exterior de $P = 4$ MN/m² $E_s = 200 \times 10^9$ N/m² $E_{Al} = 70 \times 10^9$ N/m²

Resolución:



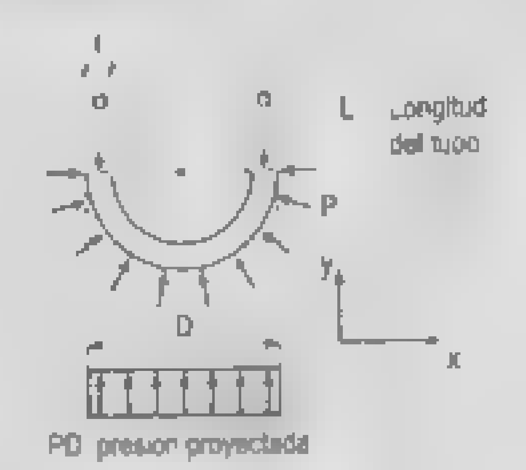


$\frac{P \quad P}{E} D$ (1) $\frac{P}{E} D$ (2)

(1) (2) P P $\frac{D}{E}$ $\frac{P}{E} D$

P $\frac{E}{E \quad E}$ P [illegible] 4 MPa $\boxed{P_c = 2.96 \text{ MPa}}$

Ademas



Por equilibrio de fuerzas en el eje y

$PDL = 2\sigma \times t \times L \Rightarrow \sigma = \frac{PD}{2t}$

i. **Aluminio:** $\sigma_{Al} = (P - P_c) \times \frac{D}{2t} = \frac{(4 - 2{,}96) \times 10^6 \times 0{,}1}{2 \times 2{,}5 \times 10^{-3}}$ $\boxed{\sigma_{Al} = 20{,}8 \text{ MPa}}$

ii. **Acero:** σ $P \frac{D}{2t} = \frac{2{,}96 \times 10^6 \times 0{,}1}{2 \times 2{,}5 \times 10^{-3}}$ $\boxed{\sigma_a = 59{,}2 \text{ MPa}}$

249 En el problema anterior determinar la presión de contacto y los esfuerzos circunferenciales en el caso que inicialmente exista una holgura radial de una centésima de milímetro entre ambos tubos, antes de aplicar la presión de 4 MN/m² en el tubo de aluminio

Resolucion

P $\frac{D}{E_A}$ $\frac{PD}{E}$ 2λ P $\frac{\frac{PD}{E_A} - 2\lambda}{D\left(\frac{1}{E_a} \quad \frac{1}{E_A}\right)}$

Reemplazando valores $P = 4 \times 10^{[illegible]}$ Pa

$D = 0{,}1$ m [illegible]

$E_a = 200 \times 10^9$ Pa

$E_{Al} = 70 \times 10^9$ Pa

$P_c = -0{,}22 \times 10^6$ Pa

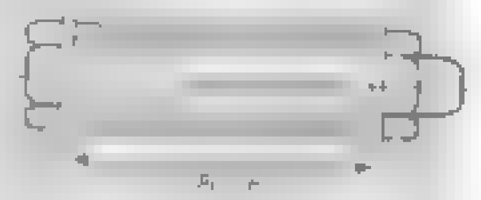
Esto no es lógico: $\therefore\ P_c = 0$

Y no se generan esfuerzos en el tubo de acero

En cambio en el tubo de aluminio, el esfuerzo será

$$\sigma_{Al} = \frac{PD}{2t} = 4\ \text{MPa} \times \frac{0{,}1}{[illegible]}$$

250. La figura representa un tornillo de acero que sujeta mediante [illegible] y [illegible] un tubo o manguito de bronce. El paso del tornillo es de 0,80 mm, la sección recta del tubo de bronce es de 900 mm² y la del tornillo de acero es de 450 mm². Se aprieta la tuerca hasta conseguir en el manguito de bronce un esfuerzo de compresión de 30 MN/m². Determinar el esfuerzo si a continuación se le da a la tuerca una vuelta más. ¿Cuántas vueltas habrá que dar ahora en sentido contrario para reducir tal esfuerzo a cero?



Resolución:

Sabemos que: $\delta = \dfrac{FL}{E} \Rightarrow \delta = \dfrac{30\ \dfrac{MN}{m^2} \times 800\ \text{mm}}{83\ \text{GPa}} = 0{,}29$ mm

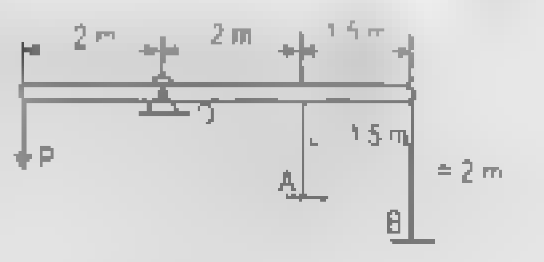
Si le damos una vuelta

$\delta = 0{,}29 + 0{,}8 = 1{,}09$ mm

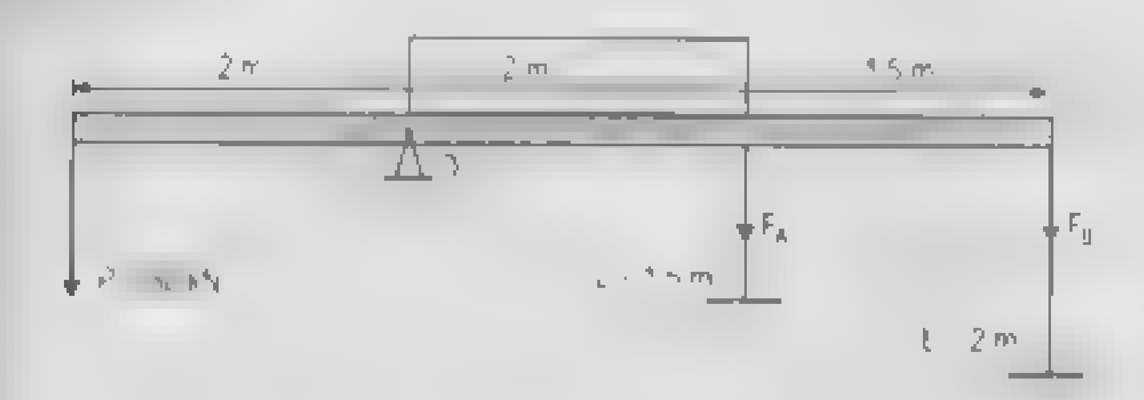
$$\sigma = \frac{\delta E}{L} \Rightarrow \sigma = \frac{1{,}09 \times 83\ \text{GPa}}{0{,}8\ \text{mm}} \Rightarrow \boxed{\sigma = 113{,}1\ \text{MPa}}$$

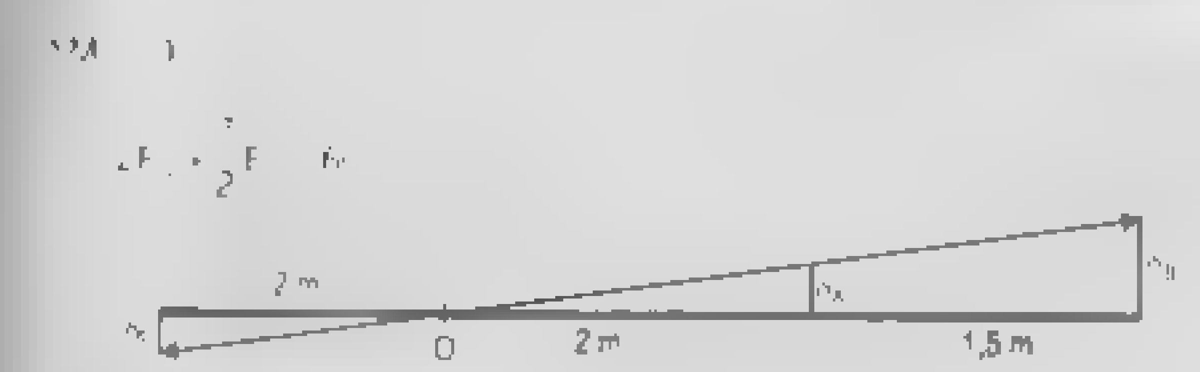
El número de vueltas necesario para que $\sigma = 0$ es: $\dfrac{1{,}09}{0{,}8} = \boxed{1{,}37\ \text{vueltas}}$

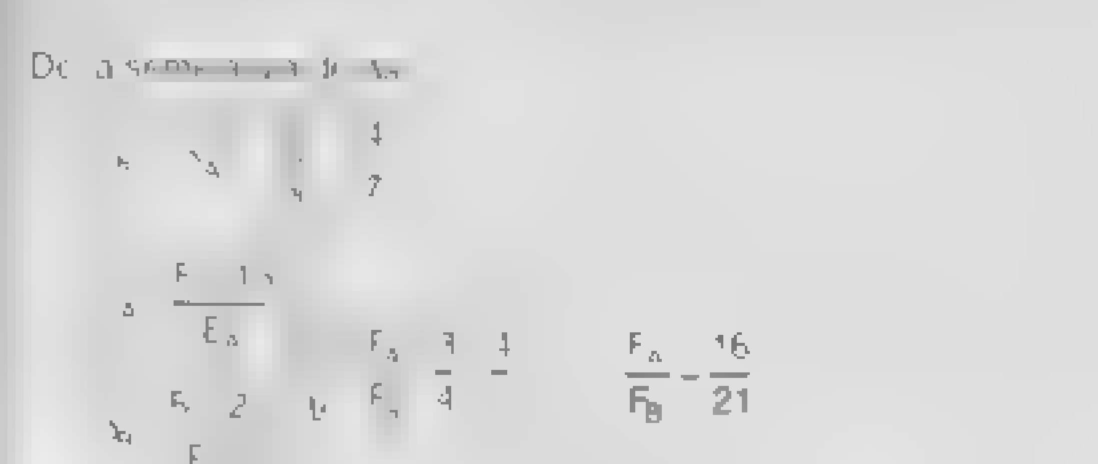
[illegible] Según se muestra en la figura, una viga rígida de masa despreciable está articulada en O y sujeta mediante dos varillas de diferentes longitudes, pero por lo demás, idénticas. Determine la carga en cada varilla si P = 30 kN

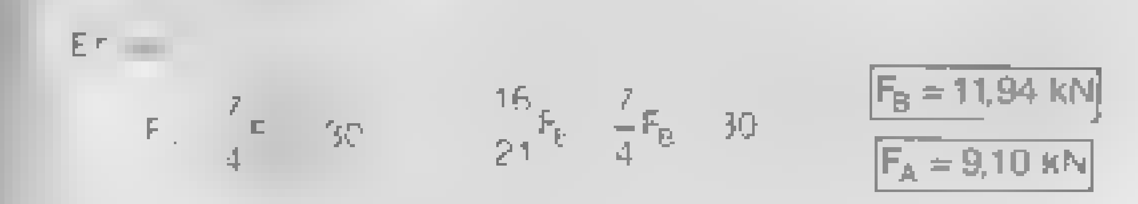


Resolución:

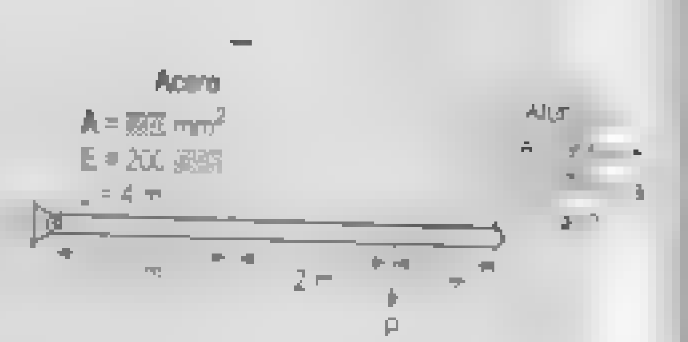




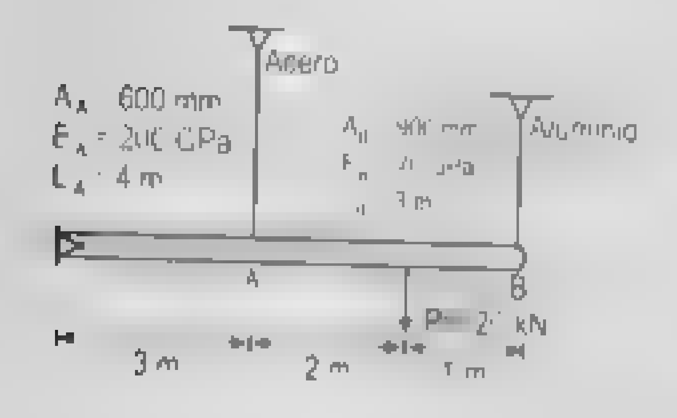


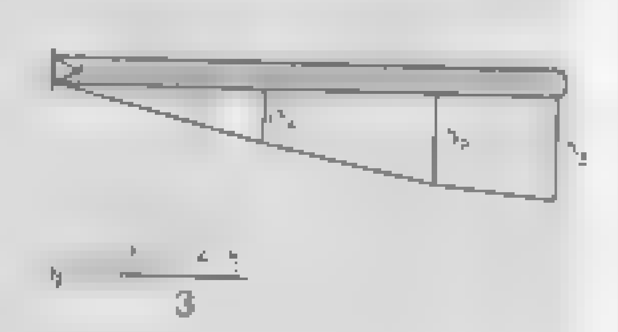


252 Una viga rígida de masa despreciable está articulada en un extremo y suspendida de dos varillas. La viga está inicialmente en posición horizontal y en seguida se aplica la carga P. Calcule el movimiento vertical de la carga si P = 120 kN



Resolucion.



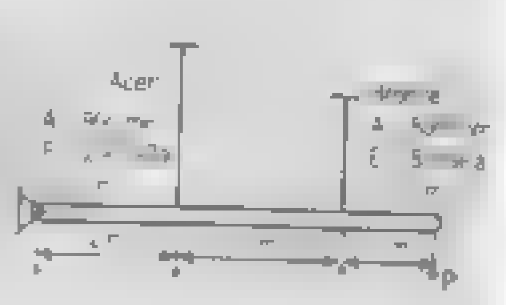


$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{2}{3}\ ,\ \frac{E_A}{E_B} = \frac{2}{7}\ ,\ \frac{L_A}{L_B} = \frac{4}{3}$$

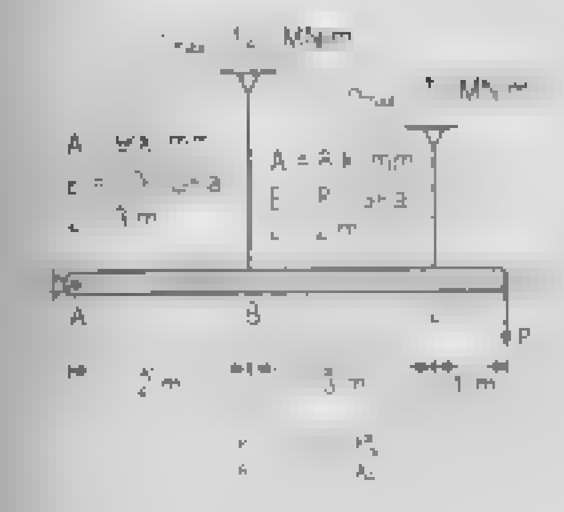
$$\delta_P = [illegible]\frac{7P}{30\,E_B A_B} + \frac{40P}{30\,E_A A_A} + \frac{1}{3} \Rightarrow \delta_P = \frac{47P_{\cdot}L_B}{90\,E\,A} = [illegible]$$

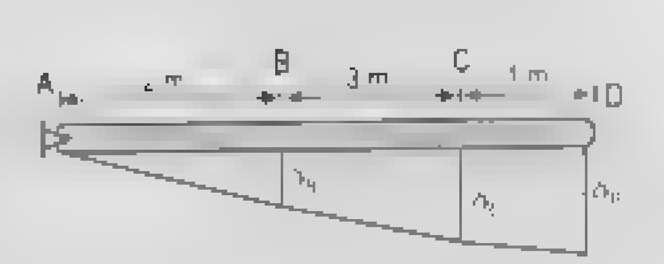
$$\delta_P = 2.984 \times 10^{[illegible]}\ \frac{kN\,m^3}{GN\,[illegible]}$$ $\boxed{\delta = 2.984\ mm}$

253 Una barra rígida de masa despreciable está articulada en un extremo y suspendida de una varilla de acero y una de bronce, según se muestra en la figura. ¿Cuánto vale la carga máxima P que puede aplicarse sin exceder un esfuerzo en el acero de 120 MN/m² ni uno en el bronce de 70 MN/m²?



Resolucion





$$\Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F_B + 5F_C = 6P \qquad ...(1)$$

$$\delta_B = \frac{F_B \times 3\ m}{(900\ mm^2)\,(200\ GPa)}$$

$$\delta_C = \frac{F_C \times 2\ m}{(800\ mm^2)\,(83\ GPa)}$$

$$\sigma_{m\acute{a}x\,B} = 120\ MN/m^2 = 120\ MPa = \frac{F_{B\,m\acute{a}x}}{A}$$

$$F_{B\,m\acute{a}x} = 120 \times \frac{10^6\ N}{10^6\ mm^2} \times 900\ mm^2 \quad \Rightarrow \quad F_{B\,m\acute{a}x} = 108\ kN$$

$$\sigma_{m\acute{a}x\,C} = 70\ MPa = \frac{F_{C\,m\acute{a}x}}{A}$$

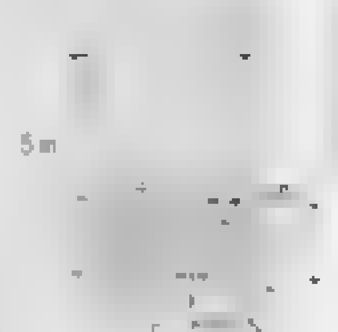
$$F_{C\,m\acute{a}x} = 70 \times \frac{10^6\ N}{10^6\ mm^2} \times 800\ mm^2 \qquad F_{C\,m\acute{a}x} = 56\ kN$$

$$\frac{\delta_B}{\delta_C} = \frac{2}{5} \qquad \frac{\delta_B}{\delta_C} = \frac{F_B \cdot 3 \cdot 800 \cdot 83}{900 \cdot 200 \cdot F_C \cdot 2} \qquad \frac{F_B}{F_C} = \frac{120}{163}$$

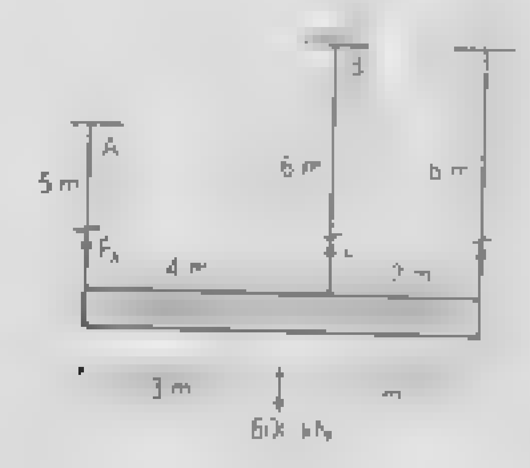
$$F_B = \frac{120}{163} \times 56 = 41{,}22$$

En (1) $6P = 2 \times 41.22 + 5 \times 56 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{m\acute{a}x} = 60.4\ kN}$

254 La figura representa la sección esquemática de un balcón. La carga total, uniformemente repartida es de 600 kN y está soportada por tres varillas de la misma sección y el mismo material. Determinar la parte de la carga que soporta cada varilla. Se supone al suelo colgante como perfectamente rígido, y téngase en cuenta que no queda necesariamente horizontal.



Resolución:



$F_A + F_B + F_C = 600\text{ kN}$ ... (1)

$3F_A = F_B + 3F_C$

$\delta_P = \dfrac{\delta_A + \delta_C}{2} \Rightarrow \delta_B = \dfrac{\delta_A + 2\delta_C}{3}$

$3(6F_B) = 5F_A + 2 \times (6F_C)$

$18F_B = 5F_A + 12F_C$ ... (α)

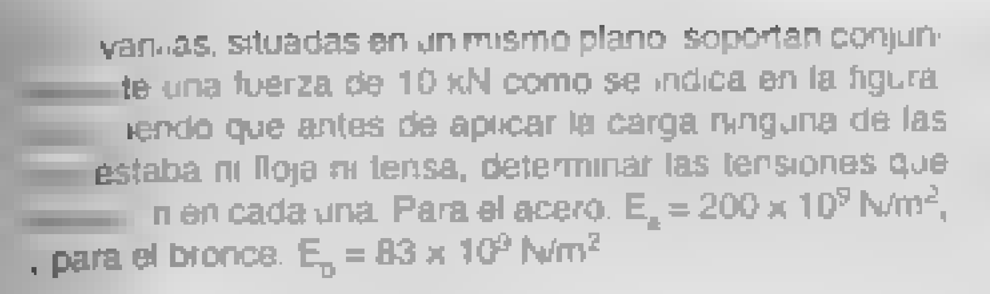
$12F_A = 4F_B + 12F_C$ ... (β)

$(\alpha) - (\beta) \qquad 22F_B = 17F_A$

En (1)

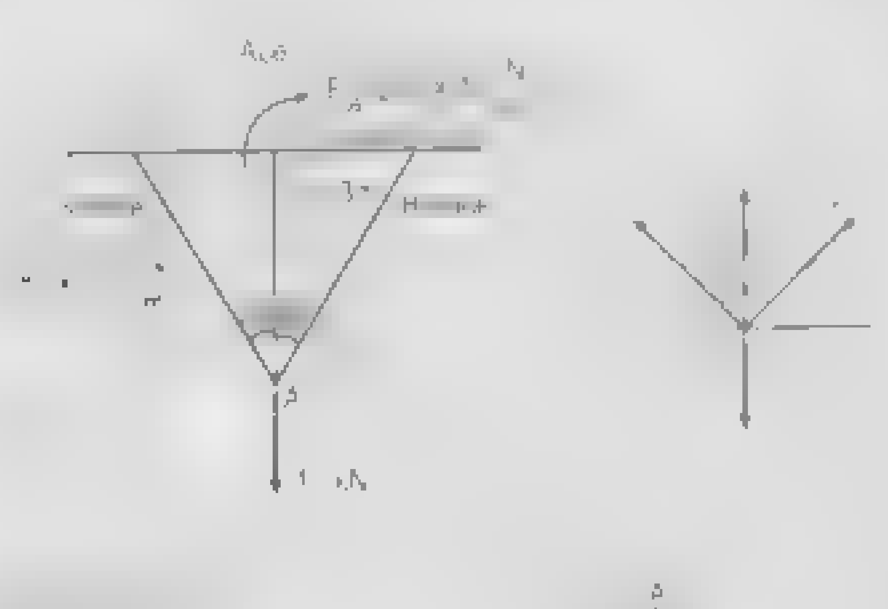
$\dfrac{22}{17}F_B + F_B + \dfrac{22}{17}F_B - \dfrac{F_L}{3} = 600 \quad \dfrac{44}{17} \quad \dfrac{2}{3} \quad F$ [illegible]

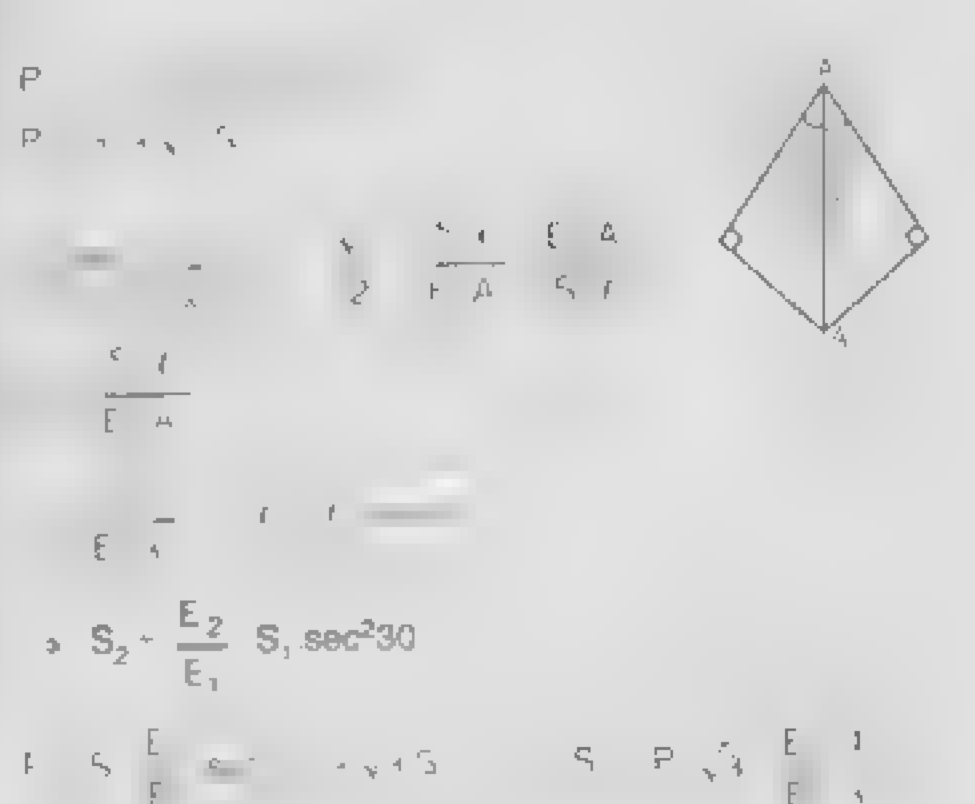
$\boxed{F_B = 184.3\text{ kN}}$ $\boxed{F_A = 238.5\text{ kN}}$ y $\boxed{F_C = \text{[illegible] kN}}$



varillas, situadas en un mismo plano, soportan conjuntamente una fuerza de 10 kN como se indica en la figura. Sabiendo que antes de aplicar la carga ninguna de las barras estaba ni floja ni tensa, determinar las tensiones que aparecen en cada una. Para el acero, $E_a = 200 \times 10^9\text{ N/m}^2$, y para el bronce, $E_b = 83 \times 10^9\text{ N/m}^2$

Resolución



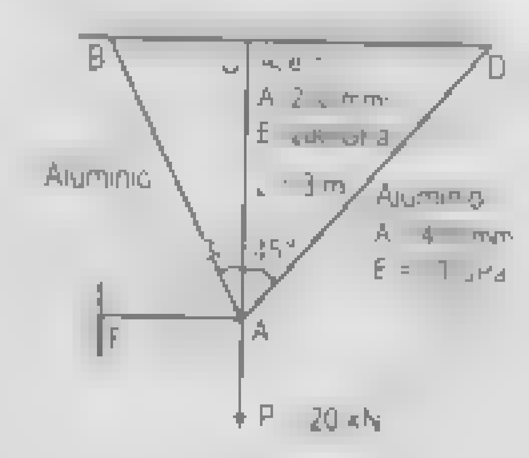


$\Rightarrow S_2 = \dfrac{E_2}{E_1} S_1 \sec^2 30$

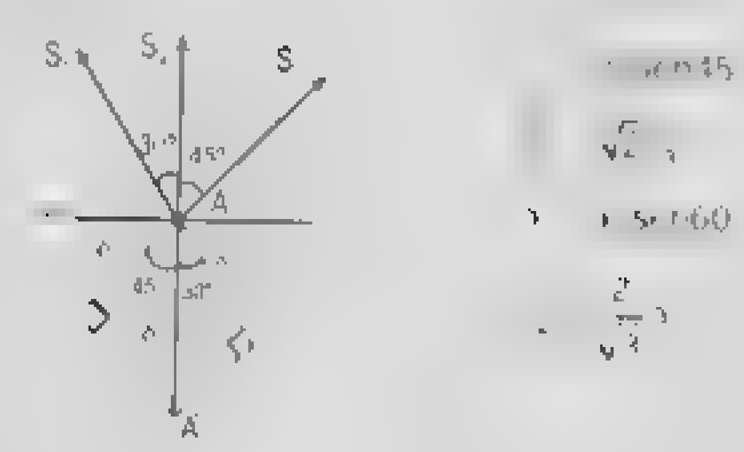
$S_1 = 10\text{ kN}\,[\sqrt{3}\ \ \dfrac{200}{83}\ \ \dfrac{4}{3}$ [illegible]

$\boxed{S_2 = 6.497\text{ kN}}$

256 Tres barras AB, AC y AD se articulan en A para soportar juntas una carga P = 20 kN como se muestra en la figura. El desplazamiento horizontal [illegible] A está [illegible] por una corta varilla horizontal AE que se supone [illegible]. Determinar los esfuerzos en cada barra y la fuerza total en AE. Para la barra de acero A = 200 mm² y E = 200 GPa, y para cada una de las barras de aluminio A = 400 mm² y E = 70 GPa.



Resolucion.



$$\delta_1 = \frac{S_1 \ell_1}{E_1 A_1} = \frac{S_1 \ell_1 \sec 30}{E_1 A_1}$$

$$\delta_2 = \frac{S_2 \ell_2}{E_2 A_2} = \frac{S_2 \ell}{E_2 A_2} \qquad \frac{S_1}{S_3} = \frac{3}{2} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{21}{20}$$

$$\delta_3 = \frac{S_3 \ell_3}{E_3 A_3} = \frac{S_3 \sqrt{2}\ell}{E_3 A_3}$$

Por equilibrio

$\Sigma F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 = S_2 + S_1 \cos 30° + S_3 \cos 45°$

Sabemos que $S_i = A_i \cdot \sigma_i$

$$20 = \frac{20}{21} S_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} S_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} S_1$$

$S_1 = 8{,}73$ kN $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_1 = 2182 \text{ N/cm}^2}$

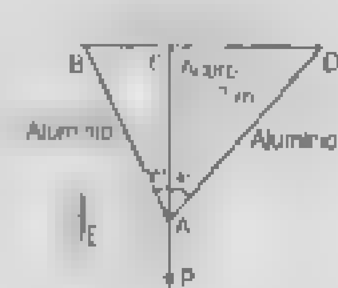
$S_2 = 9{,}17$ kN $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_2 = 4585 \text{ N/cm}^2}$

$S_3 = 13{,}095$ kN $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_3 = 3275 \text{ N/cm}^2}$

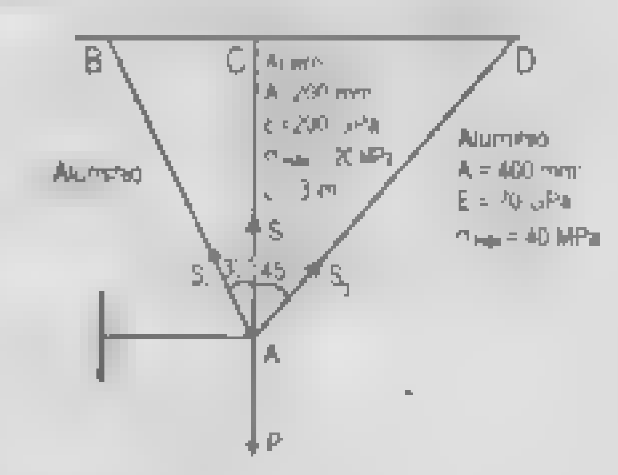
$\Sigma F_H = 0$

$S_{AE} + S_1 \cdot \text{sen}30° = S_3 \cdot \text{sen}45° \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{AE} = 4{,}83 \text{ kN}}$

257 Con los mismos datos del problema anterior, calcular el máximo valor P si los esfuerzos admisibles son de 40 MPa en el aluminio y de 120 MPa en el acero.



Resolucion.



$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{3}{2} \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{21}{20}$$

$\Sigma F_V = 0$

$P = S_1 \cdot \cos 30° + S_2 + S_3 \cdot \cos 45°$

$S \;\; \frac{2}{3} S$

$P \;\; S \frac{\sqrt{3}}{2} \;\; \frac{2}{21} S \;\; \frac{\sqrt{2}}{3}$ [illegible] $P \;\; 2{,}29\,S$

$S_2 \;\; \frac{20}{21} S$

$P \;\; \frac{21}{} \frac{\sqrt{3}}{2}$ [illegible] $P \;\; 2{,}29\,S$

$S_1 = \sigma_1 A_1 = 40\ \text{MPa} \times 400\ \text{mm}^2$

$= 40\ \text{Pa} \times 400\ \text{m}^2$

$S_1 = 16\,000\ \text{N} = 16\ \text{kN}$

$S_2 = \sigma_2 \; A_2 = 120\ \text{MPa} \times 200\ \text{mm}^2$

$120 \times 200\ \text{Pa} \times \text{m}^2$

$S_2 \;\; 24\ \text{kN}$

$P \;\; 2{,}29 \times 16\ \text{kN} \Rightarrow \boxed{P = 36{,}64\ \text{kN}}$

258, 259, 260 problemas ilustrativos

261 Una varilla de acero de 150 mm² de sección, esta sujeta en sus extremos a dos puntos fijos, estando estirada con una fuerza total de 5000 N a 20 °C. Calcular el esfuerzo en la varilla a –20°C. ¿A qué temperatura se anulará el esfuerzo? α = 11,7 μm/(m °C) y E = 200 × 10⁹ N/m²

Resolución.

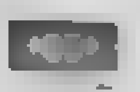
A = 150 mm²
P = 5000 N
T = 20 °C

$\sigma\ 20\ °C = ? \;;\; \frac{P L}{AE} = \frac{P_0 L}{AE} + \alpha L \Delta T$

$\sigma_f = \sigma_0 + \alpha \Delta T E \;\Rightarrow\; \sigma_f = \frac{5000\ \text{N}}{150\ \text{mm}^2} + 93{,}6\ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ $\boxed{\sigma = 127\ \text{MN/m}^2}$

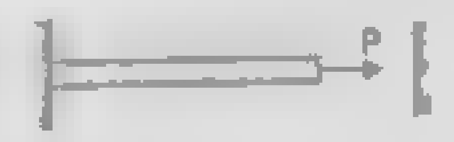
$127\ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} = 11{,}7\ \frac{\mu\text{m}}{\text{m}\ °\text{C}} \times \Delta T \times 200 \times 10^9\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \;\Rightarrow\; \Delta T = 54{,}2\ °\text{C}$

$T_f - (-20\ °\text{C}) = 54{,}2\ °\text{C} \;\Rightarrow\; \boxed{T_f = 34{,}2\ °\text{C}}$



Una varilla de acero anclada entre dos muros rígidos, queda sometida a una tensión de 5000 N a 20 °C. Si el esfuerzo no debe de 130 MN/m², halla el diámetro mínimo de la varilla para que no se sobrepase aquel al descender la temperatura hasta –20 °C. Suponga α = 11,7 μm/(m °C) y E = 200 GPa

Resolución



$P = 5000\ \text{N} \qquad A = \frac{\pi d^2}{4}$

$T_i = 20\ °\text{C}$
$\sigma_{adm} = 130\ \text{MN/m}^2$
$T_f = -20\ °\text{C}$
$\alpha = 11{,}7\ \mu\text{m/m}\ °\text{C}$
$E = 200\ \text{GPa}$

$\frac{P_f L}{AE} = \frac{P_0 L}{AE} + \alpha L \Delta T \;\Rightarrow\; \frac{\sigma_{adm}}{E} = \frac{5000\ \text{N}}{AE} + 11{,}7\ \frac{\mu\text{m}}{\text{m}\ °\text{C}} \times 40\ °\text{C}$

$130\ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} = \frac{5000\ \text{N}}{A} + 93{,}6\ \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \;\Rightarrow\; A = $ [illegible] $= \frac{\pi}{4} d^2$

$\boxed{d = 13{,}22\ \text{mm}}$

263. Los rieles de una vía férrea, de 10 m de longitud, se colocan a una temperatura de 15 °C con una holgura de 3 mm. ¿A qué temperatura quedarán a tope? Calcular el esfuerzo que adquirirían a esta temperatura si no existiera la holgura señalada. α = 11,7 μm/(m °C) y E = 200 GPa

Resolución:

L = 10 m , T=15 °C , Holgura = 3 mm

$\delta L = \alpha L \Delta T$

$3 \times 10^{-3} = 11{,}7 \times 10^{-6} \times 10 \times \Delta T$

$\Delta T = \frac{300}{11{,}7}\ °\text{C} = 25{,}64\ °\text{C}$

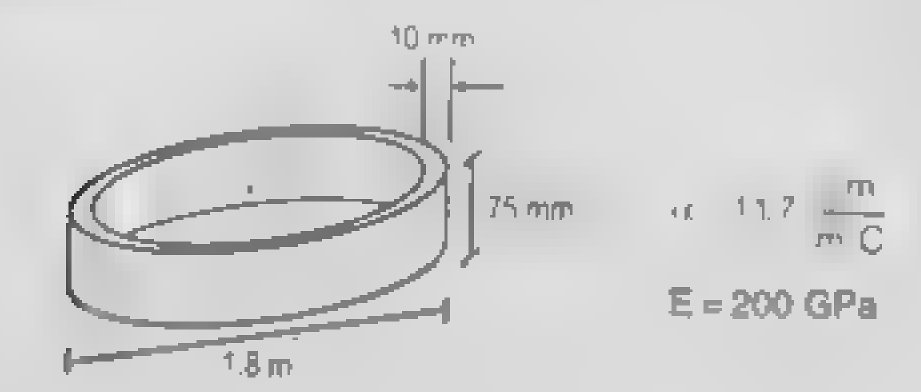
$\Delta T = T_f - T_0 = 25{,}64\ °\text{C} \;\Rightarrow\; T_f = 40{,}64\ °\text{C}$

$$\delta_1 = \delta_T \Rightarrow \frac{PL}{AE} = \alpha L \Delta T \Rightarrow \frac{\sigma}{E} = \alpha \Delta T$$

$$\sigma = 11{,}7\ \frac{\mu m}{m\ ^\circ C} \times 25{,}64\ ^\circ C \times 200\ GPa \rightarrow \boxed{\sigma = 67\ MPa}$$

264 Una llanta de acero de 10 mm de espesor y 75 mm de ancho se coloca sobre una rueda motriz de locomotora de 1,8 m de diámetro calentándola a 90 °C, temperatura a la cual encaja perfectamente sobre la rueda que está a 20 °C. Determinar la presión de contacto entre ambas ruedas al descender la temperatura común a 20 °C. Despreciar la deformación de la rueda producida por la presión de contacto. $\alpha = 11{,}7\ \mu m/(m\ ^\circ C)$ y $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$

Resolución:



$\alpha = 11{,}7\ \frac{\mu m}{m\ ^\circ C}$

$E = 200\ GPa$

$\Delta L = \alpha L \Delta T$ ...(1)

$\delta = \frac{PL}{AE}$ ...(2)

(1) = (2).

$$\frac{\sigma L}{E} = \alpha L \Delta T \Rightarrow \sigma = \alpha E \Delta T \Rightarrow \sigma = 163{,}8\ MPa$$

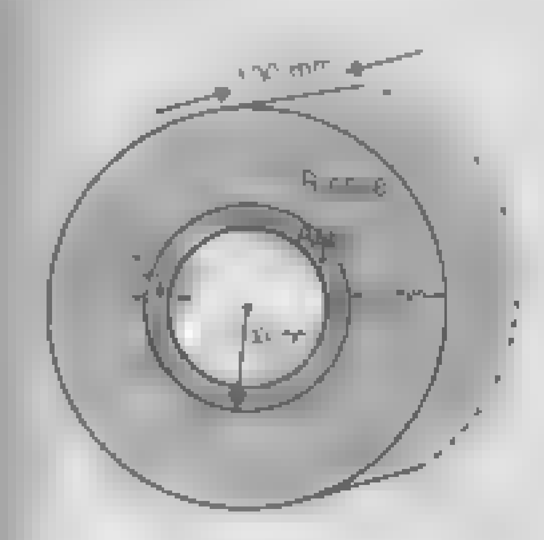
Entonces: $163{,}8\ MPa = \frac{Pr}{t}$

$$P = 163{,}8\ MPa \times \frac{1}{90} \Rightarrow \boxed{P = 1{,}82\ MPa}$$

265 Un aro de bronce de 20 mm de espesor cuyo diámetro interior es de 600 mm se coloca perfectamente ajustado sobre otro de acero de 15 mm de espesor a una temperatura común de 130 °C. El ancho, igual para los dos, es de 100 mm. Determinar la presión de contacto entre ambos aros cuando la temperatura desciende hasta 20 °C. Despreciar el hecho que el aro interior pueda abollarse por pandeo. $E_a = 200$ GPa y $\alpha = 11{,}7\ \mu m/(m\ ^\circ C)$. $E_b = 83$ GPa y $\alpha = 19\ \mu m/(m\ ^\circ C)$

Resolución.

Del gráfico



Datos

Disco de bronce

$r_b = 310$ mm (radio medio)

$h_b = 20$ mm (espesor)

$\alpha_b = 19 \times 10^{-6}\ 1/^\circ C$

$E_b = 83$ GPa

Disco de acero

$r_a = 307{,}5$ mm (radio medio)

$h_a = 15$ mm (espesor)

$\alpha_a = 11{,}7 \times 10^{-6}\ 1/^\circ C$

$E_a = 200$ GPa

$\Delta t = 130^\circ C - 20^\circ C = 110^\circ C$

Al haber un decremento de temperatura, los aros se contraen, obviamente el disco de bronce reduce sus medidas mucho más que el disco de acero, por lo tanto se produce una presión P que contrae el disco interior y a su vez dilata el exterior.

Primero hallamos la diferencia de longitudes al contraerse, para ello suponemos que se encuentran separados.

El decremento de longitud de la circunferencia del aro de bronce es

$2\pi\, r_b \alpha_b\, \Delta t = 2\pi(310)(19 \times 10^{-6})(110)\ mm = (2\pi)(0{,}6479)\ mm$

El decremento de longitud de la circunferencia del aro de acero es

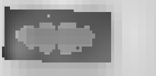
$2\pi\, r_a \alpha_a\, \Delta t = 2\pi(307{,}5)(11{,}7 \times 10^{-6})(110)\ mm = (2\pi)(0{,}3957525)\ mm$

Entonces la "interferencia" de longitudes es

$(2\pi)(0.6479) - (2\pi)(0.3957525) = (2\pi)(0{,}2517475)\ mm$

Y la "interferencia" de radios es

$$\frac{2\pi)(0.2517475)\ mm}{2} = 0{,}251745\ mm$$



Asimismo, las longitudes que la presión "P" contrayendo el disco interior y dilatando el disco exterior debe coincidir con la "interferencia" de los radios hallados. En el interior de un cilindro delgado, el incremento (o decremento) de la longitud radial por efecto de una presión interna "P" viene dado por

$$\Delta r = \frac{Pr^2}{Eh}$$

donde: P presión, r radio, h espesor

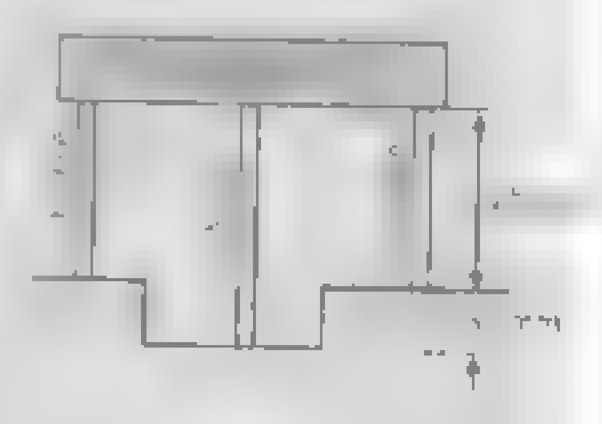
Luego tenemos que la suma de las variaciones radiales es

$$\frac{Pr^2}{Eh} + \frac{Pr^2}{Eh} = 0.2517475 \text{ mm}$$

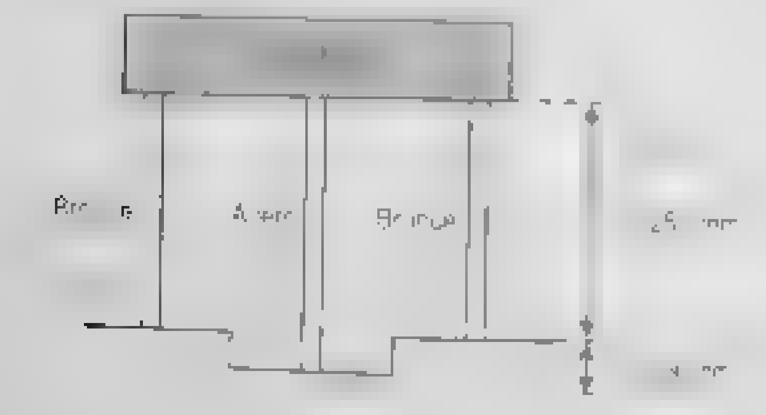
Colocando los valores

$$P\left(\frac{310^2}{(83)(20)} + \frac{(307.5)^2}{(200)(15)}\right) = 0{,}2517475 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{P = 2.8156 \text{ MN/m}^2}$$

266. A una temperatura de 20 °C se coloca una plancha rígida que tiene una masa de 55 Mg sobre dos varillas de bronce y una de acero, como se indica en la figura. ¿A qué temperatura quedará descargada la varilla de acero? Datos: acero: A = 6000 mm², E = 200×10⁹ N/m² y α = 11,7 µm/(m.°C). Bronce (cada una): A = 6000 mm², E = 83 × 10⁹ N/m² y α = 19,0 µm/(m °C)

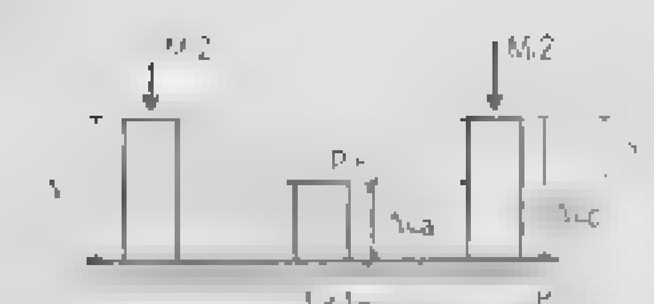


Resolución



Acero: $A = 6000 \text{ mm}^2$, $E = 200\times10^9 \text{ N/m}^2$

Bronce: $A = 6000 \text{ mm}^2$, $E = 83\times10^9 \text{ N/m}^2$, $\alpha = 19.0 \text{ µm/m°C}$



$$19\,\frac{\mu m}{m\,°C} \times 250 \text{ mm} \times \Delta T = 4750\,\frac{\mu mm}{°C}\times\Delta T$$

$$11.7\,\frac{\mu m}{m\,°C} \times 300 \text{ mm} \times \Delta T = 3510\,\frac{\mu mm}{°C}\times\Delta T$$

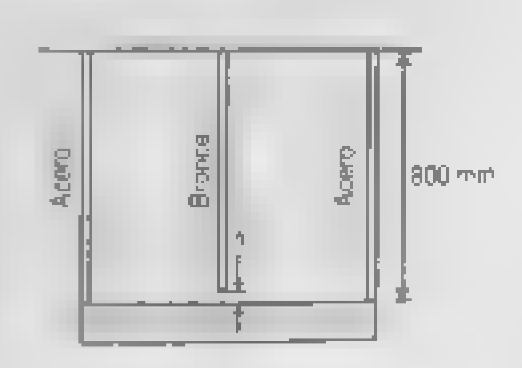
$$\frac{\left(\frac{M}{2}\right)\times 250 \text{ mm}}{6000 \text{ mm}^2 \times 83\times10^9 \text{ N/m}^2} = 0{,}135 \text{ mm}$$

Reemplazando en (1)

$$(4750 - 3510)\,\frac{\mu mm}{°C}\,\Delta T = 0{,}135 \text{ mm}$$

$$\Delta T = 108.87\,°C \Rightarrow T = 108.87\,°C + 20\,°C \qquad \boxed{T = 129\,°C}$$

A una temperatura de 20 °C hay un claro Δ = 0,2 mm entre el extremo inferior de la barra de bronce y la losa rígida suspendida de las dos barras de acero, según se muestra en la figura. Despreciando la masa de la losa, determine el esfuerzo en cada barra cuando la temperatura del conjunto se eleva a 100 °C. Para la barra de bronce: A = 600 mm², E = 83 × 10⁹ N/m² y α = 18.9 µm/(m °C). Para cada barra de acero: A = 400 mm², E = 200 × 10⁹ N/m² y α = 11.7 µm/(m °C)



Resolucion

Bronce: $A = 600\ mm^2$, $E = 83\times10^9\ N/m^2$, $\alpha = 18.9\ \mu m/m°C$

Acero: $A = 400\ mm^2$, $E = 200\times10^9\ N/m^2$, $\alpha = 11.7\ \mu m/m°C$

Acero

$\delta_L = \alpha . L . \Delta T$

$\Delta L = 11{,}7 \frac{\mu m}{m\ °C} \times 800\ mm \times 80\ °C \Rightarrow \Delta L = 0{,}75\ mm = \delta_T$

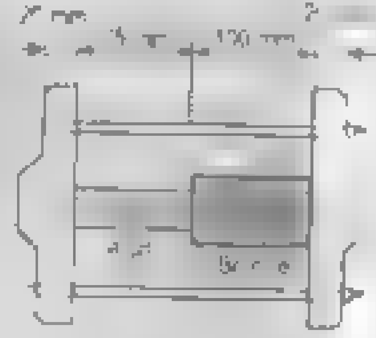
$\frac{PL}{AE} = \delta_T \qquad \frac{\sigma\ 800}{200\times10^9} = 0{,}75 \quad \therefore \quad \boxed{\sigma = 187.5\ MPa}$

Bronce

$\delta_L = 18.9 \times \frac{\mu}{C} \times 800\ mm \times 80\ C \Rightarrow \Delta L = 1209.6 \times 10^{-3}\ mm = 1.209\ mm$

$\frac{\sigma\ 800\ mm}{83\times10^9\ N/m^2} = 1{,}209\ mm - 0{,}2\ mm \quad \therefore \quad \boxed{\sigma = 104.68\ MPa}$

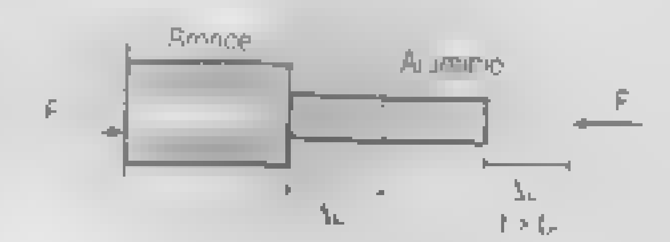
268 Un cilindro de aluminio y otro de bronce, perfectamente centrados, se aseguran entre dos placas rígidas que se pueden apretar mediante dos tornillos de acero, como se observa en la figura A 10 °C no existen fuerzas axiales en el conjunto del dispositivo. Determinar las tensiones en cada material a 90 °C, con los siguientes datos



Aluminio, $A = 1200\ mm^2$, $E = 70 \times10^9\ N/m^2$, y $\alpha = 23\ \mu m/(m\ °C)$

Bronce $A = 1800\ mm^2$, $E = 83 \times10^9\ N/m^2$, y $\alpha = 19.0\ \mu m/(m\ °C)$
Cada tornillo, $A = 500\ mm^2$, $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$, y $\alpha = 11{,}7\ \mu m/(m\cdot°C)$

Resolución



$\Delta t = t - t_0$, pero: $\Delta L_1 = \alpha_1 . L_1 . \Delta t$ y $\Delta L_2 = \alpha_2 . L_2 . \Delta t$

$\Delta L_T = \Delta t(\alpha_1 . L_1 + \alpha_2 . L_2)$ (1)

$\delta_T = \frac{F L_1}{A_1 E_1} + \frac{F L_2}{A_2 E_2}$ (2)

(1) = (2)

$\Delta t(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) = \frac{F L_1}{A_1 E_1} + \frac{F L_2}{A_2 E_2}$

$F = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)\left[\frac{L_2}{A_2E_2} + \frac{L_1}{A_1E_1}\right]^{-1} \Delta t \Rightarrow F = \frac{3625\times10^6 \cdot 80}{1{,}562} = 185.6\ kN$

$\sigma_a = \frac{185.6\ kN}{1200\ mm^2} \qquad \boxed{\sigma_{aluminio} = 154.7\ \frac{MN}{m^2}}$

$\sigma_b = \frac{185.6\ kN}{1800\ mm^2} \qquad \boxed{\sigma_{bronce} = 103.13\ \frac{MN}{m^2}}$

Para los tornillos.

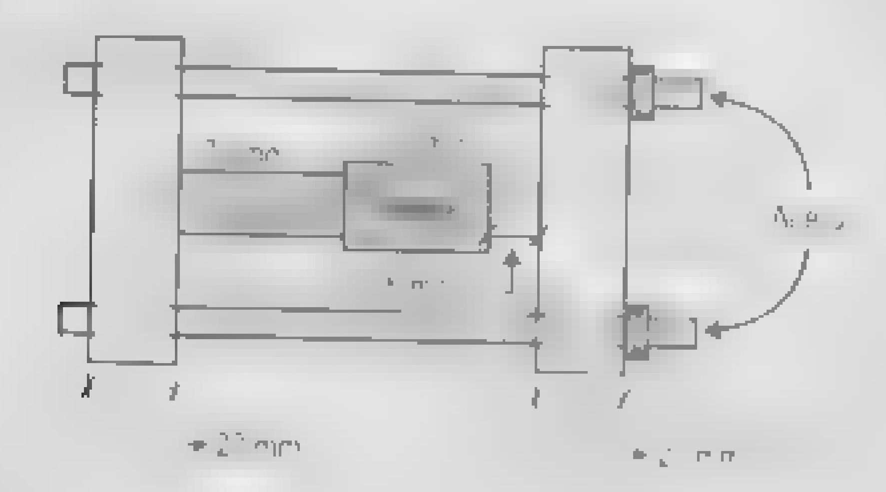
$\frac{F\ L}{A\ E} = \alpha\ L\ \Delta T$

$F = 11{,}7 \frac{\mu m}{m\ °C} \times 500\ mm^2 \times 200\times10^9 \frac{N}{m^2}\ 80\ °C \Rightarrow F = 93.6\ kN$

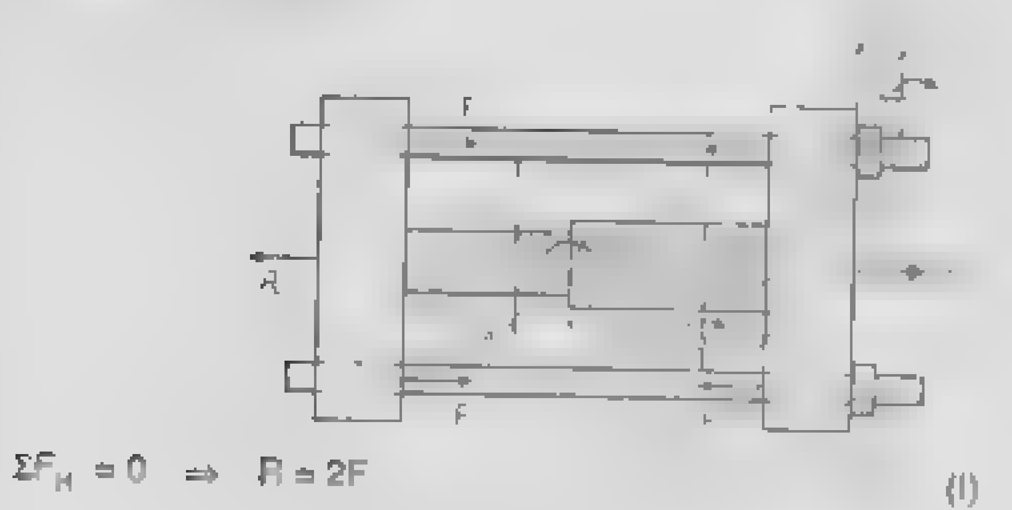
$\sigma_{tornillo} = \frac{93.6\ kN}{500\ mm^2} \qquad \boxed{\sigma_{tornillo} = 187\ \frac{MN}{m^2}}$

269 Resuelva el problema anterior, suponiendo que hay un claro de 0.05 mm entr [illegible]

Resolución.



[illegible]



$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow R = 2F$ (I)

Luego del gráfico: $\delta_A = \delta_{T_A} - \delta_{R_A}$

$\delta_B = \delta_{T_B} - \delta_{R_B}$

$\delta_{AC} = \delta_{T_{AC}} - \delta_{F_{AC}}$

$\Rightarrow \delta_A + \delta_B + 0.05\ mm = \delta_{AC}$

[illegible] $\frac{RL_A}{E_A A} + \frac{RL_B}{E_B A}$ [illegible] FL_{AC} [illegible]

[illegible]

	α	L	E	A
A	23×10^{-6} / °C	75×10^{-3} m	70×10^9 N / m²	1200×10^{-6} m²
B	19×10^{-6} / °C	100×10^{-3} m	83×10^9 N / m²	1800×10^{-6} m
[illegible]			[illegible]	[illegible]

[illegible] (I) y (II) $R = 284{,}82$ kN y $F = 142\ 41$ kN

[illegible] | [illegible] 58 MN/m² | $\sigma_{AC} = 284$ MN/m²

[illegible] cilindro de acero está dentro de un manguito de bronce, ambos de la misma [illegible]ud y los dos juntos soportan una fuerza vertical de compresión de 250 kN [illegible] se aplica por intermedio de una placa de apoyo horizontal. Determinar (a) la [illegible] de temperatura con la que el acero queda totalmente descargado, y (b) [illegible] que descarga por completo al bronce.

[illegible] acero: A = 7200 mm², E = 200 GPa y α = 11,7 μm/(m °C)

bronce: A = 12 × 10³ mm², E = 836 Pa y E = 83 GPa α = 19.0 μm/(m°C)

Resolución

a De gráfico

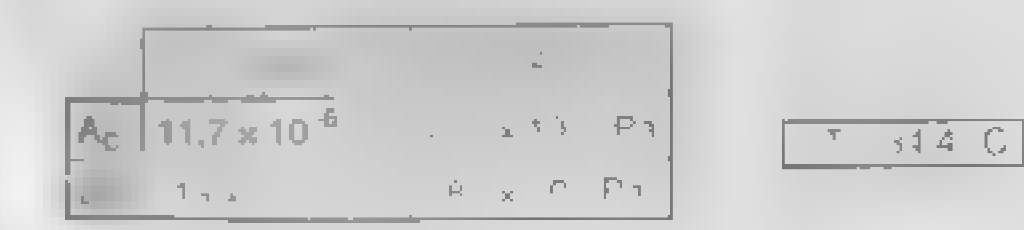
$\delta_{T_{BR}} = \delta_{P_{BR}} + \delta_{T_{AC}}$

[illegible]

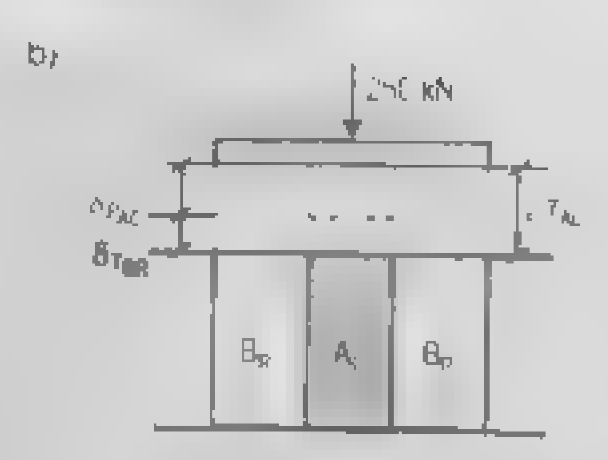
Como $L_{BR} = L_{AC}$

$\Delta T\, L(\alpha_{BR} - \alpha_{AC}) = \frac{250 \times 10^3 L}{E_{BR} A_{BR}} \Rightarrow \Delta T = \frac{250 \times 10^3}{E [illegible]}$

Reemplazando valores



b)



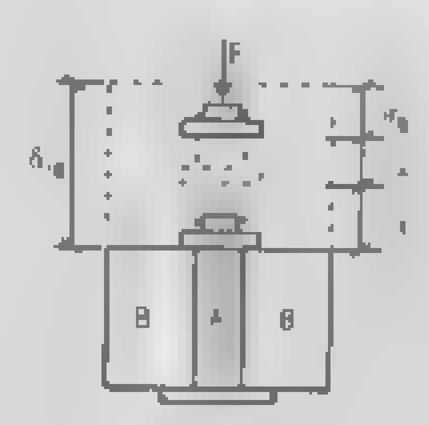
$$\alpha_{AC}\, L\, \Delta T - \alpha_{BR}\, L\, \Delta T = \frac{250\times 10^3\, L}{E_{AC}\, A_{AC}}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{250.10^3}{E_A\, A_A\,(\alpha_{AC} - \alpha_{BR})}$$

$$\boxed{\Delta T = 23{,}9\ ^\circ C}$$

271 Un mangu[illegible]lo de bronce se monta sobre un torn[illegible]o de [illegible]ero y se sujeta med[illegible] de una tuerca. Calcule el cambio de temperatura que causará que el esfuerzo en el bronce sea de 20 MPa. Para el tornillo de acero: A = 450 mm², E = 200 GPa y α = 11,7 μm/(m.°C). Para el manguito de bronce: A = 900 mm², E = 83 GPa, α = 19,0 μm/(m.°C).

Resolución:



Luego $\delta_{T_B} = \delta_{F_A} + \delta_{T_A} + \delta_{F_B}$

$$\alpha_B L \Delta T = \frac{FL}{E_A A_A} + \alpha_A L \Delta T + \frac{FL}{E_B A_B}$$

$$\Rightarrow \Delta T(\alpha_B - \alpha_A) = F\left(\frac{1}{E_A A_A} + \frac{1}{E_B A_B}\right)$$

Por condición

$$\sigma_B = 20\times 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{F}{A_{BR}}$$

$$\Rightarrow F = 20\times 10^6 \times 900\times 10^{-6}\, m^2 \Rightarrow F = 18\ kN$$

Reemplazando $\Delta T = 18\times 10^3 \left(\frac{1}{E_A A_A} + \frac{1}{E_B A_B}\right)\frac{1}{(\alpha_B - \alpha_A)}$ $\therefore$ $\boxed{\Delta T = 60{,}4\ ^\circ C}$

272 En el caso del problema anterior, suponga que la tuerca se aprieta para producir un esfuerzo inicial de 15 × 10⁶ N/m² en el manguito. Halle el esfuerzo en este después de un aumento de temperatura de 70 °C.

Resolución.

$\Delta T = 70\ ^\circ C$

δ_{F_B} δ_{T_B} δ_{F_A} δ_{T_A} δ_0

B B

$$\frac{F_B}{A_B} = 15\times 10^6 \frac{N}{m^2} \Rightarrow F_B = 13.5\ kN$$

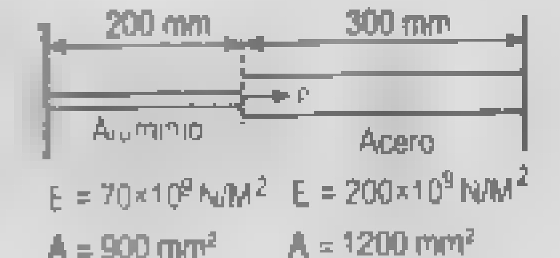
$$\delta_{0F_B} = \frac{13.5\times 10^3 \times L}{E_B\, A_B}$$

$$\delta_{T_B} = \delta_{F_B} + \delta_{F_A} + \delta_{T_A} + \delta_0$$

$$\alpha_B L \Delta T = \frac{FL}{E_A A_A} + \alpha_A L \Delta T + \frac{FL}{E_B A_B} + \frac{13{,}5\times 10^3 L}{E_B A_B}$$

$$\Rightarrow F = 13.5\ kN \Rightarrow F_T = 27\ kN \quad \therefore \quad \boxed{\sigma_B = 3\ MPa}$$

273 **La barra compuesta de la figura, está firmemente sujeta a soportes indeformables. Se aplica una fuerza axial P = 200 kN a una temperatura de 20 °C. Calcular los esfuerzos en cada material a la temperatura de 60 °C. α = 11,7 μm/(m °C) para el acero y 23,0 μm/(m °C) para el aluminio**



Resolución:

I. Considerando que solo actúa P = 200 kN

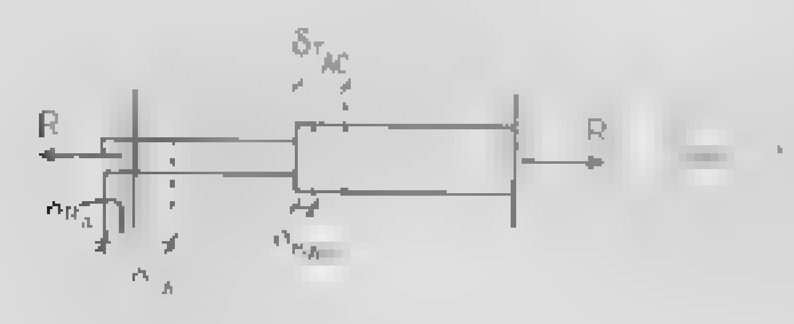
$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow P - R_1 - R_2 = 0$ ... (I)

$\delta_T = 0 \Rightarrow \delta_A + \delta_{AC} = 0$

... (II)

$R_1 = 56{,}5$ kN ∧ $R_2 = 143{,}5$ kN

II. Considerando que solo actúa ΔT = 60 °C



$\Rightarrow (\delta_{T_A} - \delta_{R_A}) + (\delta_{T_{AC}} - \delta_{R_{AC}}) = 0$

$$(\alpha_A L_A + \alpha_{AC} L_{AC})\Delta T - \left(\frac{R_3 L_A}{E_A A_A} + \frac{R_3 L_{AC}}{E_{AC} A_{AC}}\right) = 0 \quad \text{... (III)}$$

Resolviendo (III): $R_3 = 11$ kN

Finalmente sumando los efectos

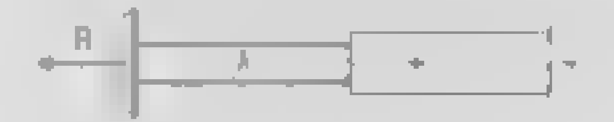
67,5 kN   132,5 kN

Luego $\sigma_A = \dfrac{\ldots}{900\times10^{-6}\ m^2}$ $\sigma_{AC} = \dfrac{132{,}5\times10^3\ N}{1200\times10^{-6}\ m^2}$

En el problema anterior, ¿a qué temperatura alcanzará el esfuerzo en el aluminio y el acero, el mismo valor numérico?

Resolución

I. Considerando que solo actúa P = 200 kN



Entonces, de (I) y (II): $R_1 = 56{,}5$ kN ∧ $R_2 = 143$ kN

II. Considerando que solo actúa ΔT

Del gráfico: δ

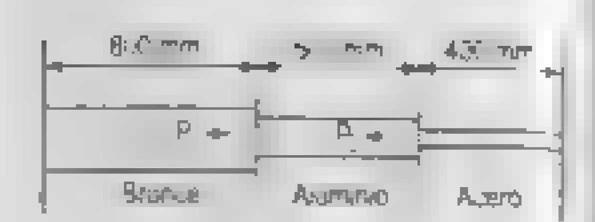
$(\delta_{T_A} - \delta_{R_A}) + (\delta_{T_{AC}} - \delta_{R_{AC}}) = 0$

Por condición:

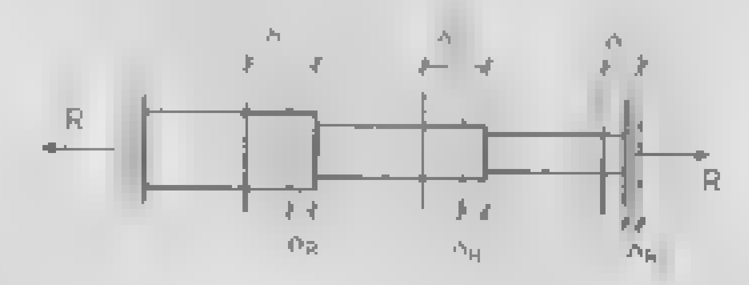
$$\frac{56{,}5\ kN + R_3}{\ldots} = \frac{143{,}5\ kN - R_3}{\ldots} \qquad R_3 = 29{,}2\ kN$$

Reemplazando en (III): $\boxed{\Delta T = 15{,}9\ °C}$

275. Una varilla está formada por los tres segmentos que indica la figura. Si las fuerzas axiales P_1 y P_2 son nulas, determinar los esfuerzos en cada material al descender la temperatura 30 °C en los casos siguientes: (a) los soportes no se mueven en absoluto, y (b) los soportes ceden 0.300 mm. α = 18,9 μm/(m °C) para el bronce, 23,0 μm/(m °C) para el aluminio y 11,7 μm/(m °C) para el acero



Resolución:

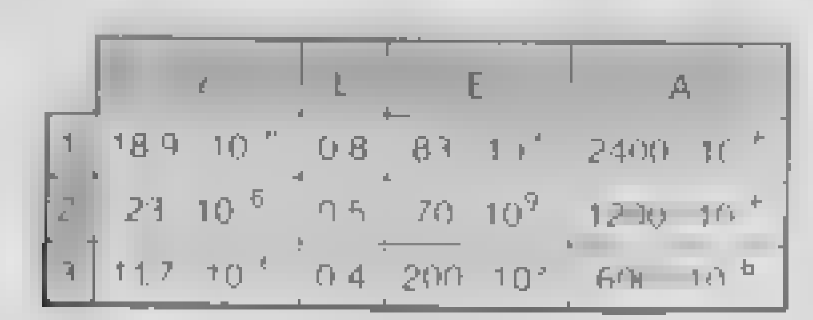


a) $\delta = 0$

$$(\delta_{T_1} + \delta_{T_2} + \delta_{T_3}) - (\delta_{R_1} + \delta_{R_2} + \delta_{R_3}) = 0$$

$$\Delta T(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3) - \left(\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2} + \frac{L_3}{E_3 A_3}\right) R = 0$$

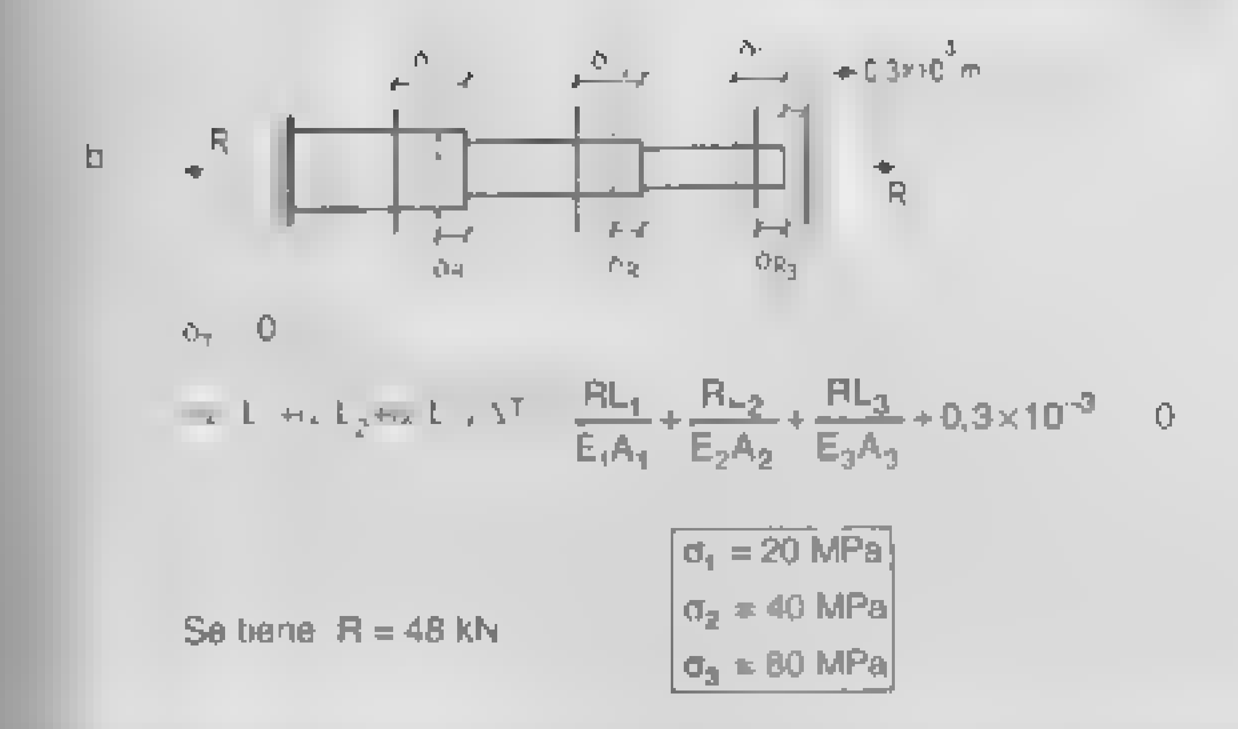
Reemplazando.



	α	L	E	A
1	18.9×10^{-6}	0.8	83×10^{9}	2400×10^{-6}
2	23×10^{-6}	0.5	70×10^{9}	1200×10^{-6}
3	11.7×10^{-6}	0.4	200×10^{9}	600×10^{-6}

Se tiene: R = 70.6 kN ∴

σ_1 = 29.4 MPa
σ_2 = 58.8 MPa
σ_3 = 117.6 MPa



$\delta_T = 0$

$$-\Delta T(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3) + \frac{RL_1}{E_1A_1} + \frac{RL_2}{E_2A_2} + \frac{RL_3}{E_3A_3} + 0.3 \times 10^{-3} = 0$$

Se tiene R = 48 kN

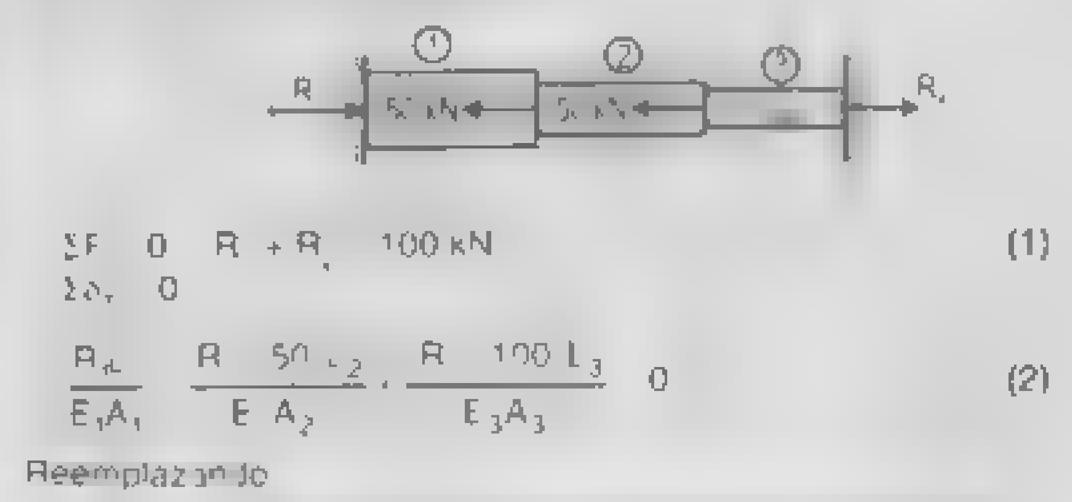
σ_1 = 20 MPa
σ_2 = 40 MPa
σ_3 = 80 MPa

276. Resolver el problema anterior si P_1 y P_2 son de 50 kN y los apoyos ceden 0.30 mm al descender la temperatura 50 °C

A = 2400 mm²	A = 1200 mm²	A = 600 mm²
E = 83 × 10⁹ N/m²	E = 70 × 10⁹ N/m²	E = 200 × 10⁹ N/m²

Resolución

Considerando que sólo actúa P



$\Sigma F = 0 \quad R_1 + R_2 = 100$ kN (1)

$\Sigma\delta_T = 0$

$$\frac{R_1 L_1}{E_1A_1} + \frac{(R_1 - 50)L_2}{E_2A_2} + \frac{(R_1 - 100)L_3}{E_3A_3} = 0 \qquad (2)$$

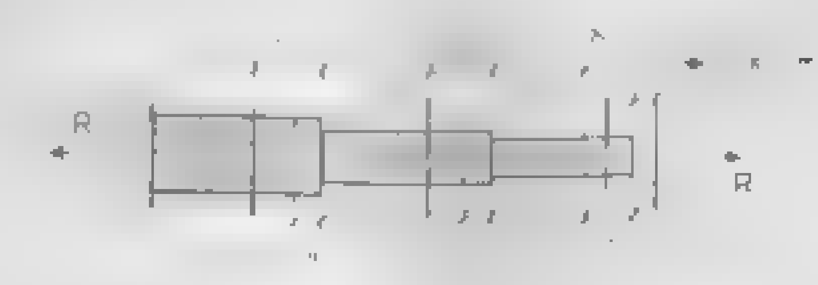
Reemplazando

	α 1/°C	L m	E N/m²	A m²
1	18.9×10^{-6}	0.8	83×10^{9}	2400×10^{-6}
2	23×10^{-6}	0.5	70×10^{9}	1200×10^{-6}
3	11.7×10^{-6}	0.4	200×10^{9}	600×10^{-6}

De (1) y (2)

R + kN ⇒ 3 kN

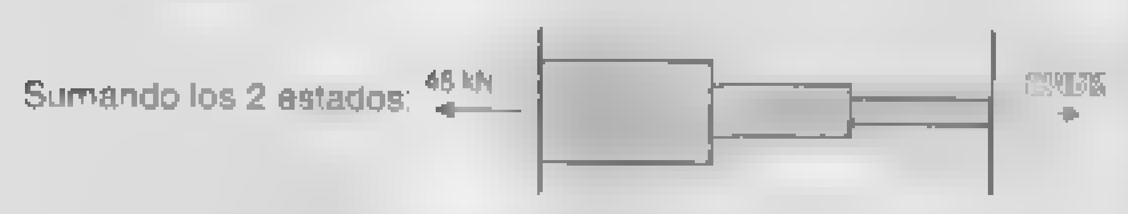
ii Considerando que solo actua $\Delta T = 50\ °C$



$\Delta_T = 0$

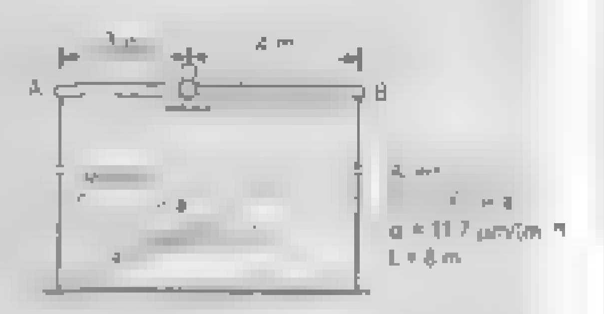
$\Rightarrow R_3 = 95\ kN$

Sumando los 2 estados:



$\sigma_1 = 20\ MPa \quad \sigma_2 = 82\ MPa \quad \sigma_3 \quad 23\ MPa$

277 La barra rígida AB está articulada mediante un perno en O y conectada a dos varillas según se muestra en la figura. Si la barra AB se mantiene en posición horizontal a determinada temperatura, calcule la relación de áreas de las varillas para que la barra AB se mantenga horizontal a cualquier temperatura. Desprecie la masa de la barra AB.



Resolución.

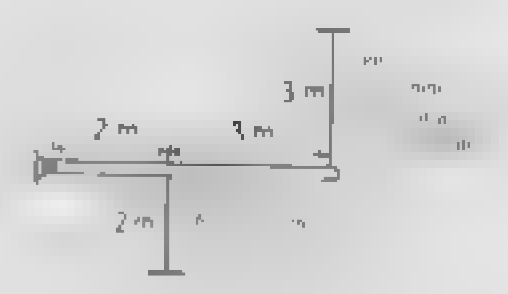
$F_1 = \alpha_1 \Delta T E_1 A_1$

$F_2 = \alpha_2 \Delta T E_2 A_2$

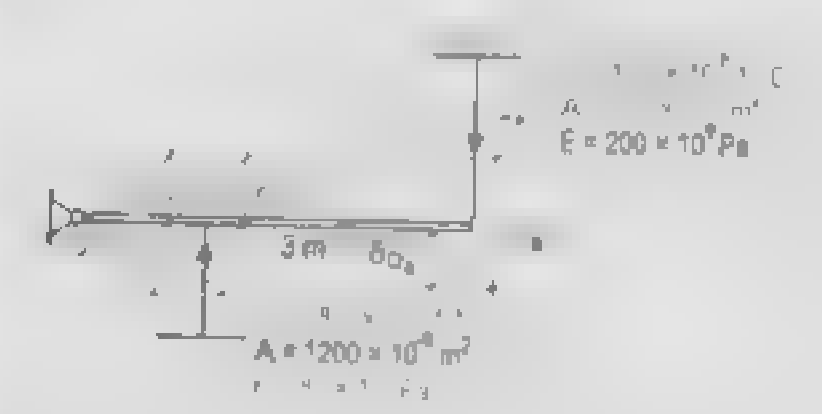
Condición del problema: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha_2 E_2}{\alpha_1 E_1}\right)$

278 Una barra rígida horizontal de masa despreciable está conectada a dos varillas según se muestra en la figura. Si el sistema está originalmente libre de esfuerzos, determine el cambio de temperatura que causará un esfuerzo de tensión de 60 MPa en la varilla de acero.



Resolución.



Si: $\frac{Q_a}{A_a} = 60\ MPa \Rightarrow Q_a = 54\ kN$, $Q_b = ?$

Del gráfico. $\delta_a = \delta_{T_a} - \delta_{Q_a}$

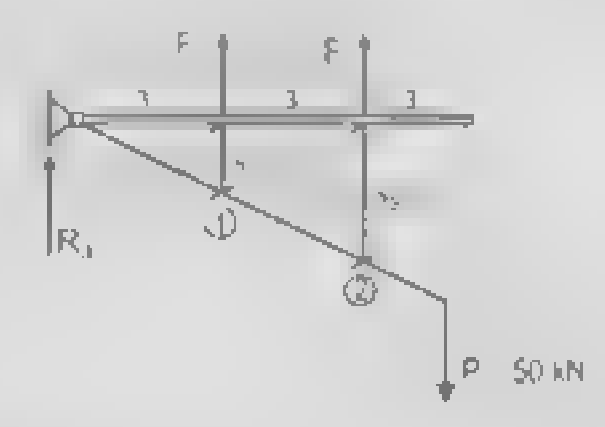
También: $\frac{\delta_a}{\delta_b} = \frac{3}{5} \wedge \Sigma M_O = 0 \rightarrow Q_a(5) = Q_b(2) \Rightarrow Q_b = 135\ kN$

$\Rightarrow \boxed{\Delta T = -58{,}5\ °C}$

279 Para el conjunto mostrado en la figura, determine el esfuerzo en cada una de las dos varillas verticales si la temperatura se eleva 40 °C después que se aplica la carga P = 50 kN. Desprecie la deformación y la masa de la barra horizontal AB.

Resolución:

a) Considerando solo la acción de la fuerza P



$$\Sigma F_v = F_1 + F_2 + R_1 - P = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma M = 3F_1 + 6F_2 - 9P = 0 \qquad (2)$$

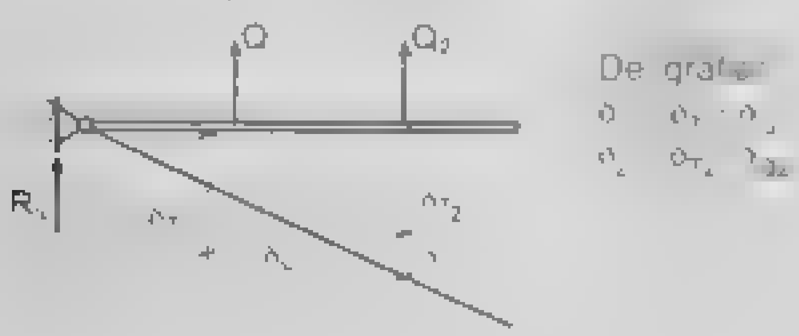
Del gráfico: $2\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow 2\left(\frac{F_1L_1}{E_1A_1}\right) = \frac{F_2L_2}{E_2A_2}$ (3)

Resolviendo

	α (°C)	E (N/m²)	A (m²)	L (m)
1	2[illegible] × 10[illegible]	[illegible] × 10[illegible]	900 × 10[illegible]	3
2	11,7 × 10[illegible]	200 × 10[illegible]	600 × 10[illegible]	4

$F_1 = 22,4$ kN $F_2 = 63,8$ kN ∧ $R_3 = -36,2$ kN

b) Considerando que solo actua ΔT = 40 °C



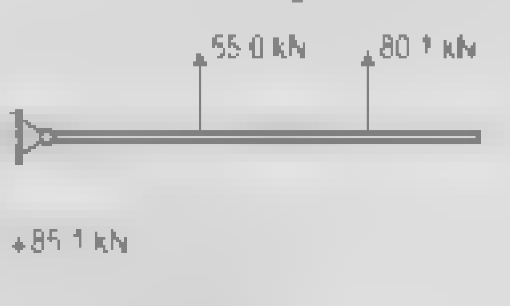
$$\Sigma F_V = Q_1 + Q_2 + R_3' = 0 \qquad (1)$$
$$3Q_1 - 6Q_2 = 0 \qquad (2)$$

Luego: $\dfrac{\alpha_1 L_1 \Delta T - Q_1L_1/E_1A_1}{\alpha_2 L_2 \Delta T + Q_2L_2/E_2A_2} = \dfrac{3}{6}$

Resolviendo

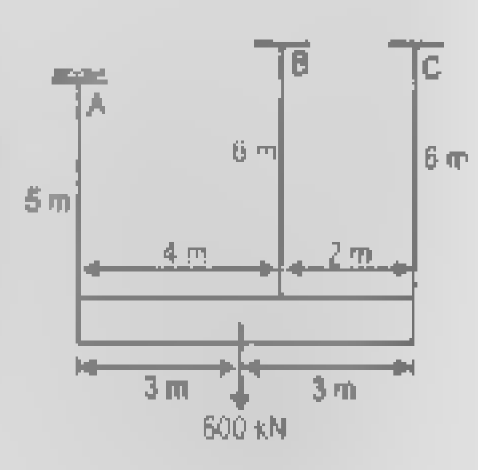
$Q_1 = 32.6$ kN $\quad Q_2 = 16.3$ kN $\quad R'_3 = -48,9$ kN

Finalmente sumando los estados de carga



$\sigma_1 = 61$ MPa
$\sigma_2 = 133$ MPa

280 Los extremos inferiores de las tres varillas de acero de la figura, están al mismo nivel antes de aplicar la fuerza de 600 kN. Las tres varillas tienen la misma sección, A = 2000 mm², α = 11,7 μm/(m.°C) y E = 200 × 10⁹ N/m². Determinar la relación entre la fuerza en la varilla C y el cambio de temperatura ΔT medido en grados Celsius, despreciando la masa de la placa rígida.



Resolución:

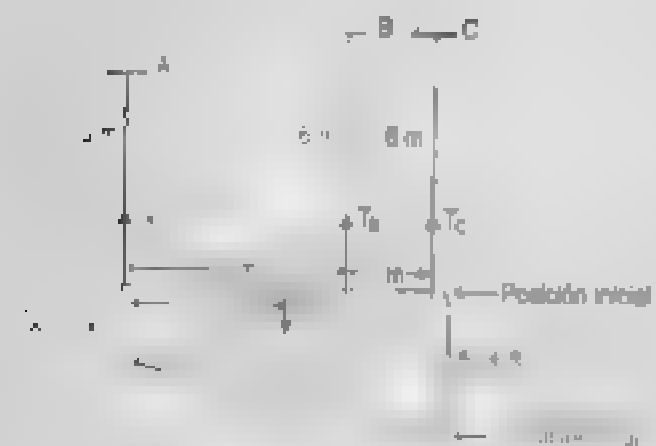
Por efecto de la carga de 600 kN, se producen fuerzas distintas en las varillas A B y C. A su vez el cambio de temperatura causa dilatación (o contracción) en cada varilla.

Sean las fuerzas: T_A, T_B, T_C

Los elongaciones: δ_A, δ_B, δ_C

Los incrementos por la temperatura: $\delta_{tA}, \delta_{tB}, \delta_{tC}$

Del gráfico



Por las leyes de la estática

$\Sigma F_y = 0 : T_A + T_B + T_C = 600 \text{ kN}$ ...(1)

$\Sigma M_A = 0 \quad 4T_B + 6T_C = 3(600 \text{ kN})$ ...(2)

De la relación de elongaciones

$$\frac{(\delta_C + \delta_{tC}) - (\delta_A + \delta_{tA})}{(\delta_B + \delta_{tB}) - (\delta_A + \delta_{tA})} = \frac{6}{4} \quad (3)$$

(4)

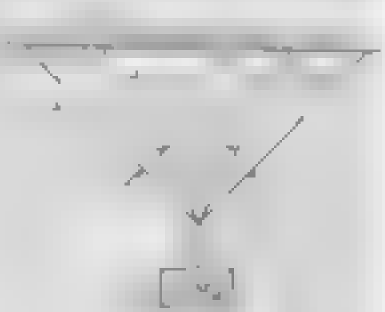
Resolviendo

$T_C = \dfrac{\ldots}{83} = \dfrac{\ldots}{83}$

$$\boxed{T_C = \frac{14\,700 + 9.36\,\Delta t}{83}}$$

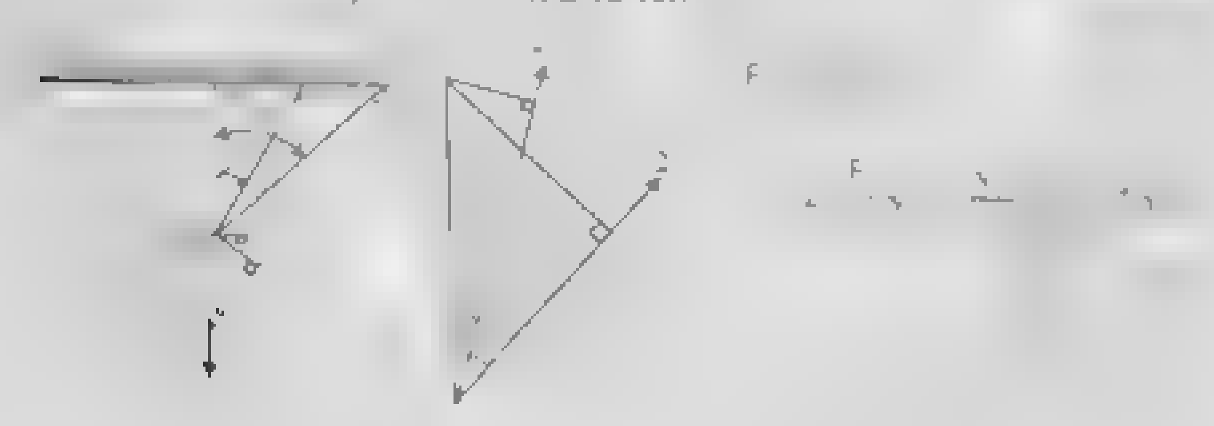
Relación de fuerza en C y el cambio de temperatura [T_C está en kN]

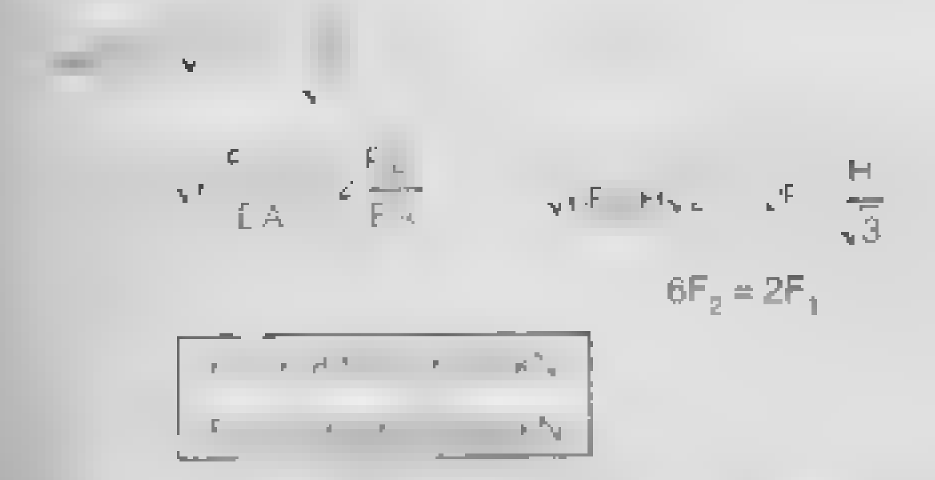
281 Como se observa en la figura, cuatro barras de acero soportan una masa de 15 Mg. Cada barra tiene una sección de 600 mm². Determinar la fuerza de tensión en cada barra después de un incremento de temperatura de 50 °C. $\alpha = 11.7\ \mu m/(m\ °C)$ y $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$



Resolución

a) Considerando que solo actúa 15 ton

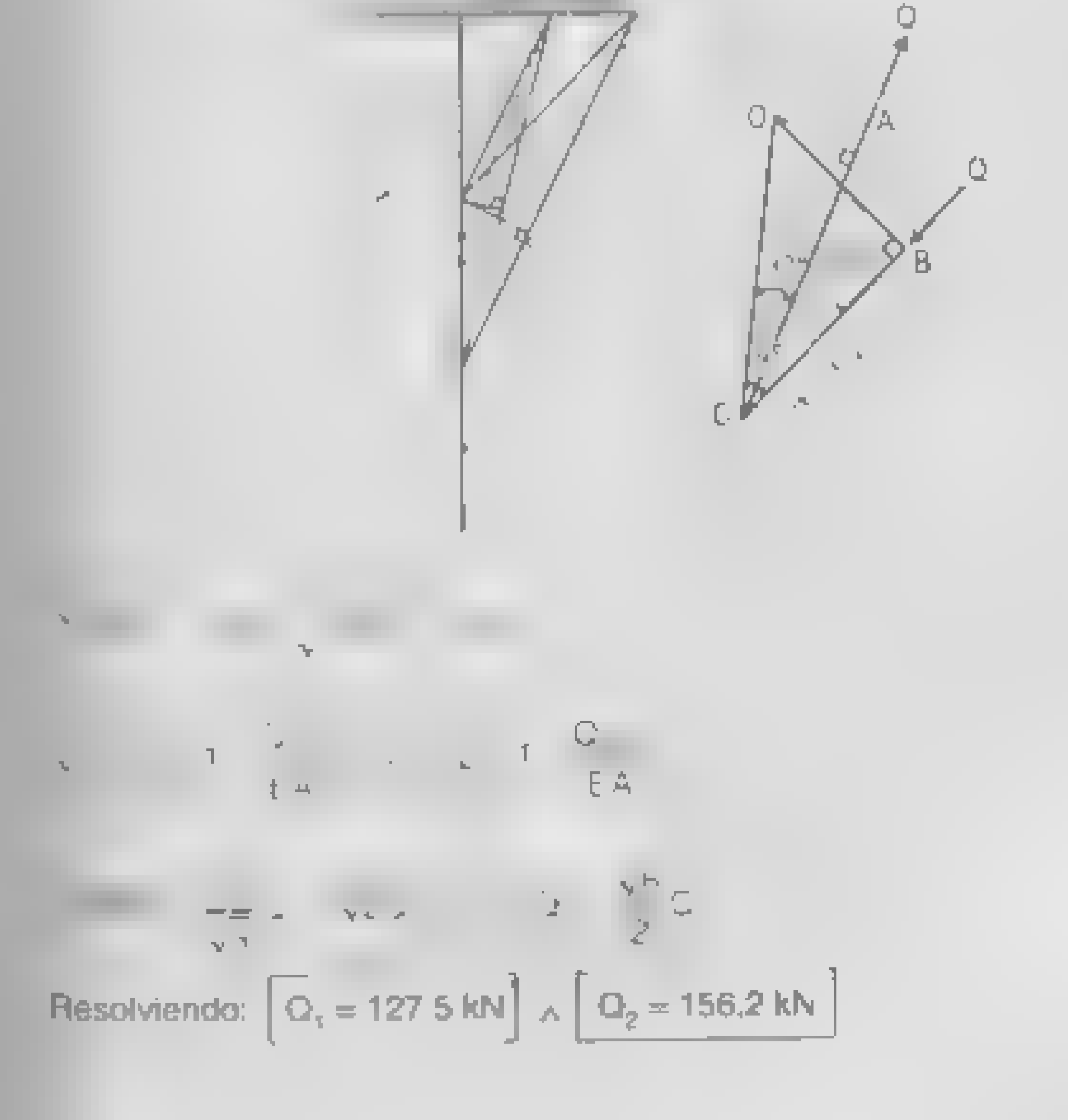




$6F_2 = 2F_1$

... A y D ... y B y C de ... Para este metal $\alpha = 23.0\ \mu m/(m\ °C)$ y $E = 70 \times 10^9\ N/m^2$

Resolución



Resolviendo: $\boxed{Q_1 = 127.5 \text{ kN}} \wedge \boxed{Q_2 = 156.2 \text{ kN}}$

CAPÍTULO 3

TORSIÓN

301; 302; 303 problemas ilustrativos

304 Calcular el mínimo diámetro de un árbol de acero que, sometido a un momento torsionante de 14 kN m, no debe experimentar una deformación angular superior a 3° en una longitud de 6 m. ¿Cuál es, entonces, el esfuerzo cortante máximo que aparecerá en él? Use G = 83 GN/m²

Resolución.

Sabemos que: $J = \frac{\pi}{32} d^4 \wedge \theta = \frac{TL}{JG}$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32TL}{\pi\theta G}} \qquad d = \sqrt[4]{\frac{32(14\times10^3)(6)}{\pi(\pi/60)83\times10^9}} = 0{,}118 \text{ m} \quad \therefore \quad \boxed{d = 118 \text{ mm}}$$

Además

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{Td}{2J} = \frac{14\times10^3\times118}{2\times\frac{\pi}{32}(118)^4} = 43{,}4 \quad \therefore \quad \boxed{\tau_{máx} = 43{,}4 \text{ MN/m}^2}$$

305 En un árbol macizo de 5 m de longitud, en el que el ángulo total de torsión es de 4°, el esfuerzo cortante máximo es de 60 MPa. Si G = 83 GPa, calcular su diámetro. ¿Qué potencia podrá trasmitir a 20 r/s?

Resolución:

Sabemos que

$$\theta = \frac{TL}{JG} \wedge \tau_{máx} = \frac{T}{J}(d/2) \Rightarrow \theta = \frac{2\tau_{máx}}{d}\frac{L}{G} \Rightarrow d = \frac{2\tau_{máx}}{\theta}\frac{L}{G}$$

Reemplazando

$$d = \frac{2(60\times10^6)5}{(\pi/45)(83\times10^9)} = 0{,}1035 \text{ m} \quad \therefore \quad \boxed{d = 104 \text{ mm}}$$

Además. $\mathcal{P} = 2\pi f T \wedge T = \frac{\tau\pi d^3}{16}$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = 2\pi f\, \tau\pi d^3/16 = 2\pi^2(20)(60\times10^6)(0{,}104)^3/16 \quad \therefore \quad \boxed{\mathcal{P} = 1{,}67 \text{ MW}}$$

3.6

Resolución:

$$L = \frac{\theta d G}{2\tau_{max}} \Rightarrow L = \frac{(\ldots)(4\pi)(35\times10^{4})}{2(70\times10^{6})} \Rightarrow \boxed{L \approx 6{,}28\ m}$$

4,5 MW ... 3 ...

... grado en una long...

Determinar el diámetro más apropiado si G = 83 GN/m²

Resolución

Aplicando la ecuación $T = \frac{P}{2\pi f}$, tenemos

$T = 4{,}5 / (2\pi \times 3) = 0{,}75/\pi\ (0{,}238)$ MN m

Luego: $\tau = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(0{,}75/\pi)}{\ldots} \leq \ldots \quad d \geq 0{,}289$ m

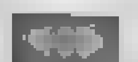
Además: $\theta = \frac{32TL}{\pi d^4 G} = \frac{32(0{,}75/\pi)\times10^6(0{,}25)}{\pi d^4\, 83\times10}$

que tiene un árbol macizo del mismo diámetro exterior

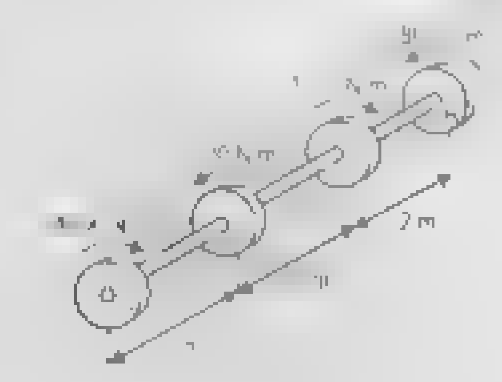
Resolución

Para el árbol macizo: (II) τ_M

$\tau_H \quad \pi\left(\frac{15}{16}D^3\right) \quad \boxed{16}$



bre él, según se muestra en la figura. Usando ... ángu... A

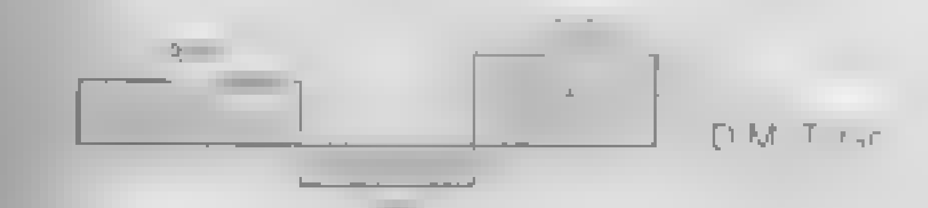


Resolución

A B C

$800 - 1000 - T \ldots \quad T \ldots -200$

$800 - 1000 - 1200 - T_3 = 0 \Rightarrow T_3 = 1000$



D.M.T.

$(800)(3) + (-200)(3) + (1000)(\ldots)$

$\frac{\pi}{32} \ldots 83 \times 10$

310 Determinar el máximo momento torsionante que puede soportar un [illegible] hueco de sección de 100 mm y 70 mm de diámetro exterior e interior respectivamente, sin que se sobrepase un esfuerzo cortante de 60 × 10[illegible] y sin que la deformación sea superior a [illegible] G = 83 × 10[illegible] N/m[illegible]

Resolución

Sabemos que $J = \frac{\pi}{32}(0,1^4 - 0,07^4) = \frac{\pi}{32}(7,599 \times 10^{-5})$

1. $T = \tau_{max}\frac{J}{C} = \frac{60 \times 10^6 \left(\frac{\pi}{32}\right)(7,599 \times 10^{-5})}{0,05} \Rightarrow T = 8\,952$ kN.m

2. $T = JG\phi = \frac{\pi}{32}(7,599 \times 10^{-5})(83 \times 10^9)\left(\frac{\pi}{...}\right) \Rightarrow T = 9,726$ kN.m

$\therefore$ $T_{max} \geq 8\,952$ kN.m

311. Un árbol de transmisión de acero consta de una parte hueca de 2 m de longitud y diámetros de 100 mm y 70 mm y otra parte maciza de 70 mm de diámetro y 1,5 m de longitud. Determinar el máximo momento torsionante que puede soportar sin que el esfuerzo sobrepase el valor de 70 MN/m[illegible] ni el ángulo total de torsión supere el valor de 2,5° en la longitud total de 3,5 m. Use G = 83 GN/m[illegible]

Resolución:

Aplicando las ecuaciones del esfuerzo tenemos

$\tau_H = \frac{16TD}{\pi(D^4 - d^4)} = \frac{16T(0,1)}{\pi(0,1^4 - 0,07^4)} \leq 70 \Rightarrow T \leq 9,4$ kN/m

$\tau_M = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{16T}{\pi(0,07)^3} \leq 70 \Rightarrow T \leq 4,71$ kN.m

Además

$\theta = \sum\theta = \sum\frac{TL}{JG} = \frac{T}{G}\left(\frac{L_H}{J_H} + \frac{L_M}{J_M}\right)$

$\theta = \frac{T}{83 \times 10^9}\left(\frac{2}{\frac{\pi}{32}(0,1^4 - 0,07^4)} + \frac{1,5}{\frac{\pi}{32}(0,07)^4}\right) = 2,5\left(\frac{\pi}{180}\right)$

$\Rightarrow T \leq 4,0$ kN.m $\quad$ $T_{max} = 4,0$ kN.m

312. Una transmisión flexible consta de un alambre de acero de 5 mm de diámetro encerrado en un tubo guía en el que encaja tan ajustado que se produce un par torsor resistente por fricción de 2 N. m/m. Determinar la máxima longitud que puede tener si el esfuerzo cortante no debe exceder de 140 MPa. ¿Cuál será el ángulo total de torsión? Use G = 83 GPa

Resolución.

Del diagrama

Si tomamos un diferencial de longitud.

T dx T

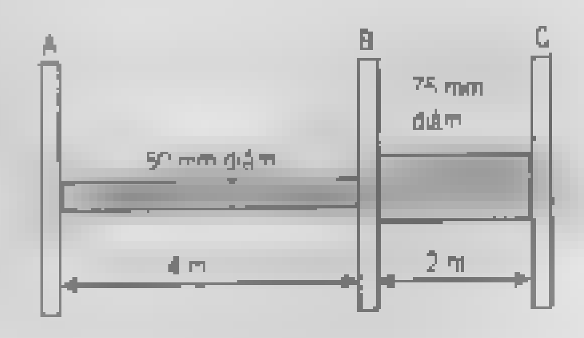
Tenemos: $\tau = \frac{16m_1 L}{\pi d^3}$

$\tau = \frac{16(2)L}{\pi(0,005)^3} \leq 140 \times 10^6 \Rightarrow L \leq 1,72$ m $\quad$ $L = 1,72$ m

Para el giro tenemos: $\int_0^\theta d\theta = \int_0^L \frac{Tdx}{JG} = \int_0^L \frac{m_1 x dx}{JG} = \frac{m_1}{JG}\int_0^L x dx$

$\theta = \frac{m_1 L^2}{2JG} = \frac{2(1,72)^2}{2(83 \times 10^9)\left(\frac{\pi}{32}(0,005)^4\right)}$ $\quad$ $\theta = 0,58 = 33,3°$

313. El árbol de la figura gira a 3 r/s absorbiendo 30 kW en A y 15 kW en B de los 45 kW aplicados en C. Si G = 83 × 10⁹ N/m², calcular el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión de la rueda A respecto de la rueda C. (Material acero).



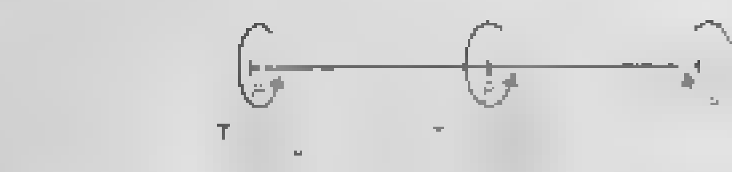
Resolución:

Calculamos los momentos torsionantes.

$T_B = \frac{P_{B \cdot C}}{2\pi f} = \frac{15 \times 10^3}{2\pi(3)} = \frac{2,5}{\pi}$ kN.m , $\quad T_A = \frac{P_{A \cdot B}}{2\pi f} = \frac{30 \times 10^3}{2\pi(3)} = \frac{5}{\pi}$ kN.m

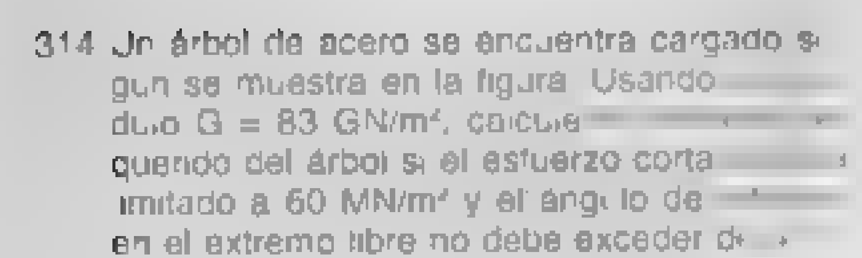
$\tau_{BC} = \frac{16T}{\pi d_{BC}^3} = \frac{16(7,5/\pi)}{\pi(0,075)^3} = 28,8$ MN/m² , $\quad \tau_{AB} = \frac{16T_{AB}}{\pi d_{AB}^3} = \frac{16(5/\pi)}{\pi(0,05)^3} = 64,9$ MN/m²

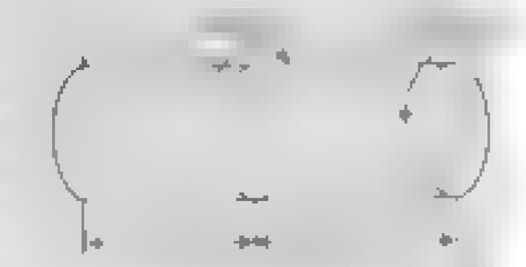
El esfuerzo máximo es: $\tau_{max} = \tau_{AB} = 64,9$ MN/m²



Del equilibrio tenemos T

314 Un árbol de acero se encuentra cargado según se muestra en la figura. Usando un módulo G = 83 GN/m², calcule ... requerido del árbol si el esfuerzo cortante está limitado a 60 MN/m² y el ángulo de ... en el extremo libre no debe exceder de ...





Resolución

Del equilibrio tenemos que T = 500 N.m

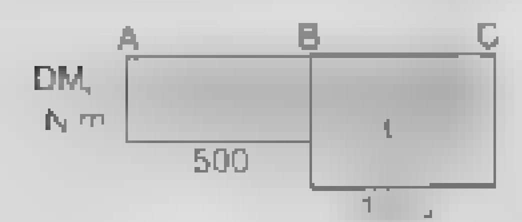
Tramo AB

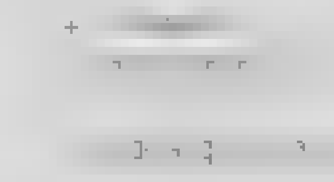
$T_{AB} = T = 500$ N.m $\Rightarrow$ $\tau_{AB} = \frac{16T}{\pi d^3}$ ... 60×10^6 $\Rightarrow$ $d \geq 0.035$

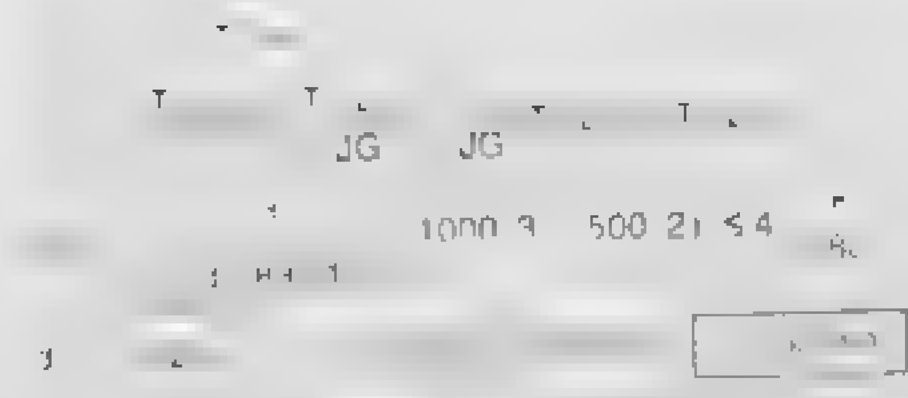
Tramo BC

$T_{BC} = 1000$ N.m $\Rightarrow$ $\tau_{BC} = \frac{16(1000)}{\pi d^3} \leq 60$ ...

Para calcular los giros, haremos el diagrama de ... cómo es el giro en la barra

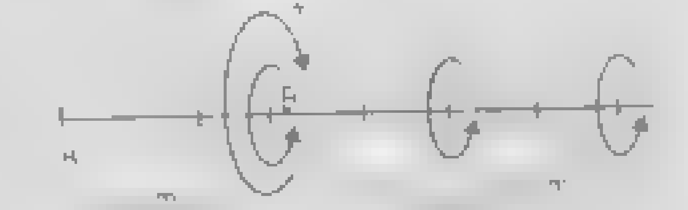






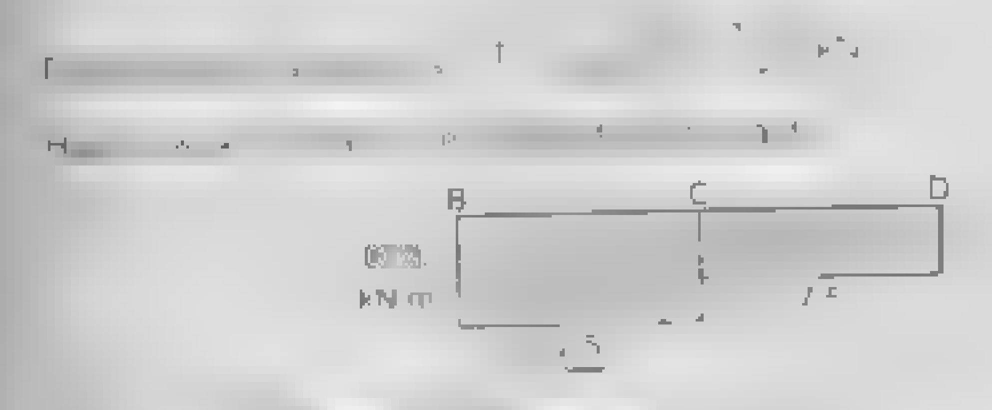
315 A un eje de sección ... longitud que gira a 2 r/s se le aplica 70 kW a través de ... situada ... m del extremo izquierdo, en donde se absorben ... m de este ... 20 kW. (a) Dimensionar el árbol si ... de ... N/m². (b) Si el eje tiene un diámetro ... ángulo total de torsión de un extremo a otro. Use G = 83 GN/m²

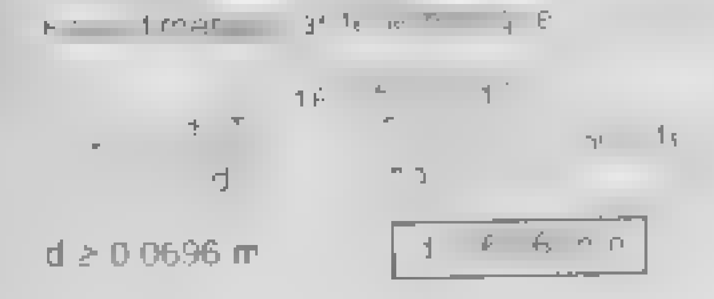
Resolución



Calculando los T

$\frac{20\times10^3}{2\pi.2} = ...$ kN   T   T ... kN





$d \geq 0.0696$ m

(b) Si $d = 100$ mm $\wedge$ $G = 83$ GN/m

donde $\theta_{D/A} = \theta_{DC} + \theta_{CB} = \sum \frac{T_L}{dG}$

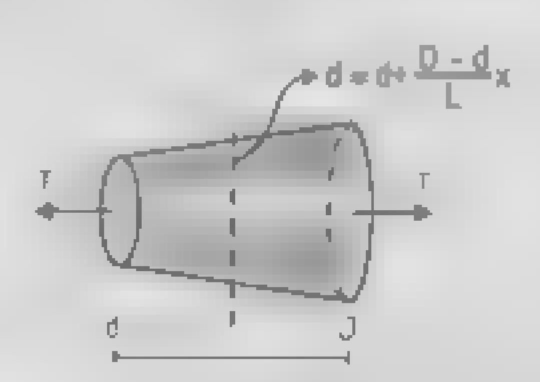
$$\Rightarrow \theta_{D/A} = \frac{T_{CB}(1,5)}{\frac{\pi}{32}d^4\, 83\times 10^{9}} + \frac{T_{DC}(1,5)}{\frac{\pi}{32}d^4\, 83\times 10^{9}}$$

$$\theta_{D/A} = \frac{\frac{12,5}{\pi}(1,5)\times 10^3}{\frac{\pi}{32}(0.1)^4(83\times 10^9)} + \frac{\frac{7,5}{\pi}(1,5)\times 10^3}{\frac{\pi}{32}(0.1)^4(83\times 10^9)}$$

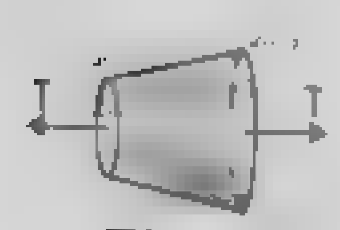
$$\boxed{\theta_{D/A} = 0.0117 \text{ rad} = 0.671^\circ}$$

316 Un eje de acero de 3 m de longitud tiene un diámetro que varía uniformemente desde 60 mm en un extremo hasta 30 mm en el otro. Suponiendo que es válida la ecuación [illegible] en cada elemento diferencial de longitud sin error apreciable, determinar el ángulo total de torsión si trasmite un par torsor de 170 N m. Use $G = 83 \times 10^3$ MN/m²

Resolución.



Si tomamos un diferencial de longitud, podemos determinar el giro diferencial



Cuando $dx \to 0$ [illegible]

$$d\theta = \frac{T\,dx}{J_x G}$$

Integrando obtenemos: $\theta = \int \frac{T\,dx}{J_x G}$ (I)

Además: $J_x = \frac{\pi}{32}\left(d + \frac{D-d}{L}x\right)^4$ (II)

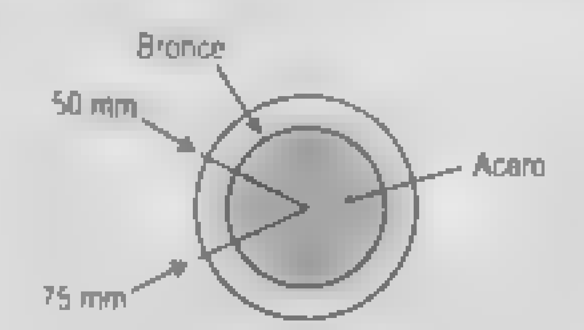
(II) en (I): $\theta = \frac{T}{G}\int \frac{dx}{\frac{\pi}{32}\left(d + \frac{D-d}{L}x\right)^4} = \frac{32\,TL}{3\pi G D^3 d^3}(D^2 + Dd + d^2)$

$$\boxed{\theta = 0.02259 \approx 1.29^\circ}$$

317 Un árbol hueco de bronce de 75 mm de diámetro exterior y 50 mm interior tiene dentro un eje de acero de 50 mm de diámetro y de la misma longitud, estando ambos materiales firmemente unidos en los extremos del eje. Determinar el máximo esfuerzo en cada material cuando se somete el conjunto a un par torsor de 3 kN m. G = 35 GN/m² para el bronce y G = 83 GN/m² para el acero.

Resolución:

Árbol hueco de bronce:



Como están firmemente unidos, ambos giran el mismo ángulo

$$\theta_{bronce} = \theta_{acero}$$

$$\frac{T_B L}{J_B G_B} = \frac{T_A L}{J_A G_A}$$

$$\frac{T_B}{\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)35} = \frac{T_A}{\frac{\pi}{32}(d^4)83} \Rightarrow T_B = 1,7131\,T_A$$

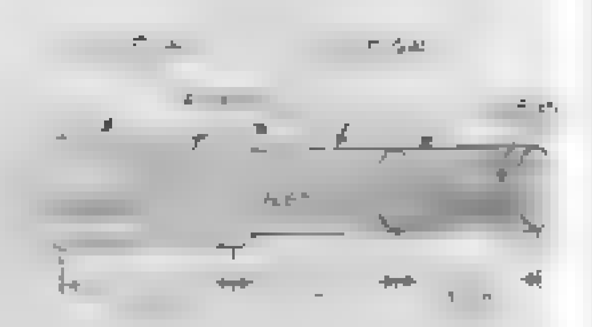
Además: $T_B + T_A = T = 3000$ N m

$T_B = 1894,3$ y $T_A = 1105,7$

Luego: $\tau_{bronce} = \frac{T_B c}{J} = \frac{1894,3\times 0,375}{\frac{\pi}{32}(0,075^4 - 0,05^4)} \Rightarrow \boxed{\tau_{bronce} = 28,5 \text{ MN/m}^2}$

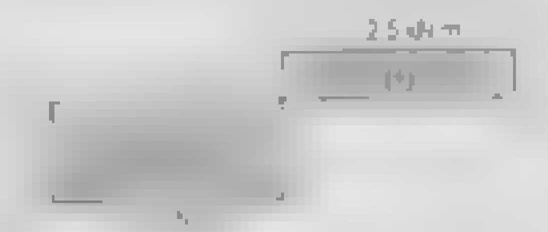
$\tau_{acero} = \frac{T_A c}{J} = \frac{1105,7\times 0,25}{\frac{\pi}{32}(0,05)^4} \Rightarrow \boxed{\tau_{acero} = 45,1 \text{ MN/m}^2}$

318 Un árbol compuesto está constituido con tres materiales diferentes y sujeto a dos pares aplicados según se ilustra en la figura. (a) Calcule el máximo esfuerzo cortante desarrollado en cada material. (b) Calcule el ángulo de rotación del extremo libre del árbol. Use los siguientes valores: $G_{al} = 28$ GN/m², $G_{ac} = 83$ GN/m² y $G_{br} = 35$ GN/m²



Resolución:

a) Construimos el diagrama de momento torsor



Luego para el aluminio

$$\tau_{al} = \frac{T_{al}c}{J_{al}} = \frac{2500 \times 0.05}{\frac{\pi}{32}(0,1^4)} = \boxed{12,73\ \text{MN/m}^2}$$

Acero

$$\tau_{ac} = \frac{T_{ac}\,c}{J_{ac}} = \frac{1\,500 \times 0.0375}{\frac{\pi}{32}(0.075^4)} = \boxed{18,11\ \text{MN/m}^2}$$

Bronce

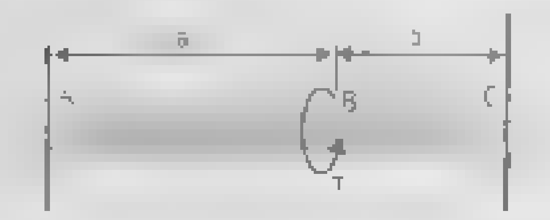
$$\tau_{br} = \frac{T_{br}\,[illegible]}{J_{br}} = \frac{[illegible]}{\frac{\pi}{32}(0.075^4)} = \boxed{[illegible]\ \text{MN}[illegible]}$$

b) Calculamos los giros por tramos

$$\theta_{al} = \frac{T_{al}L_{al}}{J_{al}G_{al}} = \frac{2500 \times 3}{\frac{\pi}{32}(0,1)^4\ [illegible]\ 28\ [illegible]\ 10^9} = \boxed{1,56}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{ac} = -0,67°} \quad \text{y} \quad \boxed{\theta_{br} = -1,19}$$

319 E[illegible]e árbol de la figura [illegible] do en sus extremos, la porción AB tiene 75 mm de diámetro y es de bronce, con $\tau \leq 60$ MN/m² y G = 35 GN/m². La porción BC es de acero, de 50 mm de diámetro, $T \leq 80$ MN/m² y G = 83 GN/m². Si a = 2 m y b = 1,5 m, determinar el par torsor máximo T que puede aplicarse en el punto B de unión de las dos partes



Resolución.

Liberamos A, luego. $\theta_{AB} + \theta$ [illegible]

$$\frac{T_{AB} \times 2}{\frac{\pi}{32} \times 0,075^4 \times 35} + \frac{T_{BC} \times 1,5}{\frac{\pi}{32}(0,05)^4 \times 83} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{[illegible]}\ [illegible]\ 1,6\,T_{[illegible]} \quad ([illegible]$$

$$[illegible] \quad T_{[illegible]} \geq \frac{[illegible] \times 1[illegible]\ \frac{\pi}{32}(0,075)[illegible]}{0,0375} \geq 4,97\ \text{kN m}$$

$$T_{acero} \geq \frac{80 \times 10^{[illegible]}\ [illegible]}{0,025} \geq 1,96\ \text{kN.m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{acero} \geq 1,96\ \text{kN.m}}$$

[illegible] En el problema anterior determine la relación de longitudes b/a que debe existir para que el acero y el bronce trabajen al máximo esfuerzo posible. ¿Qué par torsor T es necesario para ello?

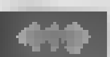
Resolución:

Bronce: D = 75 mm , τ_{max} [illegible] MN[illegible] G [illegible] 35 GN[illegible]

Acero: D = 50 mm , $\tau_{max} = 80$ MN/m² G [illegible] 83 GN[illegible]

$$T_B = \frac{\tau J}{c} = \frac{60 \times 10^6 \times \frac{\pi}{32}(0,075)^4}{0.0375} = 4,97\ \text{kN}$$

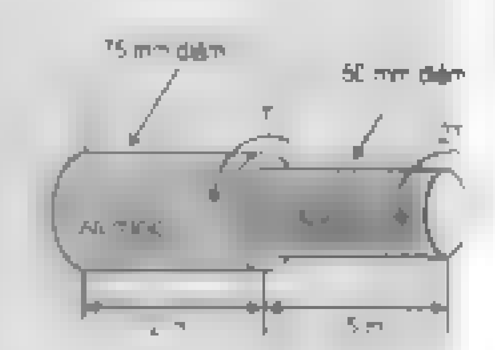
$$T_A = \frac{8[illegible]\ 10\ [illegible]\ \frac{\pi}{32}(0,[illegible])}{0.025} = 1,96\ \text{kN}$$



$$\frac{4970{,}1 \times a}{\frac{\pi}{32}(0{,}075)^4 \times 35} - \frac{1963{,}5 \times b}{\frac{\pi}{32}(0{,}05)^4 \times 83} = 0 \quad \Rightarrow \frac{b}{a} = 1{,}19$$

$T = T_B + T_A = 4970{,}1 + 1963{,}5 \quad \therefore \quad \boxed{T = 6{,}93 \text{ kN m}}$

321 Un árbol compuesto, que consta de un segmento de aluminio y uno de acero, está sometido a dos momentos de torsión como se muestra en la figura. Calcule el máximo valor admisible de T de acuerdo con las siguientes condiciones: $\tau_{ac} \leq 100$ MPa, $\tau_{al} \geq 70$ MPa, y el ángulo de rotación del extremo libre, limitado a 12°. Use los valores $G_{ac} = 83$ GPa y $G_{al} = 28$ GPa.

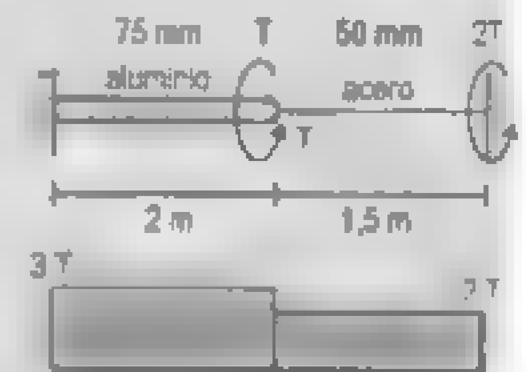


Resolución:

$\tau_{ac} \leq 100$ MPa $\qquad G_{ac} = 83$ GPa

$\tau_{al} \leq 70$ MPa $\qquad G_{al} = 28$ GPa

$\theta = 12°$



$$\tau_{ac} = \frac{2T(0{,}025)}{\frac{\pi}{32}(0{,}05)^4} = 81\,487{,}33T \leq 100 \times 10^6$$

$\Rightarrow T \leq 1227{,}2$

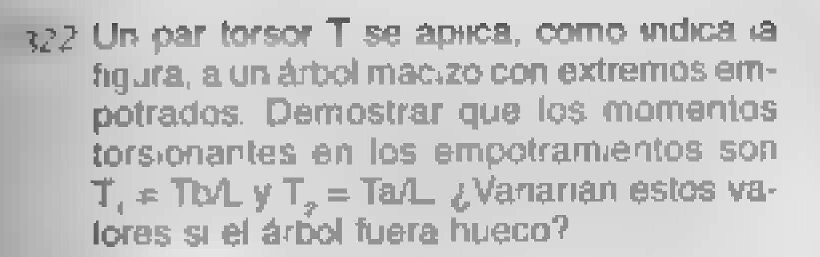
$$\tau_{al} = \frac{3T(0{,}0375)}{\frac{\pi}{32}(0{,}075)^4} = 36\,216{,}59T \leq 70 \times 10^6$$

$\Rightarrow T \leq 1932{,}8$

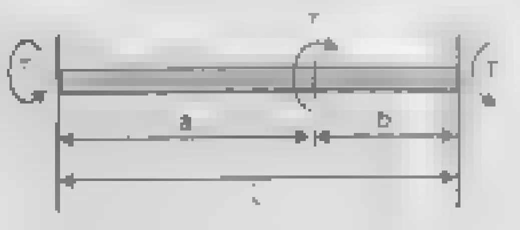
$$\theta = \frac{2T(1{,}5)}{83 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32}(0{,}05)^4} + \frac{3T(2)}{28 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32}(0{,}075)^4} = 1{,}2789 \times 10^{-4}\, T \leq 12° \times \frac{\pi}{180}$$

$T \leq 1637{,}3$

$\boxed{T = 1227{,}2}$



322 Un par torsor T se aplica, como indica la figura, a un árbol macizo con extremos empotrados. Demostrar que los momentos torsionantes en los empotramientos son $T_1 = Tb/L$ y $T_2 = Ta/L$. ¿Variarían estos valores si el árbol fuera hueco?



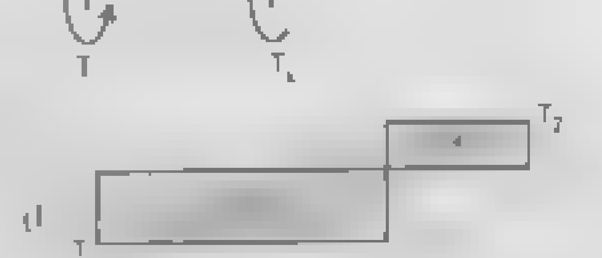
Resolución:

Equilibrio:

$T - T_1 + T_2 = 0$

$T_1 + T_2 = T \quad \text{(I)}$

Sabemos que



$$\theta_{B/A} = 0 = \frac{(-T_1)a}{JG} + \frac{T_2(b)}{JG} = 0 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{b}{a} \quad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

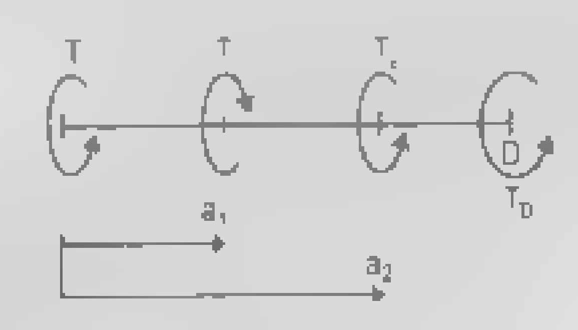
$$T_2\frac{b}{a} + T_2 = T \Rightarrow T_2\frac{b+a}{a} = T \Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{aT}{L}} \quad \text{l.q.q.d}$$

$$T_1 = T - T_2 = T - \frac{aT}{L} = \frac{bT}{L} \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{bT}{L}} \quad \text{l.q.q.d}$$

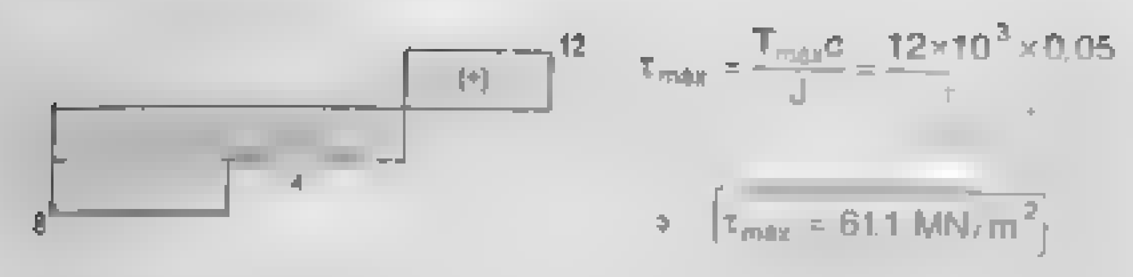
No variarían estos valores si el árbol es hueco.

323 Un árbol de 100 mm de diámetro y 3 m de longitud, con los extremos empotrados, se somete a un par torsor de 4 kN m aplicado a 1 m del extremo izquierdo y a otro del mismo sentido de 16 kN m a 2 m de ese extremo. Determinar el esfuerzo cortante máximo en cada porción del árbol. *Indicación*: aplicar el método de superposición con la resolución del problema anterior.

Resolución:



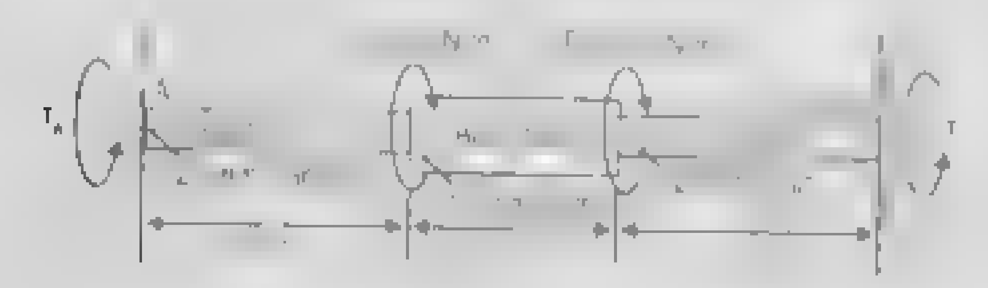
$$T = \frac{2 \times 4}{3} + \frac{1 \times 16}{3} = \frac{24}{3} = 8 \text{ kN m}$$



$$\tau_{máx} = \frac{T_{máx}c}{J} = \frac{12\times10^3\times0{,}05}{\ }$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 61{,}1\ MN/m^2}$$

324. Un árbol se compone de tres porciones AC, CD y DB soldadas entre sí y el conjunto firmemente empotrado en sus extremos y cargado como indica la figura. Para el acero G = 83 GN / m², para el aluminio G = 28 GN/m² y para el bronce G = 35 GN/m². Determinar la tensión cortante máxima en cada material.



Resolución:

Equilibrio

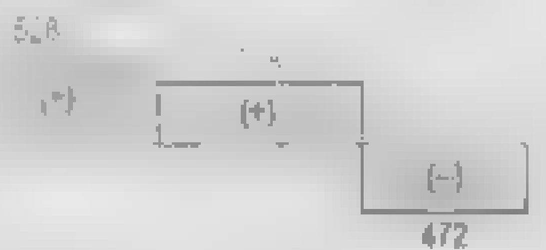
Compatibilidad de deformaciones (giros)

$$\theta_{\frac{B}{A}} = \theta_{\frac{C}{A}} + \theta_{\frac{D}{C}} + \theta_{\frac{B}{D}} = 0$$

$$\frac{T_A(2)}{0{,}025\ \ 83} + \frac{(T_A\ \ T_C)\times1{,}5}{\ } + \frac{(T_A\ \ T_C - T_D)}{\ }$$

$$\frac{2T_A}{83} + \frac{(T_A - 300)(1{,}5)}{16\times28} + \frac{(T_A\ \ 300 - 700)(1)}{35}\ \ 0 \Rightarrow$$

Dibujando el diagrama de momento torsor



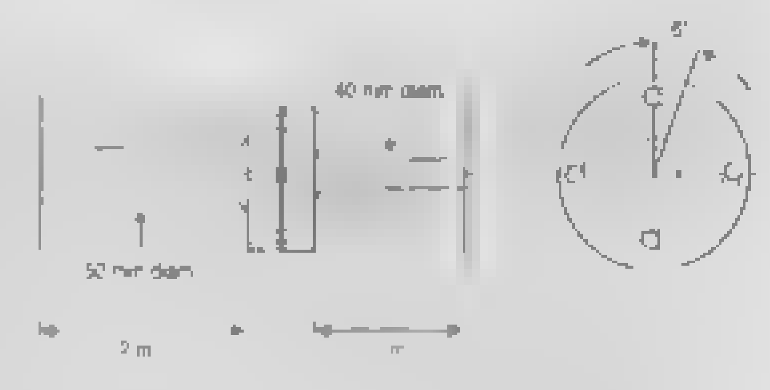
Sabemos que:

$$\tau_{acero} = \frac{528\times0{,}0125}{\frac{\pi}{32}(0{,}025)^4} \Rightarrow \boxed{\tau_{acero} = 172{,}1\ MN/m^2}$$

$$\tau_{aluminio} = \frac{228\times0{,}025}{\pi} \Rightarrow \boxed{\tau_{aluminio} = 9{,}3\ MN/m^2}$$

$$\boxed{\quad MN/m^2}$$

Los dos árboles de acero mostrados en la figura, cada uno con un extremo empotrado en un apoyo rígido, tiene sendas bridas rígidamente sujetas a sus extremos libres. Los ejes están atornillados uno al otro en sus bridas. Sin embargo, existe una desalineación de 6° en la localización de los barrenos de los tornillos según se ilustra en la figura. Calcule el máximo esfuerzo cortante en cada árbol una vez que los ejes se hayan atornillado uno al otro. Use un valor de G = 83 GN/m² y desprecie la deformación de tornillos y bridas.



Resolución

$$\frac{T(2)}{\pi\ \ } + \frac{(T)(1)}{\pi\ \ } = \frac{\pi}{30}$$

$$T = 1200\ N\ m$$

$$\boxed{\tau = 95{,}5\ MN/m^2}$$

326 Un acoplamiento por medio de bridas tiene 8 pernos de 20 mm de diámetro equidistantemente espaciados en un círculo de 300 mm de diámetro. Determine el par torsor que puede trasmitir si el esfuerzo cortante admisible en los pernos es de 40 MN/m²

Resolución

Sabemos que: $A = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}(0{,}02)$

$P = A\tau = 12\ 566{,}37\ N$

$T = PRn = P(D/2)n = (12\ 566{,}37)(0{,}3/2)(8) \Rightarrow$ $\boxed{T = 15{,}08\ kN\,m}$

327 Un [illegible] por medio de [illegible] conecta [illegible] 90 [illegible] y [illegible] diámetros exterior e interior de 100 y [illegible]. Si el esfuerzo cortante [illegible] es de 60 MN/m² [illegible] pernos de 10 mm que se necesitarían, dispuestos en una circunferencia de 200 mm de diámetro, para que el [illegible] el más débil de los árboles

Resolución:

Primero calculamos el momento torsor admisible

$$\tau = \frac{T(0{,}045)}{\frac{\pi}{32}(0{,}09)^4} = 6986{,}2T \leq 60 \times 10^6 \Rightarrow T \leq 8588{,}4\ N$$

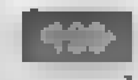
$$\tau = \frac{T(0{,}05)}{\frac{\pi}{32}\left[(0{,}01)^4 (0{,}09)^4\right]} = 14\ 809{,}4\ T \leq 60 \times 10^6 \Rightarrow T \leq 4051{,}5\ N$$

$T = 4051\ N$

También sabemos que:

$$T = PRn = A\tau Rn = \left(\frac{\pi}{4}d^2\right)\left(\frac{D}{2}\right)\tau n$$

$$n = \frac{8T}{\pi d^2 D\tau} = \frac{8 \times 4051}{\pi(0{,}01)^2(0{,}2)(60 \times 10^6)} = 8{,}59 \Rightarrow \boxed{n = 9\ \text{pernos}}$$



328 Un acoplamiento por medio de bridas tiene 6 pernos de 10 mm [illegible] en una circunferencia de 300 mm de diámetro y cuatro pernos del mismo diámetro, en otro círculo concéntrico de 200 mm de diámetro, como se indica en la figura. ¿Qué par torsor puede trasmitir sin que el esfuerzo cortante exceda de 60 MPa en los pernos?

Figura 3.7

Resolución

$D_1 = 300\ mm \Rightarrow R_1 = 150\ mm$

$d = 10\ mm$

$D_2 = 200\ mm \Rightarrow R_2 = 100\ mm$

Además $T = P_1R_1n_1 + P_2R_2n_2$; $\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{150}{100} = 1{,}5$

$$T = 60 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4}(0{,}01)^2 \times 0{,}15 \times 6 + 40 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4}(0{,}01)^2 \times 0{,}1 \times 4$$

$\boxed{T = 5{,}[illegible]\ kN\,m}$

329 Determine el número de pernos de acero de 10 mm de diámetro que se necesitan en el círculo exterior del problema anterior para poder trasmitir un par torsor de 8 kN m

Resolución

Datos

Sabemos que: $T = P_1R_1n_1 + P_2R_2n_2$

$$8 \times 10^3 = 60 \times 10^6\left(\frac{\pi}{4}(0{,}01)^2\right) \times 0{,}15 \times n_1 + 40 \times 10^6\left(\frac{\pi}{4}(0{,}01)^2\right) \times 0{,}1 \times 4$$

$n_1 = 9{,}5 \Rightarrow \boxed{n_1 = 10\ \text{pernos}}$

330 Resuelva el problema 328 si en el círculo interior los pernos son de 20 mm de diámetro

Resolución

Sabemos que: $T = \sum PRn_i = \sum \tau_i A_i R_i n_i$

También: $\frac{\tau_1}{G_1R_1} = \frac{\tau_2}{G_2R_2} \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = 1{,}5$

Entonces

$$T = 60 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}01^2 \times 0{,}15 \times 6 + 40 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}02^2 \times 0{,}1 \times 4$$

T [illegible] 26 kN m

331 En un conjunto de remaches sometidos a la acción de un par torsor demostrar que se puede aplicar la fórmula de la torsión $\tau = T\rho/J$ para determinar esfuerzo cortante [illegible] del conjunto de remaches

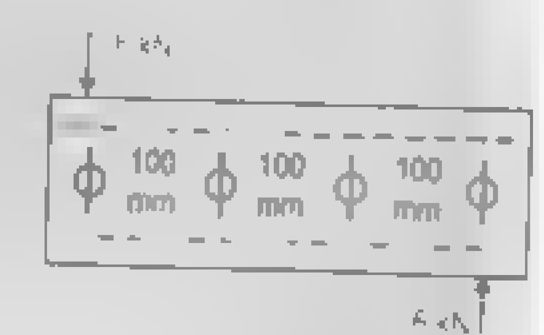
Resolución:

Tenemos que

$J = \sum A\rho^2$

Sabemos que: $P = A\tau$

332 Una placa se sujeta a un elemento fijo y rígido mediante cuatro remaches de 20 mm de diámetro, como se indica en la figura. Determinar el máximo y mínimo esfuerzos cortantes que aparecen en los remaches.



Resolución:

Del gráfico. $T = 16 \times 0.3 = 4.8$ kN m

$$J = \sum A\rho^2 = A\sum\rho^2 = \frac{\pi}{4}(0.02)^2\,[(0,05)^2 + (0,15)^2 + (0,15)^2 + (0.05)^2 + (0,15)^2]$$

$J = 15{,}7 \times 10^{-6}\ m^4$

$$\frac{[illegible]}{15{,}7\times10^{-6}} \Rightarrow \tau = 45.9\ MN/m^2$$

$$\frac{4.8\times10^3\times 0.05}{[illegible]} \qquad \tau = 15.3\ MN/m^2$$

Seis remaches de 20 mm de diámetro sujetan la placa de la figura a una base rígida. Determinar el esfuerzo cortante medio en cada remache producido por las fuerzas de 40 kN aplicados como se indica. ¿Qué fuerzas adicionales P podrían aplicarse sin que el esfuerzo cortante sobrepase el valor de 60 MN/m² en remache alguno?

Resolución.

$\rho = 0.05$ m

$\rho_2 = 0.09$ m

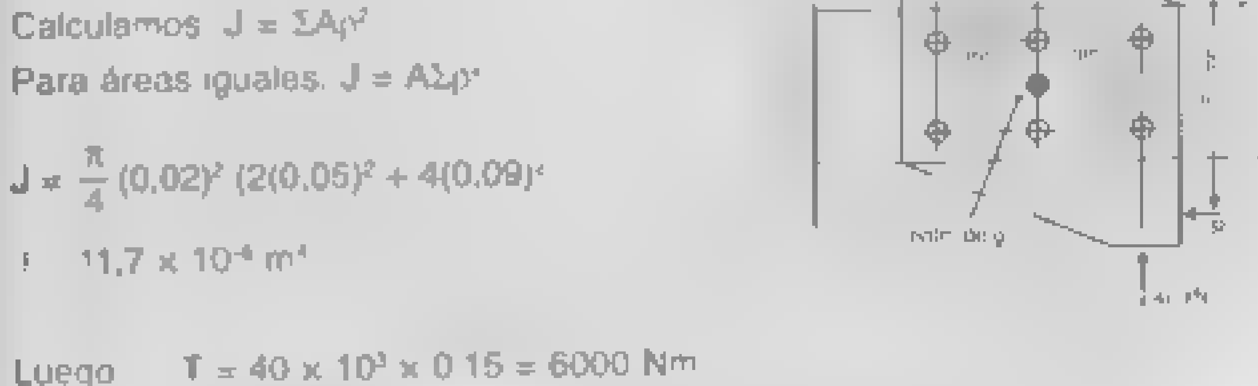
Ubicamos el centro de giro

Calculamos $J = \Sigma A\rho^2$

Para áreas iguales. $J = A\Sigma\rho^2$

$$J = \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2\,(2(0{,}05)^2 + 4(0{,}09)^2)$$

$J = 11{,}7 \times 10^{-6}\ m^4$



Luego $T = 40 \times 10^3 \times 0.15 = 6000$ Nm

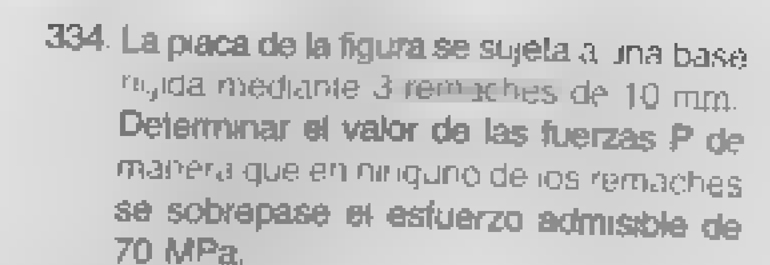
$$\tau = \frac{T\rho_1}{J} = \frac{6000 \times 0.05}{[illegible]} \qquad \tau = 25.6\ MN/m^2$$

$$\tau = \frac{[illegible]\ 0.09}{11{,}7\times10^{-6}} \Rightarrow \tau_2 = 46.1\ MN/m^2$$

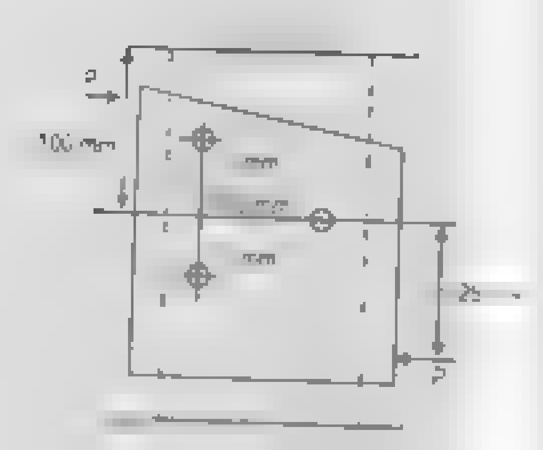
En vista de que $\tau_2 < 60\ MN/m^2 \Rightarrow P > 40$ kN

$$\tau = \frac{(P \times 0{,}25 - T)0.09}{[illegible]} \leq 60\times10^6\ N/m^2 \quad , \quad P \leq 55{,}2\ kN$$

P = 55.2 kN



334. La placa de la figura se sujeta a una base rígida mediante 3 remaches de 10 mm. Determinar el valor de las fuerzas P de manera que en ninguno de los remaches se sobrepase el esfuerzo admisible de 70 MPa.



Resolución:

Determinamos el centro de giro que está sobre el eje

$$r = \frac{2A(0) + A(150)}{3A} = \frac{150}{3} = 50 \text{ mm}$$

$$J = A\sum d = \frac{\pi}{4}(0{,}01)^2\{0{,}1^2 + 2(0{,}075^2 + 0{,}05^2)\}$$

$$J = 2{,}06 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} = \frac{(P \times 0{,}225) \times 0{,}09}{2{,}06 \times 10^{-6}} \le 70 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$P \le 7120$ N ∴ $\boxed{P = 7{,}12 \text{ kN}}$

335. Un acoplamiento por medio de bridas tiene seis pernos de acero de [illegible] mm de diámetro espaciados uniformemente en una circunferencia de [illegible] mm de diámetro y cuatro pernos de aluminio de 20 mm de diámetro en un círculo de 200 mm de diámetro. ¿Qué par torsor puede trasmitir [illegible] de 60 MN/m² en el acero o de 40 MN/m² en el aluminio? Para el acero G = 83 GN/m² y para el aluminio G_{al} = 28 GN/m².

Resolución.

Sabemos que

$$T = \tau_1 A_1 R_1 n_1 + \tau_2 A_2 R_2 n_2 \quad \text{(I)}$$

$$\frac{\tau}{G_1 R} \qquad \frac{\tau}{G R} \quad \text{(II)}$$

De (II) tenemos: $\frac{\tau_1}{(83)(150)} = \frac{\tau_2}{(28)(100)} \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = 4{,}45$

Si $\tau_1 = 60 \Rightarrow \tau_2 = 13{,}5$ MN/m² SI

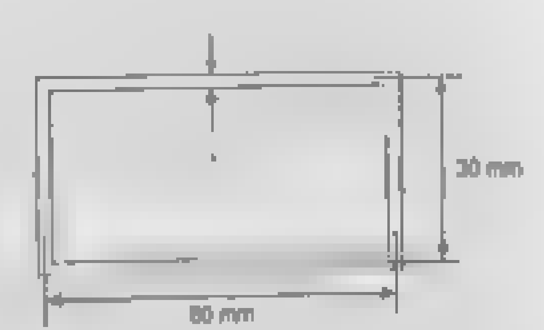
Si $\tau_2 = 40 \Rightarrow \tau_1 = 178$ MN/m² NO

$$T = 60 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times (0{,}01)^2 \times 0{,}15 \times 6 + 13{,}5 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4}(0{,}02)^2 \times 0{,}1 \times 4$$

$T = 5937$ N m $\Rightarrow \boxed{T = 5{,}94 \text{ kN m}}$

336. Problema ilustrativo

337. Se aplica un momento torsionante de 600 N m a un tubo de sección rectangular como el de la figura. Determinar el espesor t de sus paredes, de manera que el esfuerzo cortante no exceda de 60 MPa. Calcular el esfuerzo en los lados cortos. Despreciar la concentración de esfuerzos en las esquinas.

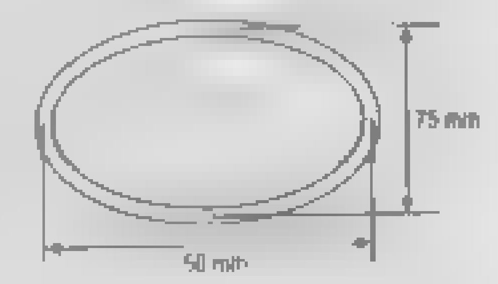


Resolución.

Sabemos que: $\tau = \frac{T}{2At}$ ∧ $A = bh = 0{,}03 \times 0{,}06 = 0{,}0018$ m²

$\Rightarrow \tau = \frac{600}{2(0{,}0018)t} \le 60 \times 10^6 \Rightarrow t \ge 2{,}8$ mm ∴ $\boxed{t = 3 \text{ mm}}$

338. Un tubo de 3 mm de espesor tiene una forma elíptica, como se indica en la figura. Hallar el momento torsionante que producirá en él un esfuerzo cortante de 60 MN/m².

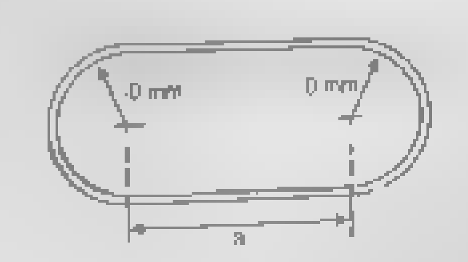


Resolución

De [illegible] tenemos $A = \pi a b = \pi \frac{0{,}15}{2} \cdot \frac{0{,}075}{2} = 8{,}84 \times 10^{-3}$

Además: $T = \tau(2At) = 60 \times 10^6 \times 2 \times 8{,}84 \times 10^{-3} \times 0{,}003 \Rightarrow \boxed{T = 3{,}18 \text{ kN m}}$

339. Un tubo de 3 mm de espesor tiene la forma y dimensiones que se indican en la figura. Calcular el esfuerzo cortante si se le aplica un momento torsionante de 700 N m y el valor de a es 75 mm.



Resolución

Sabemos que $\tau = \dfrac{T}{2At}$

Donde $T = 700$ N m ; $t = 3$ mm ; $a = 75$ mm

Del gráfico. $A = \pi(0.01)^2 + 0.075 \times 0.02 = 1.81 \times 10^{-3}$ m

$\tau = \dfrac{700}{2(1.81 \ \ )}$ $\boxed{\tau = 64.5 \text{ MPa}}$

[illegible]

Resolución.

Del gráfico anterior tenemos: $A = \pi \times 10^2 + a \times 20 = 314 + 20a$ mm²

$\Rightarrow \tau = \dfrac{700}{2(3\times10^{-3})(314+20a)10^{-6}} \le 70\times10^6 \Rightarrow a \ge 55.7$ $\boxed{a = 55.7 \text{ mm}}$

[illegible] cada fibra es proporcional a su distancia al centro

Resolución:

Para un anillo de espesor dρ, tenemos

$\tau = \dfrac{T}{2(\pi\rho^2)d\rho} \quad \dfrac{\ \ T}{\int_0^r \rho^2(2\pi\rho)d\rho}$ $\boxed{\tau = \dfrac{\rho T}{J}}$ l.q.q.d

342 Problema ilustrativo

343 Determinar el esfuerzo [illegible] soporta una carga de 2 kN. Aplicar la expresión (3-10). Con G = 83 GN/m²

Resolución:

Sabemos que $m = 2R/d = 2(80)/20 = 8 \Rightarrow 4m = 32$

La expresión 3 - 10 es: $\tau_{máx} = \dfrac{16PR}{\pi d^3}\left(\dfrac{4m-1}{4m-4} + \dfrac{0.615}{m}\right)$

$\tau = \dfrac{16(2\times10^3)(80\times10^{-3})}{\pi(20\times10^{-3})^3}\left(\dfrac{32-1}{32-4} + \dfrac{0.614}{8}\right)$

$\boxed{\tau = 121 \text{ MN/m}^2}$

También sabemos que:

$\delta = \dfrac{64PR^3n}{Gd^4} = \dfrac{64(2000)(0.08)^3(20)}{(83\times10^9)(0.02)^4}$ $\boxed{48.7 \text{ mm}}$

[illegible] el máximo alargamiento del resorte [illegible] está hecho de bronce fosforado para el que G = 42 GN/m² y el esfuerzo máximo puede ser de 140 MN/m². Aplicar (3-10)

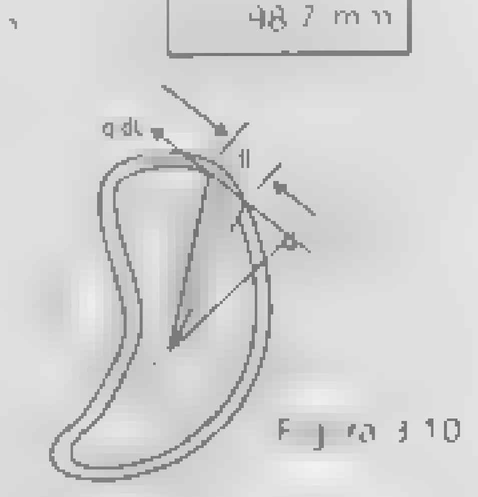


Figura 3.10

Resolución.

Del problema anterior vemos que: $\tau_{máx} = 121 \Rightarrow P = 2000$

$\Rightarrow \tau = \dfrac{140}{121} \times 2000 = 2314$ N

Luego. $\delta = \dfrac{64PR^3n}{Gd^4} = \dfrac{64(2314)(0.08)^3(20)}{(42\times10^9)(0.02)^4}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ \ \text{ mm}}$

[illegible] en [illegible] una varilla de 20 mm de diámetro [illegible] de 75 mm de diámetro. Determinar el número de espiras necesarias para permitir un alargamiento de 100 mm sin que el esfuerzo cortante exceda de 140 MPa. Aplicar (3-9) con G = 83 GPa

Resolución.

Sabemos que

$\dfrac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \dfrac{d}{4R}\right) = \dfrac{16P(75\times10^{-3})}{\pi(20\times10^{-3})^3}\left(1 + \dfrac{20\times10^{-3}}{4\times75\times10^{-3}}\right) \le 140\times10^6$

$\Rightarrow P \le 2{,}75$ kN

Además $\delta = \dfrac{64PR^3n}{Gd^4} = \dfrac{64(2.75\times10^3)(75\times10^{-3})^3 n}{(83\times10^9)(20\times10^{-3})^4} \le 100\times10^{-3}$

$\Rightarrow n \le 17.9$

346 Determinar el esfuerzo cortante máximo en un resorte de bronce fosforado de diámetro medio de 200 mm y formado por 24 vueltas de varilla de 20 mm de diámetro cuando se estira una longitud de 100 mm. Aplicar (3-10) con G = 42 GN/m²

Resolución:
Sabemos que

$$\frac{64PR^3n}{Gd^4}=\frac{64P(100\times10^{-3})^3 24}{(42\times10^9)(20\times10^{-3})^4}\le 100\times10^{-3} \quad\Rightarrow\quad P\le 437{,}5\ \text{N}$$

Además: $\tau_{máx}=\frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4}+\frac{0{,}615}{m}\right)$

Donde $m=\frac{D}{d}=\frac{200}{20}=10$

τ [illegible] 16(437,5) [illegible] 10 [illegible] 4(10) − 1 [illegible] 0,615 / π(0 [illegible] 10 [illegible] 4(10) − 4 [illegible] → **[illegible] 9 MPa**

347 Un embragué está accionado por seis resortes helicoidales dispuestos [illegible] Cada resorte [illegible] espiras de [illegible] de acero de 10 m [illegible] diámetro y un diámetro exterior de 5[illegible] mm. [illegible] fuerza que hay que [illegible] contra [illegible] de embrague para comprimir los resortes [illegible] de 4[illegible] mm. ¿Cuál será el esfuerzo cortante máximo en [illegible]? Aplicar (3-10) con G = 83 GN/m²

Resolución:

Sabemos que: $\delta=\frac{64PR^3n}{Gd^4}\quad\Rightarrow\quad P=\frac{\delta Gd^4}{64R^3n}$

Además: $\tau_{máx}=\frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4}+\frac{0{,}615}{m}\right)$

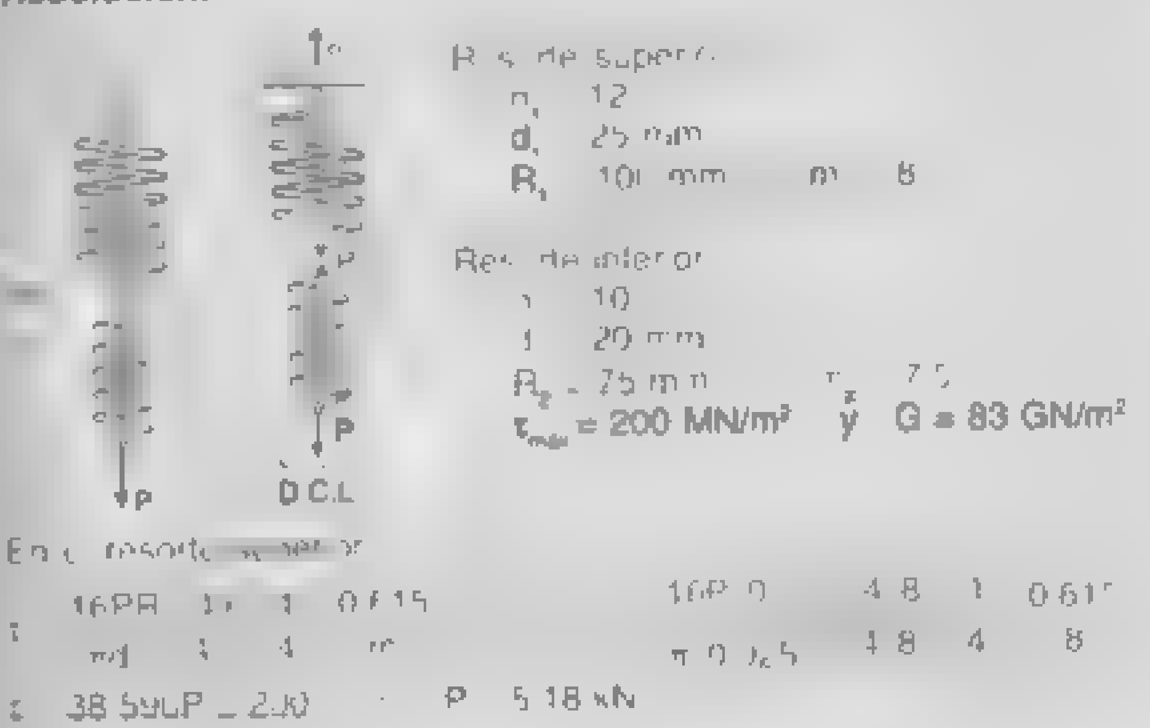
Donde

$m=2R/d=200/20=10 \quad\Rightarrow\quad 4m=40$

$$\tau=\frac{16(437{,}5)(0{,}1)}{\pi(0{,}02)^3}\left(\frac{40-1}{40-4}+\frac{0{,}615}{10}\right)\quad\Rightarrow\quad \boxed{\tau_{máx}=32\ \text{MN/m}^2}$$

348 Dos resortes de acero colocados en serie, como indica la figura, soportan una carga P. El resorte superior tiene 12 espiras de varilla de 25 mm de diámetro con un radio medio de 100 mm. El inferior tiene 10 espiras de varilla de 20 mm de diámetro con radio medio de 75 mm. Si el esfuerzo cortante no debe exceder en ninguno de ellos de 200 MN/m², determinar P y el alargamiento total del conjunto. Aplicar (3 - 10) con G = 83 GN/m². Calcular la constante del resorte equivalente dividiendo la carga entre el alargamiento.

Resolución:



Res. de superior: $n_1=12$; $d_1=25$ mm; $R_1=100$ mm; $m=8$

Res. de inferior: $n_2=10$; $d_2=20$ mm; $R_2=75$ mm; $m=7{,}5$

$\tau_{máx}=200$ MN/m² y G = 83 GN/m²

En el resorte superior:

$\tau=\frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4}+\frac{0{,}615}{m}\right)=\frac{16P(0{,}1)}{\pi(0{,}025)^3}\left(\frac{4(8)-1}{4(8)-4}+\frac{0{,}615}{8}\right)$

$\tau=38\,59[illegible]P \le 200 \quad\Rightarrow\quad P\le 5{,}18$ kN

En el resorte inferior:

$\tau=\frac{16P(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left(\frac{4(7{,}5)-1}{4(7{,}5)-4}+\frac{0{,}615}{7{,}5}\right)\quad\Rightarrow\quad \tau=57\,170{,}9P\le 200 \quad\Rightarrow\quad P\le 3{,}5$ kN

$\therefore\ \boxed{P=3{,}5\ \text{kN}}$

Para calcular el alargamiento total: $\delta_T=\delta_1+\delta_2$

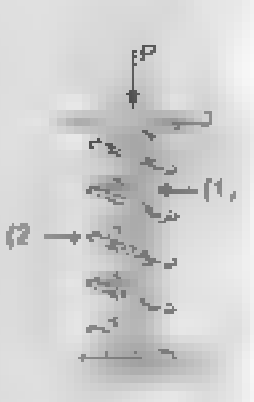
$$\delta_1=\frac{64PR_1^3n_1}{Gd_1^4}=\frac{64(3{,}5)(0{,}1)^3(12)}{(83\times10^6)(0{,}025)^4}=0{,}0829\ \text{m}$$

$$\delta_2=\frac{64PR_2^3n_2}{Gd_2^4}=\frac{64(3{,}5)(0{,}075)^3(10)}{(83\times10^6)^4(0{,}02)^4}=0{,}0711\ \text{m}$$

$\delta_T = 0{,}154$ m $\Rightarrow$ $\boxed{\delta_T = (15{,}4 \text{ cm})}$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{3{,}5\times10^3}{0{,}154} \Rightarrow \boxed{k = 22{,}7 \text{ kN/m}}$$

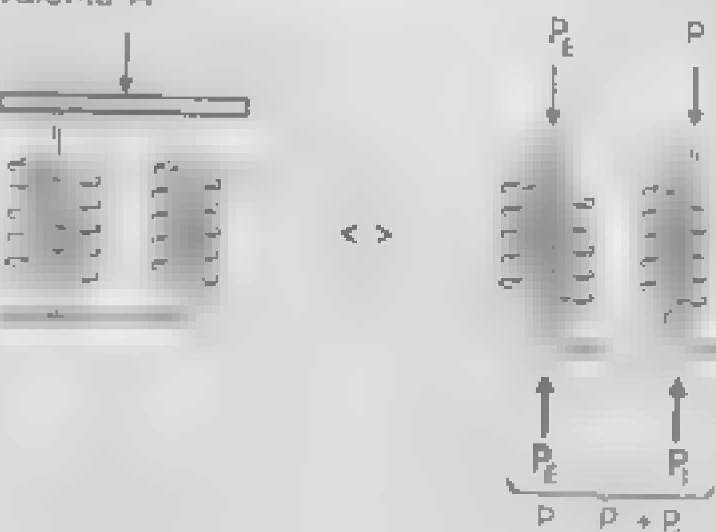
349 Una carga P está soportada por dos resortes helicoidales colocados concéntricamente uno dentro de otro, como se observa en la figura. El interior tiene 30 espiras de alambre de 20 mm de diámetro sobre un radio medio de 150 mm y el exterior, 20 espiras de alambre de 30 mm con un radio medio de 200 mm. Determinar la carga máxima P que pueden soportar, de manera que no se sobrepase el esfuerzo cortante admisible de 140 MPa en cada resorte. Aplicar (3-9) con G = 83 GPa. Inicialmente los dos resortes tienen sus extremos superiores al mismo nivel.



Resolución

Tenemos 2 resortes concéntricos ... ambos tendrán la misma deformación δ.

El sistema es equivalente A



Del equilibrio tenemos que: $P = P_i + P_E$ ...(I)

Además

$$\delta_i = \delta_E \Rightarrow \frac{64 P_i R_i^3 n_i}{G d_i^4} = \frac{64 P_E R_E^3 n_E}{G d_E^4}$$

Reemplazando tenemos

$$\frac{P_i(0{,}15)^3(30)}{(0{,}02)^4} = \frac{P_E(0{,}2)^3(20)}{(0{,}03)^4} \Rightarrow \frac{P_E}{P_i} = 3{,}2036 \Rightarrow P_i = 0{,}238P$$

$$P_E = 0{,}762P$$

Aplicando $\tau = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R}\right)$

Reemplazando los datos tenemos

$$\tau = \frac{16(0{,}238P)(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left[1 + \frac{0{,}02}{4(0{,}075)}\right] \Rightarrow \tau = 12121{,}24P \le 140$$

$$\Rightarrow P \le 11{,}55 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{16(0{,}762P)(0{,}1)}{\pi(0{,}03)^3}\left[1 + \frac{0{,}03}{4(0{,}1)}\right] \Rightarrow \tau = 15451P \le 140 \Rightarrow P \le 9{,}06 \text{ kN}$$

$\boxed{P = 9{,}06 \text{ kN}}$

350 Si el resorte interior del problema anterior es de bronce fosforado con G = 42 GN/m², calcular el esfuerzo cortante máximo en cada resorte con P = 5 kN. Aplicar (3-10)

Resolución:

Aplicando $\delta_i = \delta_E$, tenemos.

$$\frac{64P_i(0{,}075)^3(30)}{42(0{,}02)^4} = \frac{64P_E(0{,}1)^3(20)}{83(0{,}03)^4}$$

$$\frac{P_E}{P_i} = 5{,}33 \Rightarrow P_i = 0{,}79 \text{ kN} \qquad P_E = 4{,}21 \text{ kN}$$

Calculando: $m_i = \frac{2R}{d_i} = 7{,}5$; $m_E = 6{,}67$

Aplicando: $\frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0{,}615}{m}\right)$

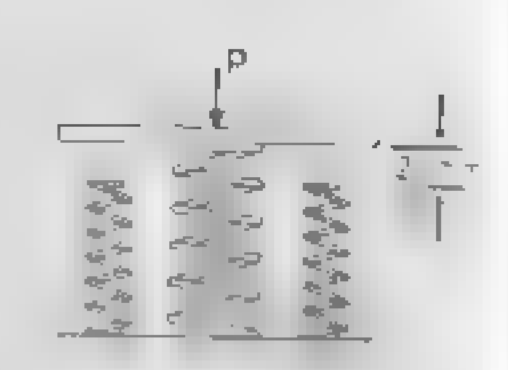
Reemplazando, tenemos

$$\tau_i = \frac{16(790)(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left[\frac{4(7{,}5)-1}{4(7{,}5)-4} + \frac{0{,}615}{7{,}5}\right] = 45{,}1 \text{ MPa}$$

$$\tau_E = \frac{16(4210)(0{,}1)}{\pi(0{,}03)^3}\left[\frac{4(6{,}67)-1}{4(6{,}67)-4} + \frac{0{,}615}{6{,}67}\right] = 97{,}23 \text{ MPa}$$

$\boxed{\tau_i = 45{,}1 \text{ MPa}}$; $\boxed{\tau_E = 97{,}23 \text{ MPa}}$

351 Una placa rígida se apoya en el resorte central, ver figura, que es 20 mm más largo que los dos resortes laterales, simétricamente colocados. Cada uno de estos laterales tiene 18 espiras de alambre de 10 mm sobre un diámetro medio de 100 mm. El resorte central tiene 24 espiras de alambre de 20 mm y diámetro medio de 150 mm. Si se aplica una carga P = 5 kN en la placa, determinar el esfuerzo cortante máximo en cada resorte. Aplicar (3-9) con G = 83 GN/m²



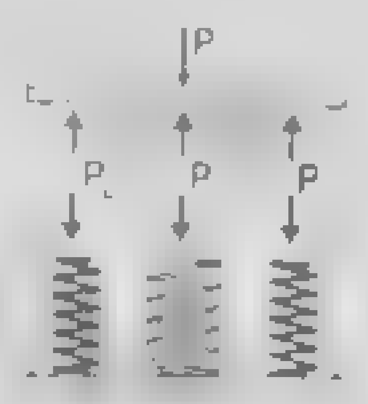
Resolución:

Primeramente, veremos si para la carga P deforma más o menos.

$\delta = 20$ mm

$$\delta_C = \frac{64(5)(0{,}075)^3(24)\times 10^3}{(83\times 10^9)(0{,}02)^4} = 0.24 \text{ m} > 20 \text{ mm}$$

Entonces, actua todo el sistema.



Equilibrio: $\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P_L + P_C = P = 5000$

Compatibilidad de deformación: $\delta_C = 0{,}02 + \delta_L$ ... (*)

Aplicando $\delta = \dfrac{64PR^3n}{Gd^4}$

Tenemos: $\dfrac{64P_C\,(0{,}075)^3\,24}{83\times 10^9(0{,}02)^4} - \dfrac{64P_L\,(0{,}05)^3\,18}{83\times 10^9(0{,}01)^4} = 0{,}02$

$$4{,}88P_C - 17{,}35P_L = 2000$$

$$4.88(5000 - 2P_L) - 17{,}35P_L = 2000$$

$$27{,}11P_L = 22\,400$$

$$P_L = 826{,}26 \text{ N}$$

$$P_C = 3347{,}48 \text{ N}$$

$$\tau = \frac{16(3347{,}48)(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left[1 + \frac{0{,}02}{4(0{,}075)}\right] \Rightarrow \boxed{\tau = 170 \text{ MPa}}$$

352 Resolver el problema 351 si los resortes laterales son de bronce fosforado para el que G = 42 GN/m². ¿Se puede predecir el efecto cualitativo de este cambio en los esfuerzos?

Resolución:

$G_L = 42$ GN/m² ; $G_C = 83$ GPa

Si los laterales resisten en la proporción (42/83) veces del anterior

Reemplazando en la ecuación (*) del problema anterior

$$9.64P_C - 17{,}35P_L = 2000$$

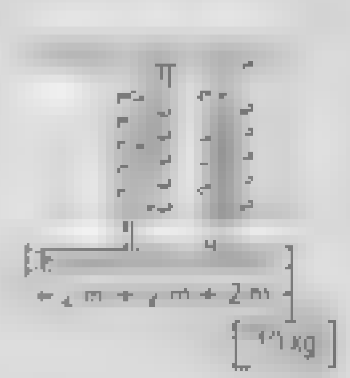
$$9{,}64(5000 - 2P_L) - 17{,}35P_L = 2000$$

$$P = 1711 \text{ N}$$

$$P = 1578 \text{ N}$$

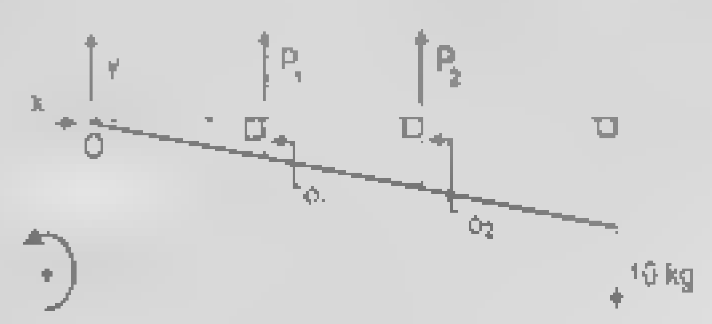
$$\tau = \frac{16(1578)(0{,}075)}{\pi(0{,}02)^3}\left[1 + \frac{0.02}{4(0{,}075)}\right] \Rightarrow \boxed{\tau_C = 80 \text{ MPa}}$$

353 Una barra rígida articulada en un extremo pende de dos resortes idénticos, como se observa en la figura. Cada uno de ellos tiene 20 espiras de alambre de 10 mm con diámetro medio de 150 mm. Determinar el esfuerzo cortante máximo en los resortes aplicando (3-9). Desprecie la masa de la barra rígida.



Resolución:

Dibujando el diagrama de deformación D.C.L



Del equilibrio: ver D.C.L

$\Sigma M_O = 0 \; , \; P_1(2) + P_2(4) - 10(6) = 0$

$$P_1 + 2P_2 = 30 \qquad (1)$$

De la compatibilidad de deformaciones

Por semejanza: $\frac{\delta_1}{2} = \frac{\delta_2}{4} \Rightarrow \delta_2 = 2\delta_1$ (2)

Aplicando $\delta = \frac{64PR^3n}{Gd^4}$ en (2)

$$\frac{64(P_2)R^3n}{Gd^4} = 2\left[\frac{64(P_1)R^3n}{Gd^4}\right] \Rightarrow P_2 = 2P_1 \quad (3)$$

De (1) y (3) tenemos

$$P_1 + 2(2P_1) = 30 \Rightarrow P_1 = 6\ kg \ \ y \ \ P_2 = 12\ kg$$

Para calcular el esfuerzo constante máximo, aplicamos:

$$\tau = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R}\right)$$

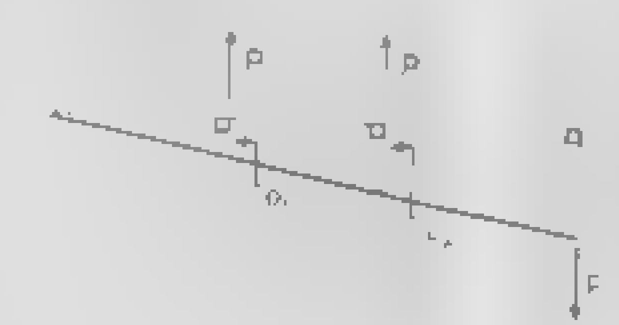
$$\tau_1 = \frac{16(6)(0.075)}{[illegible]}\left(1 + \frac{0.01}{[illegible]}\right) [illegible]$$

$$\tau_2 = \frac{16(12)(0,075)}{\pi(0.01)^3}\left[1 + \frac{0,01}{4(0.075)}\right] \times 9,81 = 46,5\ MN/m^2$$

$$\boxed{\tau_{máx} = 46{,}5\ MN/m^2}$$

354 Si cada resorte del problema anterior tiene 16 espiras de alambre de 10 mm sobre 160 mm de diámetro medio, determinar la carga máxima P para que el esfuerzo no exceda de 140 MN/m² en ningún resorte. Use la ecuación (3-9)

Resolución:
Dibujando el D.C.L.:



Del equilibrio: $P_1 + 2P_2 = 3P$ (1)
De las deformaciones $P_2 = 2P_1$ (2)

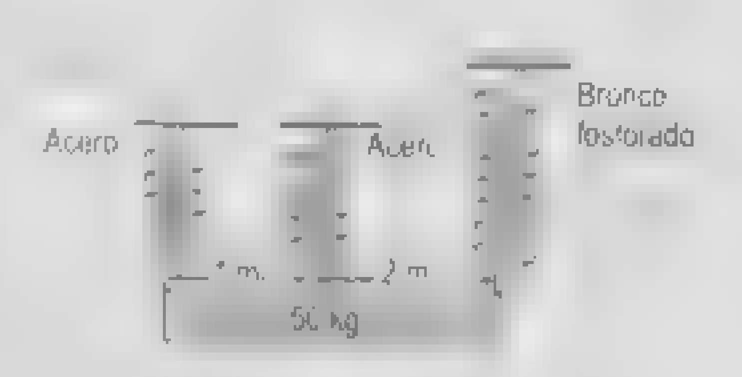
De (1) y (2) tenemos $P_1 = 3P/5$, $P_2 = 6P/5$

[illegible] que el resorte (2) está más cargado que el resorte (1), por tanto

$$\frac{16(6P/5)(0,08)}{\pi(0.01)^3}\left[1 + \frac{0,01}{4(0,08)}\right] \le 140 \times 10^6$$

$P \le 277\ N\ (28,3\ kg)$ $\boxed{P = [illegible]}$

Como se indica en la figura, un bloque rígido de 50 kg pende de tres resortes cuyos extremos inferiores inicialmente están al mismo nivel. Cada resorte de acero tiene 24 espiras de alambre de 10 mm de diámetro sobre un diámetro medio de 100 mm y G = 83 GN/m². El resorte de bronce tiene 48 espiras de alambre de 20 mm y diámetro medio de 150 mm, con G = 42 GN/m². Determinar el esfuerzo cortante máximo en cada resorte aplicando (3-9)



Resolución:
Cada resorte de

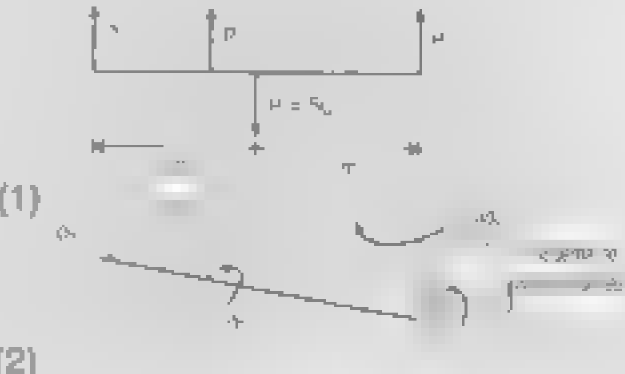
Aplicando el equilibrio en el D.C.L.

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \ P_1 + P_2 + P_3 - P = 0$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = 50 \quad ...(1)$$

$$\sum M_1 = 0 \quad P_2(1) + P_3(3) - P(1,5) = 0$$

$$P_2 + 3P_3 = 75 \quad ...(2)$$



Aplicando compatibilidad de deformaciones por semejanza, tenemos

$$\frac{\delta_2-\delta_1}{1}=\frac{\delta_3-\delta_1}{3}\quad\Rightarrow\quad\delta_3=3\delta_2-2\delta_1\qquad\text{...(3)}$$

Aplicando: $\delta=\frac{64PR^3}{Gd^4}$ en (3), tenemos.

$$\frac{64P_3(0.075)^3(48)^2}{42(0.02)^4}=\frac{64(0,05)^3(24)}{83(0.01)^4}(3P_2-2P_1)$$

$$P_3=3.6P_2-2.4P_1\qquad(4)$$

De (1), (2) y (4) se obtiene lo siguiente

P_1 = 14.8 kg (145 N)
P_2 = 15.3 kg (150 N)
P_3 = 19.9 kg (195 N)

Para determinar los esfuerzos cortantes en cada resorte aplicamos

$$\tau=\frac{16PR}{\pi d^3}\left(1+\frac{d}{4R}\right)$$

Para el acero

$$\tau_{acero,1}=\frac{16(145)(0.05)}{\pi(0.01)^3}\left[1+\frac{0.01}{4(0.05)}\right]=38.77\ \text{MN/m}^2$$

$$\tau_{acero,2}=40,1\ \text{MN/m}^2$$

Para el bronce

$$\tau_{bronce}=\frac{16(195)(0.075)}{\pi(0.02)^3}\left[1+\frac{0.02}{4(0.075)}\right]=9.93\ \text{MN/m}^2$$

$\boxed{\tau_{máx}=40.1\ \text{MN/m}^2}$; $\boxed{\tau=9.93\ \text{MN/m}^2}$

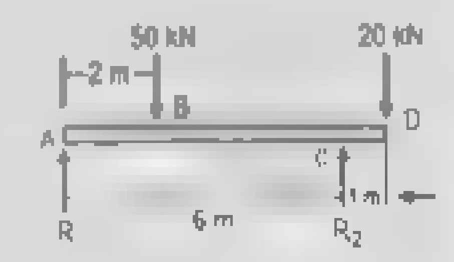
CAPÍTULO 4

FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE EN VIGAS

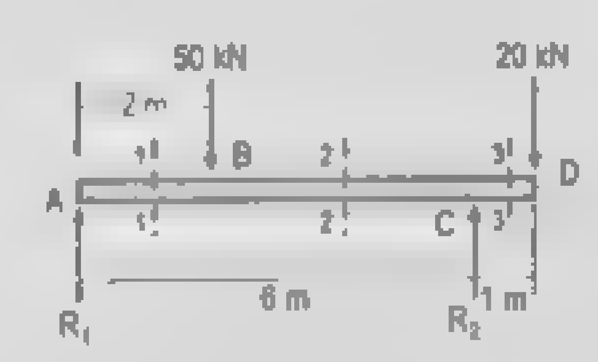
[illegible] las distribuciones de momentos flexionantes y fuerza cortante en las vigas [illegible] diagramas marcando los valores en todos los puntos de discontinuidad, y en los de fuerza cortante nula. Despreciar [illegible] propio de las vigas

[illegible] y 402 problemas ilustrativos.

[illegible]



Resolución.



(I) Calculamos las reacciones, aplicando las ecuaciones de equilibrio

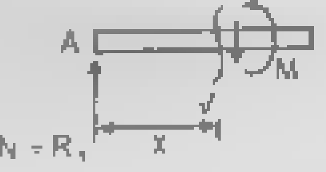
$+\circlearrowright\ \Sigma M_A=0:\ -50(2)+R_2(6)-20(7)=0\qquad\Rightarrow\qquad R_2=40\ \text{kN}$

$+\uparrow\ \Sigma F_y=0:\ R_1-50+R_2-20=0\qquad\Rightarrow\qquad R_1=30\ \text{kN}$

(II) En los cortes calculamos las fuerzas internas

Corte 1 – 1 [illegible]

$+\circlearrowright\ \Sigma M=0:\ M-30x=0\ \Rightarrow\ M=30x\ \begin{cases}M=0, & x=0\\ M=60, & x=2\end{cases}$



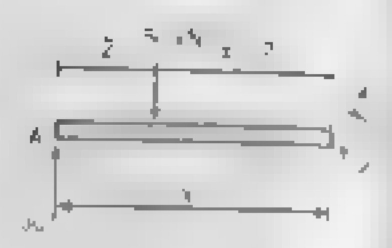
$+\uparrow\ \Sigma F=0:\ 30-V=0\ \Rightarrow\ V=30\ \text{cte}$

Corte 2 - 2: x = (2;6)

$+\circlearrowleft \Sigma M_x = 0$: $M + 50(x-2) - 30x = 0 \Rightarrow M = 100 - 20x$

$M_{x=2} = 60$ kN.m , $M_{x=6} = -20$ kN m

$\uparrow \Sigma F_y$: $30 - 50 - V = 0 \Rightarrow V = -20$. cte



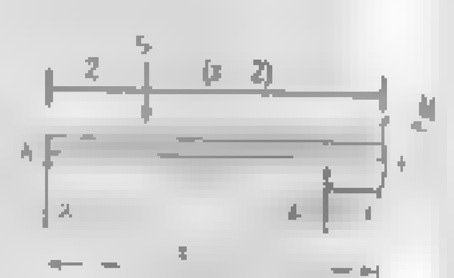
Corte 3 - 3: x = (6;7)

$+\circlearrowleft \Sigma M_x = 0$: $M + 50(x - 2) - 40(x - 6) - 30x = 0$

$M = 20x - 140$

$M_{x=6} = -20$, $M_{x=7} = 0$

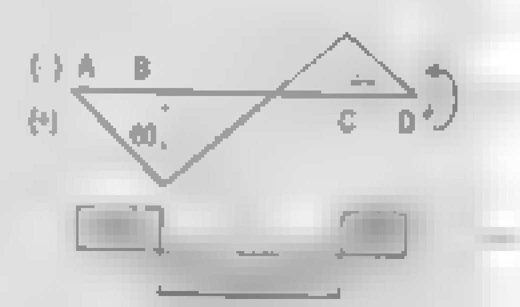
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $30 - 50 + 40 - V = 0 \Rightarrow V = 20$. cte



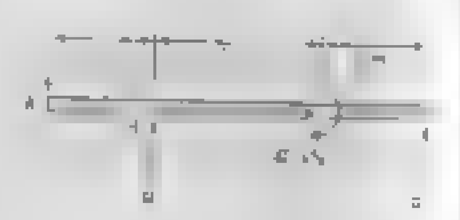
(III) Dibujamos los diagramas

V = 20 kN

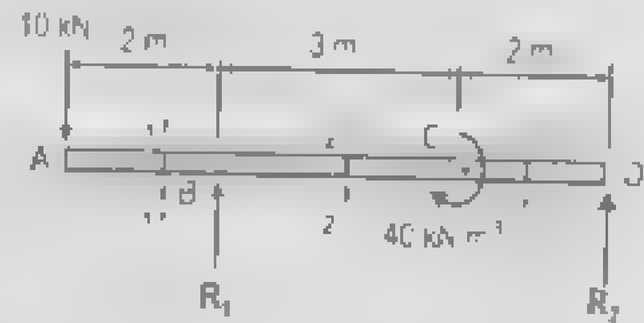
M = (20x − 140) kN.m , x = (6;7)



404. Viga cargada como se indica en la figura



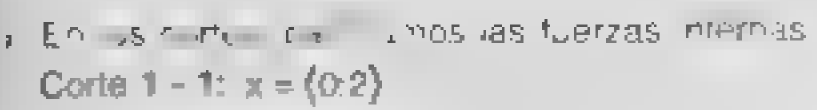
Resolución:



(I) Calculamos las reacciones:

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $10(2) - 40 + R_2(5) = 0 \Rightarrow R_2 = 4$ kN

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $-10 + R_1 + R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 6$ kN



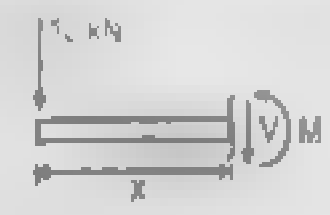
(II) En los cortes calculamos las fuerzas internas

Corte 1 - 1: x = (0;2)

$+\circlearrowleft \Sigma M_{1-1} = 0$: $M + 10(x) = 0 \Rightarrow M = -10x$

$M_{x=0} = 0$, $M_{x=2} = -20$ kN.m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $-10 - V = 0 \Rightarrow V = -10$ kN (cte.)



Corte 2 - 2: x = (2;5)

$+\circlearrowleft \Sigma M_{2-2} = 0$: $M + 10(x) - 6(x - 2) = 0$

$\Rightarrow M = -4x - 12$

$M_{x=2} = -20$, $M_{x=5} = -32$ kN.m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $-10 + 6 - V = 0 \Rightarrow V = -4$ kN (cte.)

Corte 3 - 3: x = (5;7)

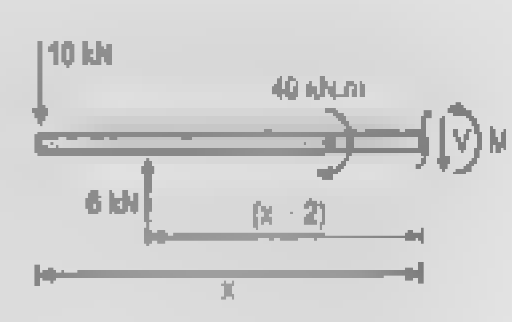
$+\circlearrowleft \Sigma M_{3-3} = 0$

$M + 10(x) - 6(x - 2) - 40 = 0$

$\Rightarrow M = -4x + 28$

$M_{x=5} = 8$ kN m , $M_{x=7} = 0$ kN.m

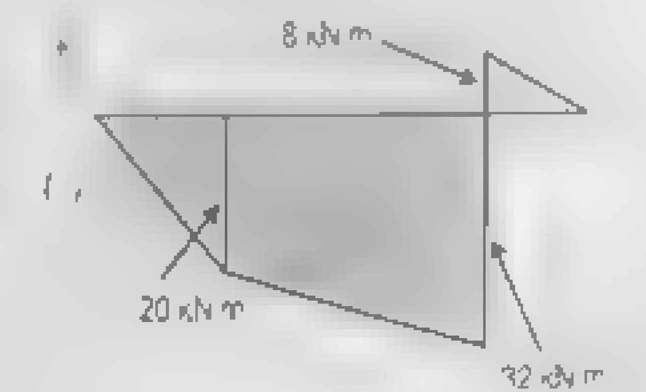
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $-10 + 6 - V = 0 \Rightarrow V = -4$ kN (cte.)



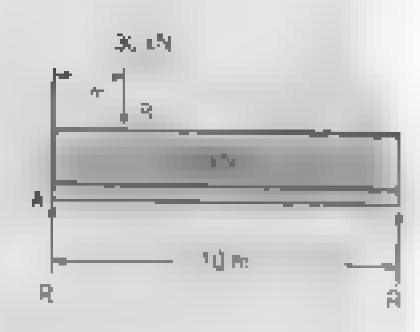
(III) Dibujamos los diagramas

M = (−4x + 28) , x = (5;7)

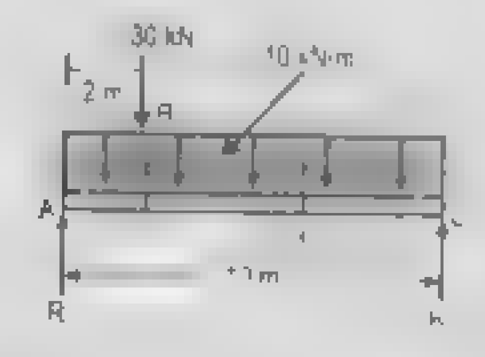
+ A B C D



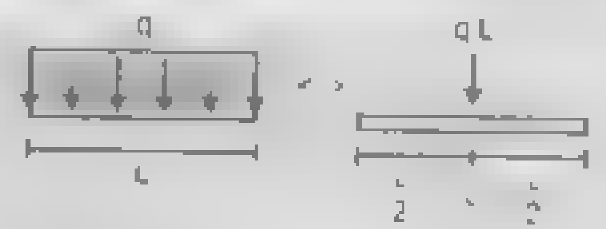
405 Viga cargada como se indica en la figura



Resolución.



Nota: para cargas distribuidas. Es equivalente ... para ...



(I) Calculamos las reacciones

$+\circlearrowright \Sigma M_A = 0$: R (10) (10 × 10)(10/2) 30(2) 0 → R 56 kN

$+\uparrow \Sigma F_y$ 0 R_1 30 (10 × 10) + R 0 R 74 kN

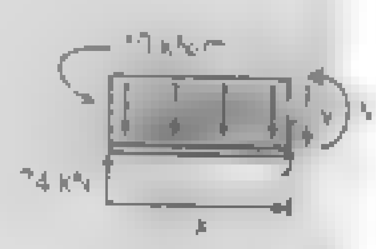
(II) Calculamos los momentos y cortantes en los cortes indicados

Corte 1 - 1, $x = (0;2)$

$+\circlearrowright \Sigma M$ 0: M + (10x)(x/2) 74(x) 0

M 74x 5x

M_x 0 M 128 kN m



$+\uparrow \Sigma F_y$ 0 74 10x V 0 V 74 10x

V_1 74 kN V = 54 kN

$V = 0 \Rightarrow x = 74/10 = 7{,}4 \Rightarrow \nexists \; x = (0;2)$

Corte 2 - 2, $x = (2;10)$

$+\circlearrowright \Sigma M_{2-2} = 0$: $M + (10x)(x/2) + 30(x-2) - 74x = 0$

$M = 60 + 44x - 5x^2$

$M_{x=2} = 128$ kN.m ; M 0

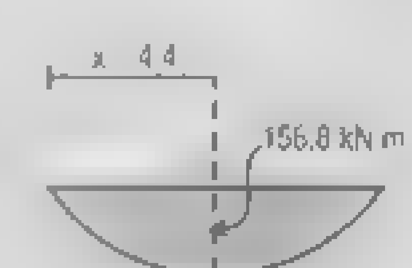
$M_{x=4.4} = 156.8$ kN m

$+\uparrow \Sigma F$ = 0 74 30 - 10x V 0

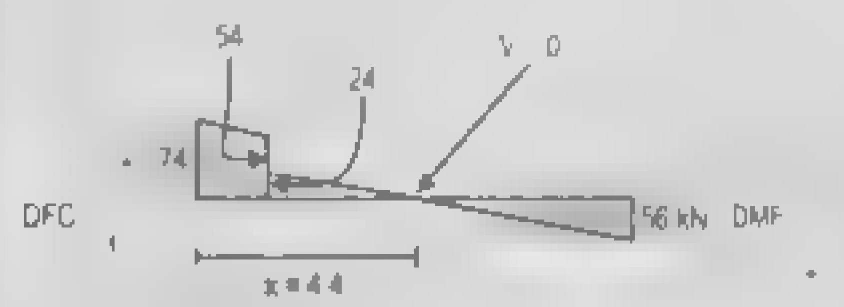
$\Rightarrow V = 44 - 10x$

V 24 ; $V_{x=10} = -56$ kN

$V = 44 - 10x = 0 \Rightarrow x = 4{,}4 \Rightarrow x = (2;10)$

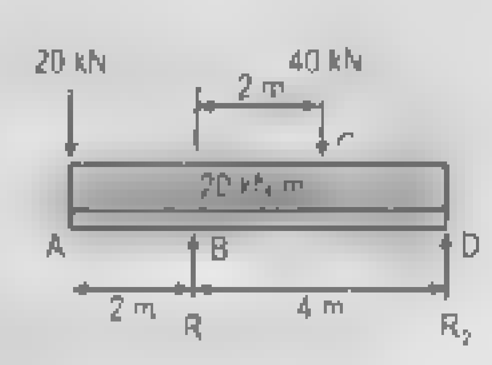


(III) Dibujamos los diagramas

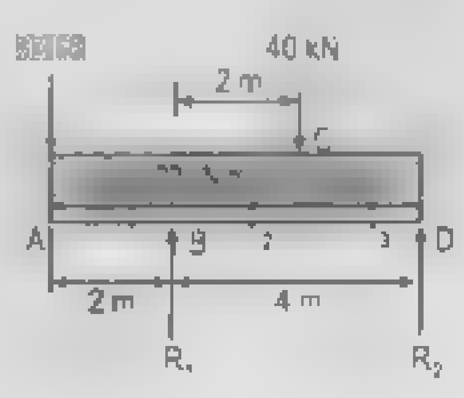


$\boxed{M_{BC} = -5x^2 + 44x + 60}$; $x = (2;10)$

406. Viga cargada como se indica en la figura



Resolución:



(I) Calculamos las reacciones.

$+\circlearrowright\ \Sigma M_D = 0:\ 40(2) - R_1(4) + 20(6) + (20 \times 6)(6/2) = 0 \Rightarrow R_1 = 140\ kN$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0:\ -20 + R_1 - 20(6) - 40 + R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 40\ kN$

(II) Calculamos las fuerzas (momentos y cortante) en los cortes

Corte 1 - 1: $x = \langle 0;2 \rangle$

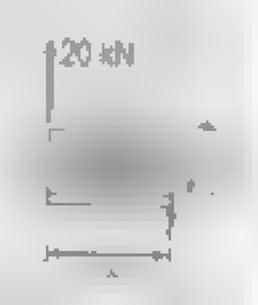
$+\circlearrowright\ \Sigma M_{1-1} = 0:\ M + 20(x) + (20x)(x/2) = 0$

$M = -10x^2 - 20x$

$M_{x=0} = 0 \quad M_{x=2} = -80\ kN.m$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0:\ -20 - 20x - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -20 - 20x$

$V_{x=0} = -20\ ;\ V_{x=2} = -60\ kN$



Corte 2 - 2: $x = \langle 2;4 \rangle$

$+\circlearrowright\ \Sigma M_{2-2} = 0:\ M + 20(x) - 140(x-2) + (20x)(x/2) = 0$

$M = -10x^2 + 120x - 280$

$M_{x=2} = -80\ ;\ M_{x=4} = 40\ kN.m$

$+\uparrow\ F_y = 0:\ -20 - 20x + 140 - V = 0$

$V = -20x + 120$

$V_{x=2} = 80\ kN\ ,\ V_{x=4} = 40\ kN$

$V = -20x + 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6\ ,\ \nexists\ x = \langle 2;4 \rangle$

Corte 3 - 3: $x = \langle 4;6 \rangle$

$+\circlearrowright\ \Sigma M_{3-3} = 0:\ -M + 40(6-x) - 20(6-x)(6-x)/2 = 0$

$M = -10x^2 + 80x - 120$

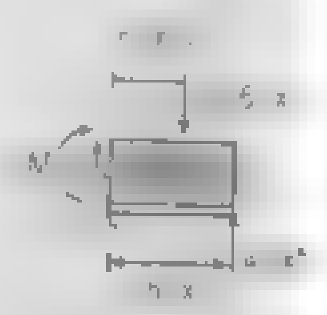
$M_{x=4} = 40\quad M_{x=6} = 0\ kN.m$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0:\ V - 20(6-x) + 40 = 0$

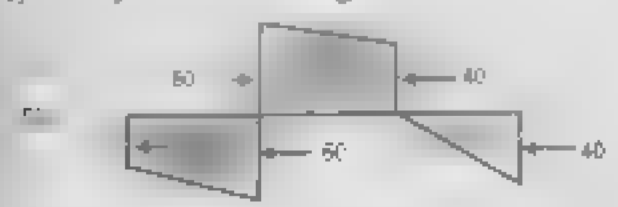
$V = -20x + 80$

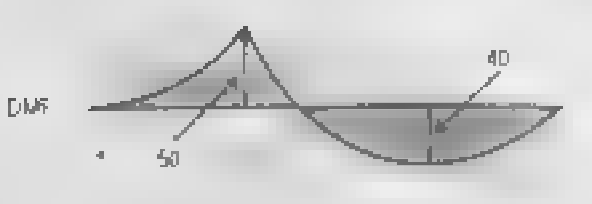
$V_{x=4} = 0\ kN \quad V_{x=6} = -40\ kN$

$V = 0 \quad -20x + 80 \Rightarrow x = 4 \quad x \in \langle 4;6 \rangle$

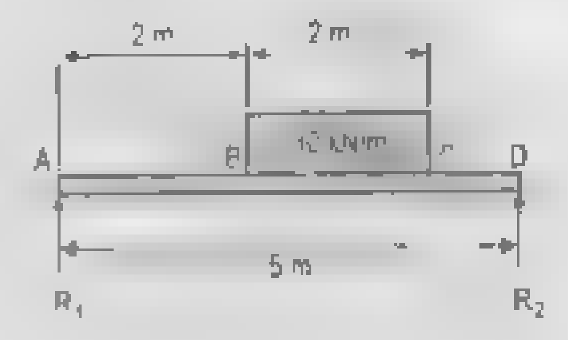


(III) Dibujamos los diagramas

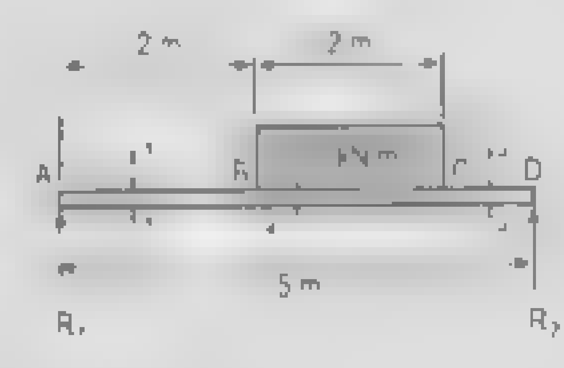




Viga cargada como se indica en la figura



Resolución.



(I) Calculamos las reacciones

$+\circlearrowright\ \Sigma M_A = 0:\ R_2(5) - [30(2)]\ (2 + 2/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 36\ kN$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0:\ R_1 - [30(2)] + R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 24\ kN$

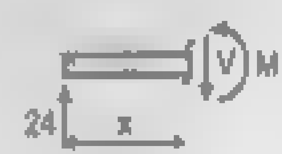
(II) Calculamos los momentos y cortantes en los cortes

Corte 1 - 1: $x = \langle 0;2 \rangle$

$+\circlearrowright\ \Sigma M_{1-1} = 0:\ M - 24x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 24x$

$M_{x=0} = 0\ ,\ M_{x=2} = 48\ kN.m$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0:\ 24 - V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 24\ (cte.)$



Corte 2 - 2: $x = \langle 2;4 \rangle$

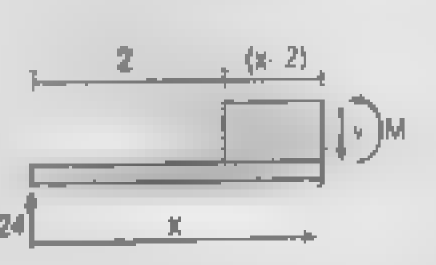
$+\circlearrowright\ \Sigma M_{2-2} = 0:\ M - 24x + 30(x-2)(x-2)/2 = 0$

$M = -15x^2 + 84x - 60$

$M_{x=2} = 48\ ;\quad M_{x=4} = 36\ kN.m$

$M_{x=2,8} = 57{,}6\ kN.m$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0:\ 24 - [30(x-2)] - V = 0 \Rightarrow V = 84 - 30x$



V 24 kN V 36 kN

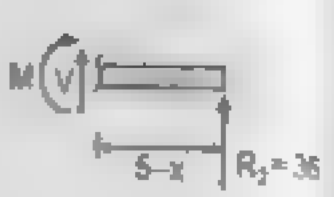
V 84 30x = 0 ... x = 2,8 ∃ x (2,4)

Corte 3 - 3: x = (4,5)
Tomamos el lado derecho

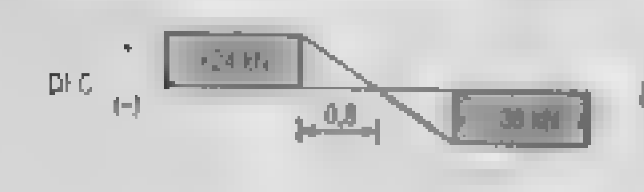
$+\circlearrowleft\ \Sigma M_{3-3} = 0: -M + 36(5 - x) = 0 \Rightarrow M = 180 - 36x$

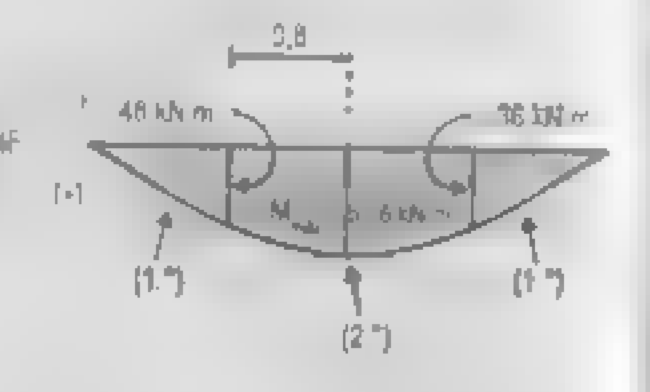
$M_{x=4} = 36$ kN.m , $M_{x=5} = 0$ kN m

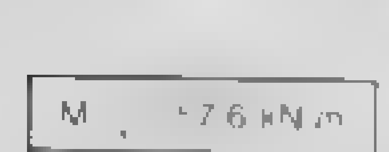
$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0: V + 36 = 0 \Rightarrow V = -36$ kN



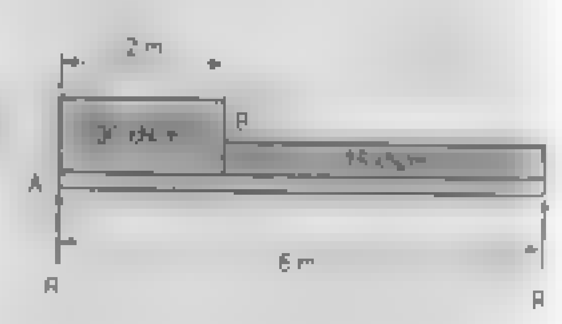
(II) Dibujamos los diagramas







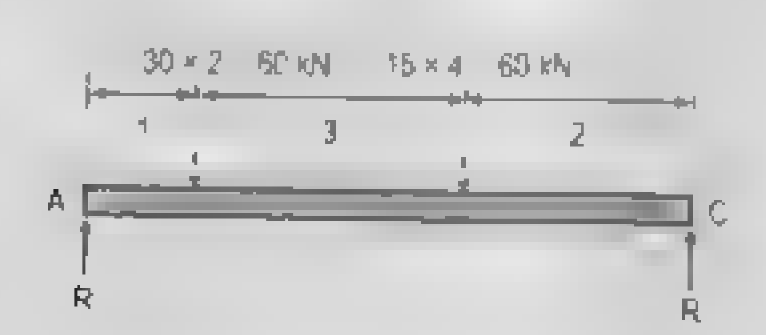
408 Viga cargada como se indica en la figura



Resolución

(i) Calculamos las reacciones.

Sistema equivalente solo para el cálculo de las reacciones



$+\circlearrowleft\ \Sigma M_A = 0: R_2(6) - 60(1) - 60(4) = 0 \Rightarrow R_2 = 50$ kN

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0: R_1 - 60 - 60 + R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 70$ kN

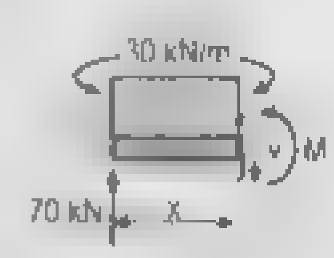
(ii) Cálculo de las fuerzas en los cortes

Corte 1 - 1, x = (0;2)

$\Sigma M_{1-1} = 0: M + (30x)(x/2) - 70(x) = 0$

$M = -15x^2 + 70x$

$M_{x=0} = 0$, $M_{x=2} = 80$ kN m



$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0: 70 - 30(x) - V = 0 \Rightarrow V = -30x + 70$

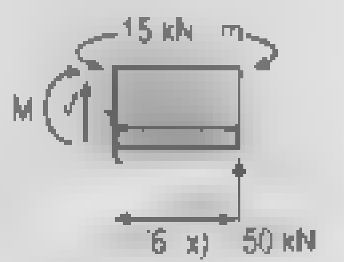
$V_{x=0} = 70$ kN, $V_{x=2} = +10$ kN

Corte 2 - 2; x = (2;6)

$\Sigma M_{2-2} = 0: -M - (15)(6 - x)(6 - x)/2 + 50(6 - x) = 0$

$M = -7,5x^2 + 40x + 30$

$M_{x=2} = 80$ kN m, $M_{x=6} = 0$



$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0: V - 15(6 - x) + 50 = 0$

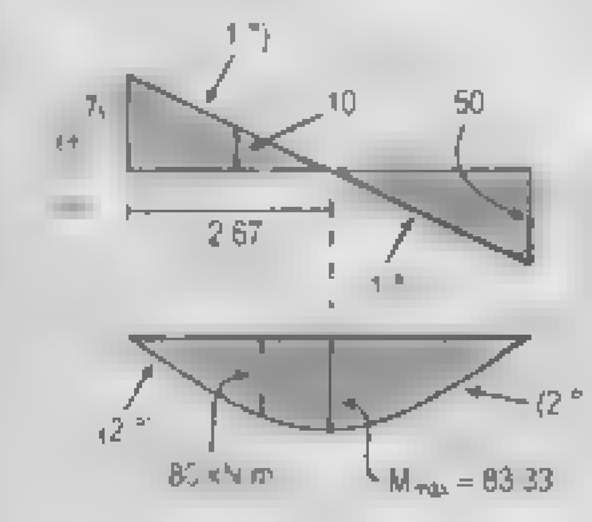
$V = -15x + 40$

$V_{x=2} = 10$ kN, $V_{x=6} = -50$ kN

$V = 0 \Rightarrow -15x + 40 = 0 \Rightarrow x = 2,67\ \exists\ x = (2;6)$

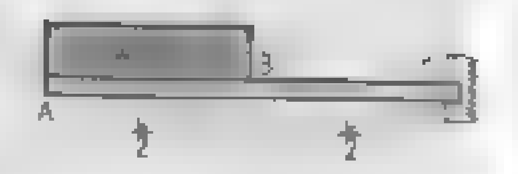
$M_{max} = M_{x=2,67} = 83,33$ kN m

(iii) Dibujamos los diagramas de momento flector y fuerza cortante

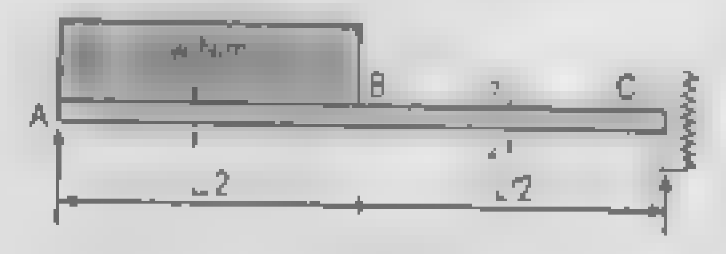


M max = 83,33 kN m

409 Ménsula cargada como se indica en la figura



Resolución.



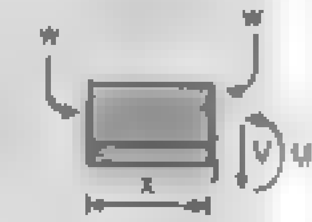
El cálculo de las reacciones en C es opcional

(I) Cálculo de las fuerzas en los cortes

Corte 1 - 1 ; $x = \langle 0, L/2 \rangle$

$\circlearrowleft \Sigma M \quad 0 \; M + wx \; (x/2) \quad 0 \Rightarrow M \quad wx^2/2$

$M_{x=0} = 0$; $\quad M_{x=L/2} = -wL^2/4$



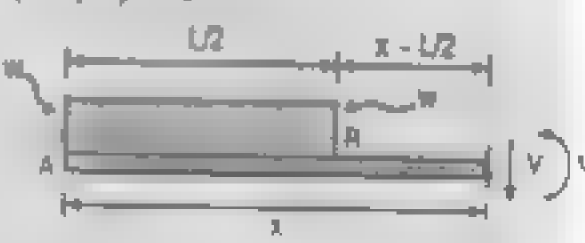
$+\uparrow \Sigma F_y \quad 0 \quad wx, - V \quad 0 \Rightarrow V \quad wx$

$V_x = 0$; $V_{x=L/2} = -wL/2$

Corte 2 - 2 , $x = \langle L/2, L \rangle$

$\circlearrowleft \Sigma M_{2-2} = 0$: $M + [w(L/2)]\,(x - L/2 + (L/2)/2) = 0$

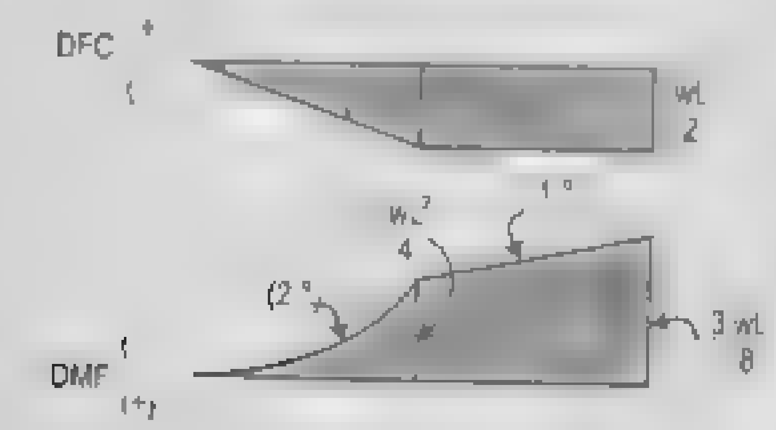
$M = -\dfrac{wL}{2}x + \dfrac{wL^2}{8}$

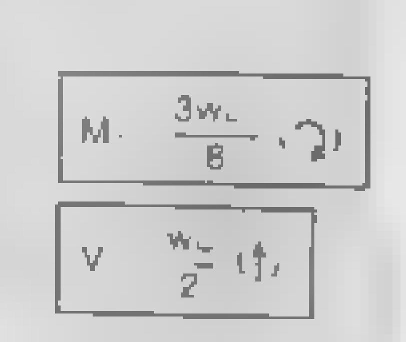


$M_{\,} = \dfrac{wL^2}{4} \quad M_{\,} = \dfrac{3wL^2}{8}$

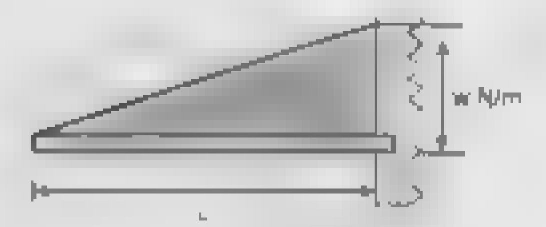
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $-[w(L/2)] - V \Rightarrow V = -\dfrac{wL}{2}$

(II, Dibujamos los diagramas

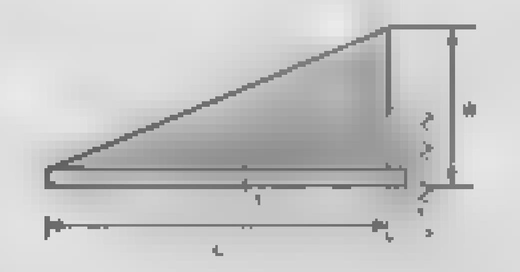




410 Ménsula cargada con la carga triangular que indica la figura

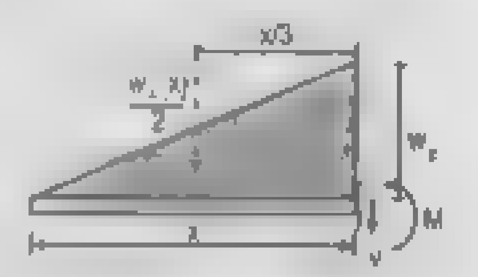


Resolución:



(I) Calculamos las fuerzas en el corte 1 - 1. $x = \langle 0, L \rangle$

Por semejanza $\dfrac{w_x}{x} = \dfrac{w}{L} \Rightarrow w_x = w\dfrac{x}{L}$



$\circlearrowleft \Sigma M \quad 0 \; M + \left[\left(w\dfrac{x}{L}\right)x/2\right] x/3 \quad 0$

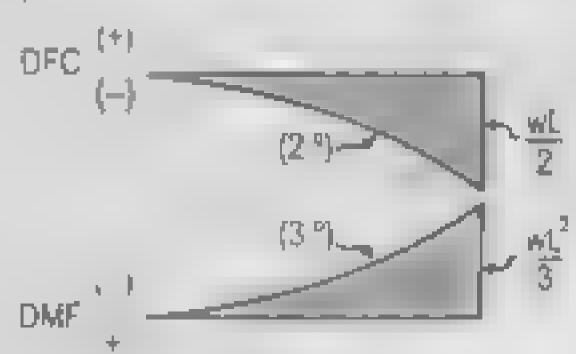
$M \quad \dfrac{w}{6L}x$

$M_{\,} \quad 0 \quad \boxed{M_{\,} \quad \dfrac{wL}{6}}$

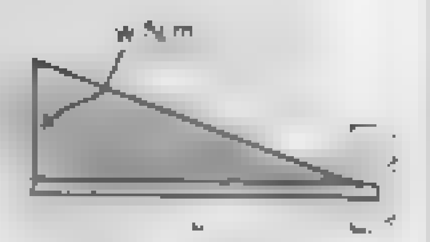
$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad \dfrac{wx}{L}\,x/2 \quad V \quad 0 \Rightarrow V = \dfrac{wx}{2L}$

$V_{\,} \quad 0 \quad \boxed{V_{\,} \quad \dfrac{wL}{6}}$

(II) Dibujamos los diagramas.

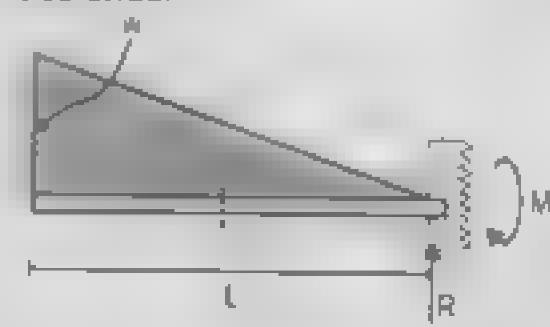


411 Ménsula con la carga triangular que indica la figura, la cual varía de w N/m en el extremo libre a cero en la pared.



Resolución

(I) Calculamos las reacciones:

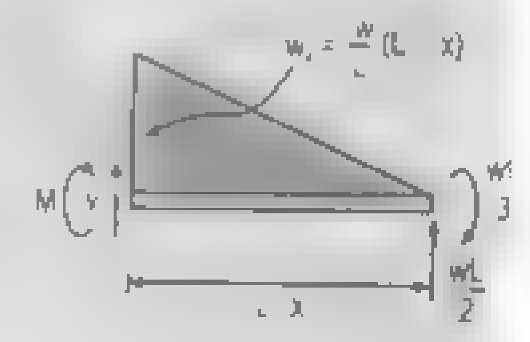


$\Sigma M = 0$: $[w(L/2)]\,[L(2/3)] - M = 0 \Rightarrow M = \frac{wL}{3}$

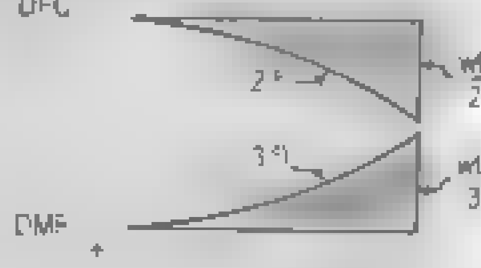
$\Sigma F_v = 0$: $-[w(L/2)] + R = 0 \Rightarrow R = wL/2$

(II) Calculamos las fuerzas en el corte 1-1: x ∈ (0; L)

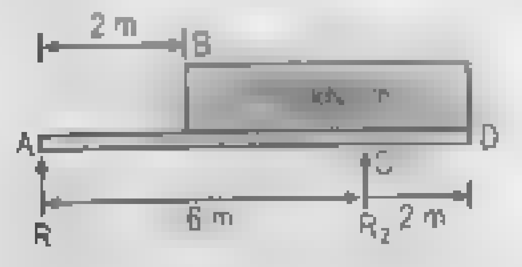
$\Sigma M_{1-1} = 0$: $\frac{wL}{2}(L-x) - \frac{wL^2}{3} - \left[w\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\frac{(L-x)}{2}\ [illegible]\ \frac{x}{3}\ [illegible]\ M = 0$



$\Sigma F_v = 0$: $V\ [illegible]\ w\left(1 - \frac{x}{L}\right)\ [illegible]\ \frac{x}{2} + \frac{wL}{2} = 0$

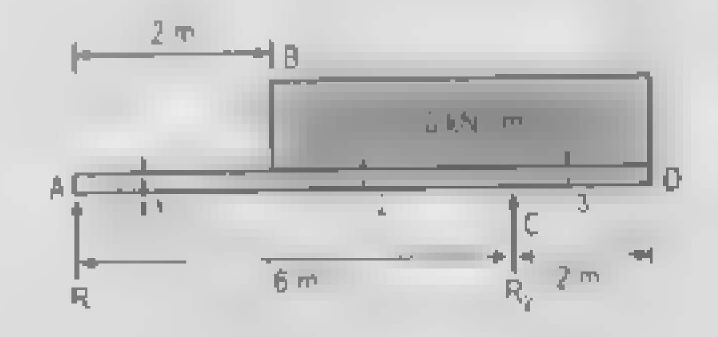


412 Viga con la carga indicada en la figura.



Resolución.

(I) Calculamos las reacciones



$\Sigma M_A = 0$: $R_2(6) - [10(6)](2 + 6/2) = 0 \Rightarrow R_2 = 50$ kN

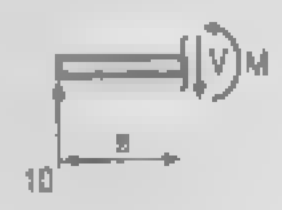
$\Sigma F_v = 0$: $R_2 - [10(6)] + R = 0 \Rightarrow R = 10$ kN

(II) Cálculo de las fuerzas cortantes y momento flexionante en cortes

Corte 1 - 1 x = (0;2)

$\Sigma M_{1-1} = 0$ $M - 10x = 0 \Rightarrow M = 10x$

$M_{x=0} = 0$, $M_{x=2} = +20$ kN m



$\Sigma F_v = 0$: $10 - V = 0 \Rightarrow V = 10$ kN (cte.)

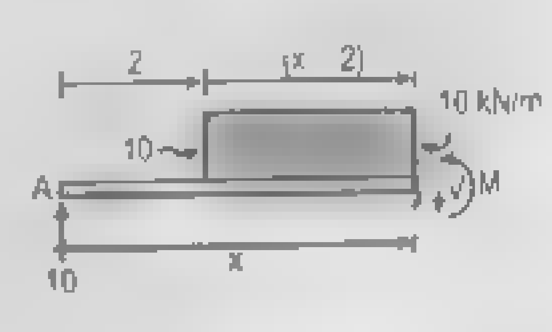
Corte 2 - 2: x = (2;6)

$\Sigma M_{2-2} = 0$: $M - 10x + [10(x-2)(x-2)/2] = 0$

$M = -5x^2 + 30x - 20$

$M_{x=2} = +20$ kN m

M_{x} = 20 kN m

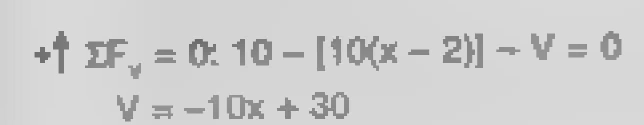


$\Sigma F_v = 0$: $10 - [10(x-2)] - V = 0$

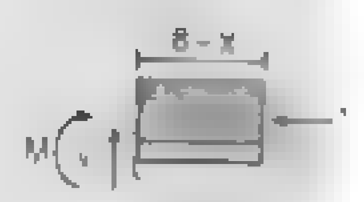
$V = -10x + 30$

$V_{x=2} = 10$; $V_{x=6} = -30$ kN

$V = 0 = -10x + 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow M_{máx} = M_x$ 25



Corte 3-3: $x = (6;8)$



$\circlearrowleft + \Sigma M \quad 0 \quad M \cdot [10(8 \quad x)(8 \quad x \quad 2)] \quad 0$

$M = -5x^2 + 80x - 320$

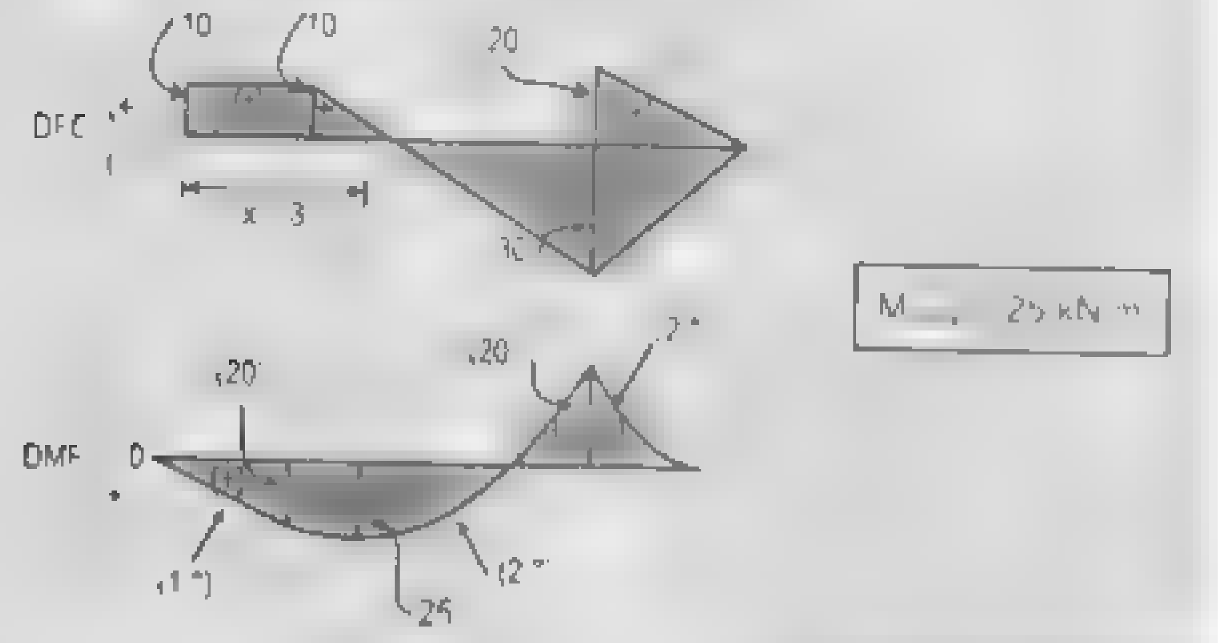
$M \quad 20 \text{ kN m} \quad M \quad 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: V - [10(8 - x)] = 0$

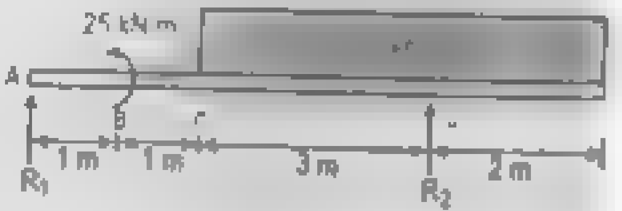
$V = -10x + 80$

$V \quad +20 \quad V \quad 0 \text{ kN}$

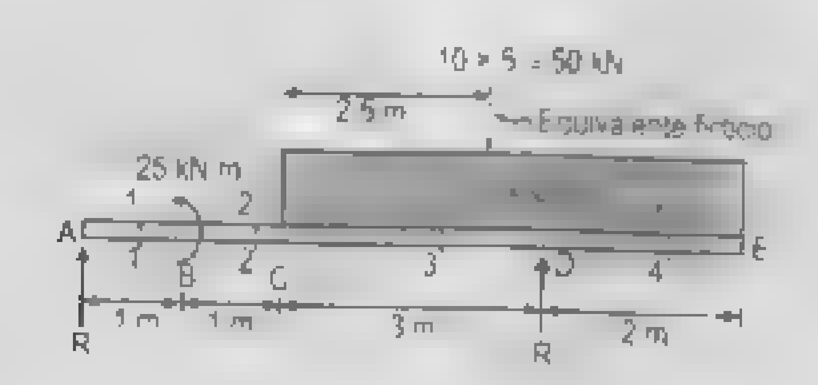
(I) Dibujamos los diagramas



413 Viga con la carga indicada en la figura



Resolución:



(I) Calculamos las reacciones.

$\circlearrowleft + \Sigma M \quad 0 \quad 25 - 50(4,5) + R(5) \quad 0$

$R_2 = 40 \text{ kN}$

$+\uparrow \Sigma F = 0 \quad R \cdot 50 + R \quad 0$

$R = 10 \text{ kN}$

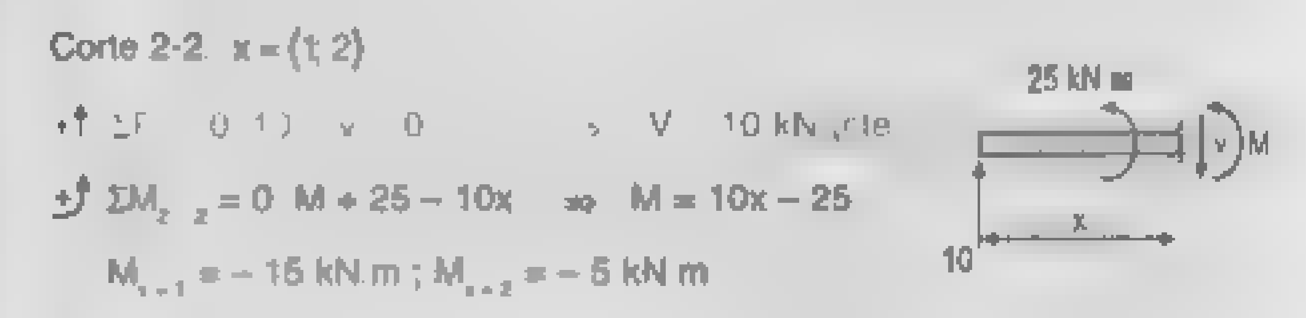
Calculamos las fuerzas en los cortes

Corte 1-1 $x = (0;1)$

$+\uparrow \Sigma F \quad 0 \quad 10 \quad V \quad 0 \quad \Rightarrow \quad V = 10 \text{ kN (cte)}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_{1-1} = 0;\ M - 10x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 10x$

$M \quad 0 \quad M \quad = 10 \text{ kN m}$

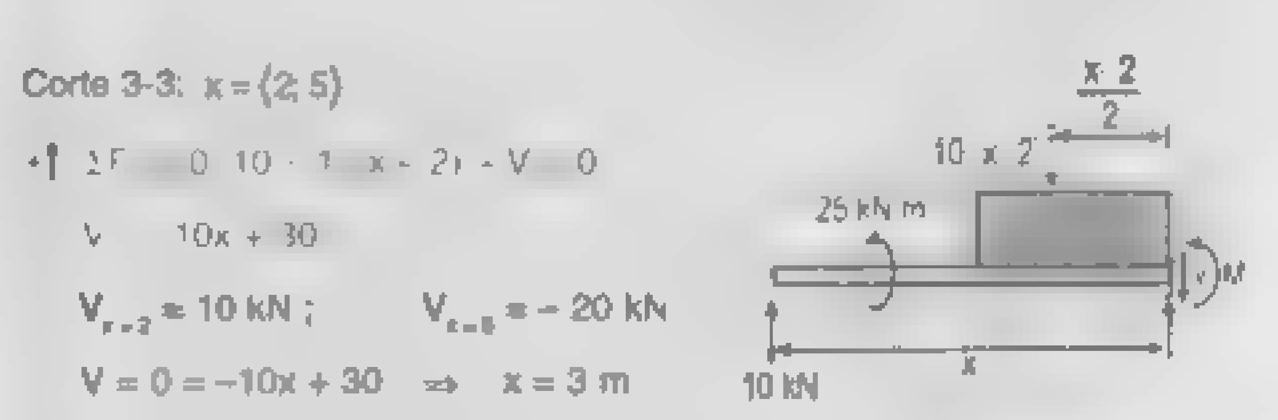


Corte 2-2 $x = (1;2)$

$+\uparrow \Sigma F \quad 0 \quad 10 \quad V \quad 0 \quad \Rightarrow \quad V \quad 10 \text{ kN (cte)}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_{2-2} = 0 \quad M + 25 - 10x \quad \Rightarrow \quad M = 10x - 25$

$M_{x=1} = -15 \text{ kN m};\ M_{x=2} = -5 \text{ kN m}$



Corte 3-3: $x = (2;5)$

$+\uparrow \Sigma F \quad 0 \quad 10 \cdot 10(x - 2) - V \quad 0$

$V \quad 10x + 30$

$V_{x=2} = 10 \text{ kN};\qquad V_{x=5} = -20 \text{ kN}$

$V = 0 = -10x + 30 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \text{ m}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_{3-3} = 0:\ M + [10(x - 2)(x - 2)/2] + 25 - 10x = 0$

$M = -5x^2 + 30x - 45$

$M \quad 5,\ M \quad = -20 \text{ kN m}$

$M \quad M \quad = 0$

Corte 4-4 x = (5,7)

$+\uparrow \sum F_y = 0$: $-10(7-x) + V = 0 \Rightarrow V = -10x + 70$

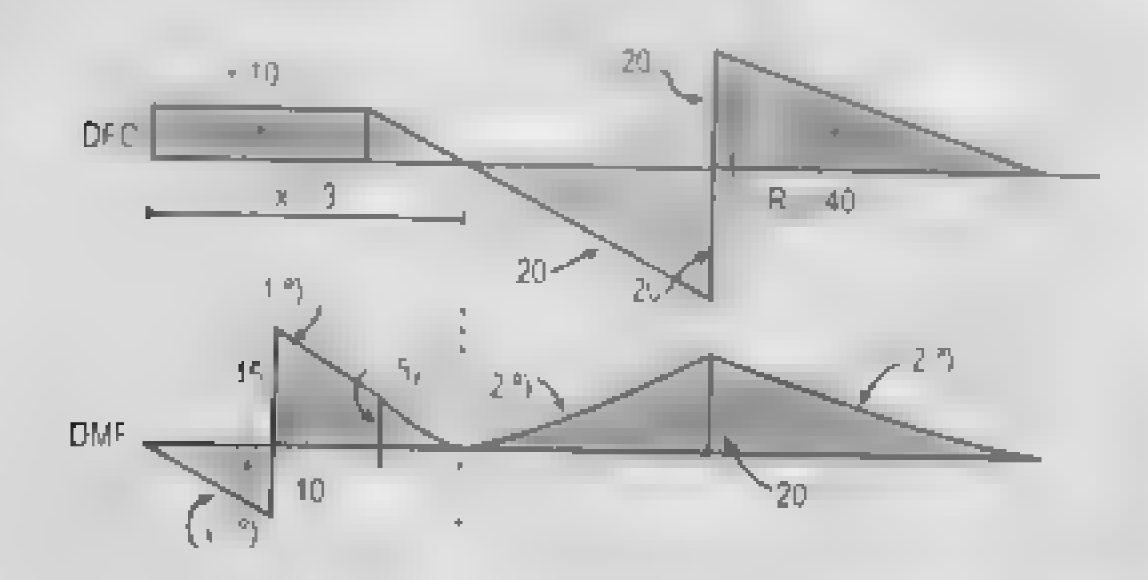
$V_{x=5} = 20$; $V_{x=7} = 0$ kN

$\sum M = 0$: $-M - [10(7-x)(7-x)/2] = 0$

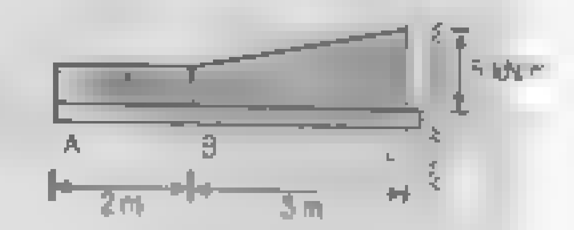
$M = -5x^2 + 70x - 245$

$M = -20$ kN.m , $M_{x=7} = 0$

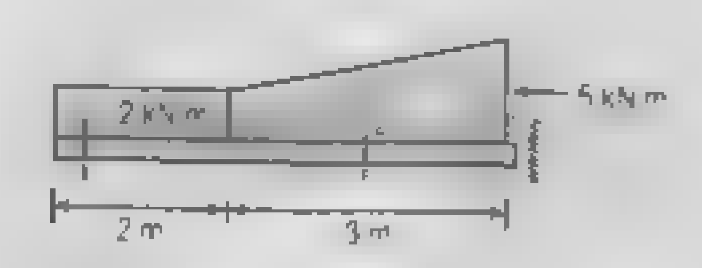
(III) Dibujando los diagramas



4.14 Ménsula con la carga indicada en la figura

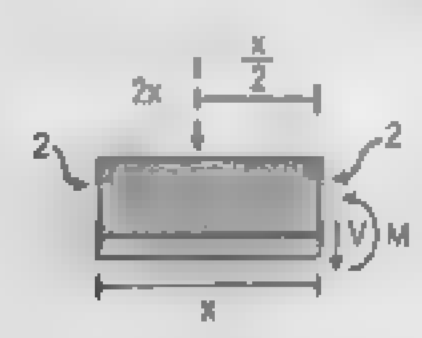


Resolución.



Calculamos las fuerzas en los cortes.

Corte 1-1: x ∈ (0; 2)

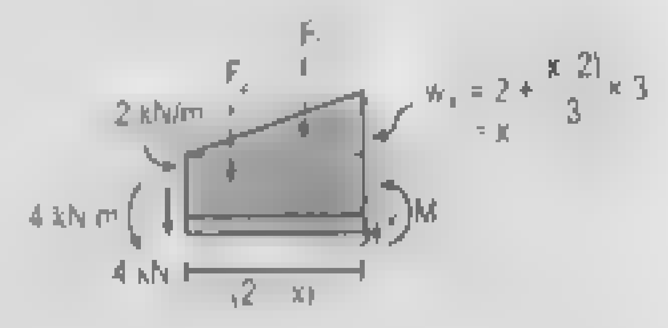


$+\uparrow \sum F = 0$: $-2x - V = 0 \Rightarrow V = -2x$

$\sum M = 0$: $M + 2x(x/2) \Rightarrow M = -x^2$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=2} = -4$ kN.m

Corte 2-2: x = (2; 5)



$F = \dfrac{x}{2} - 2x + 2$

$F = 2x - 4$

$+\uparrow \sum F = 0$: $-4 - F - F - V = 0$

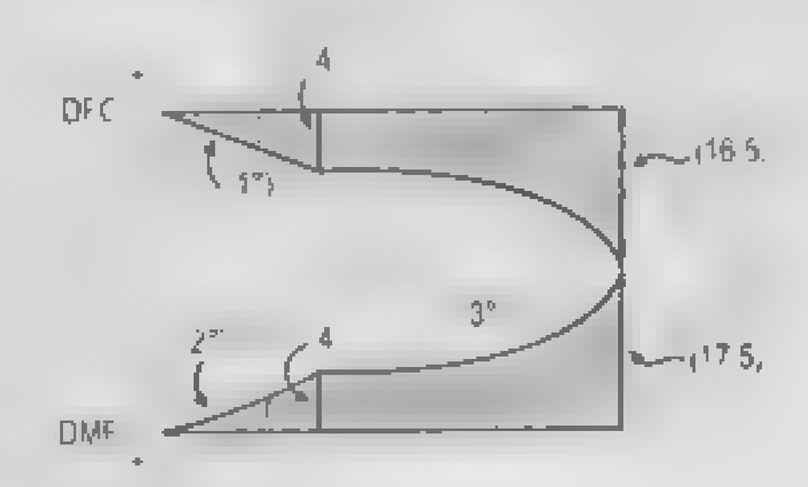
$V = \dfrac{x}{2} - 2$

$V = -4$ kN $V = -16.5$ kN

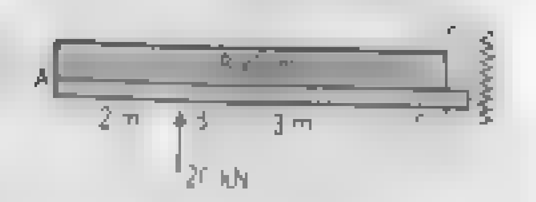
$\sum M = 0$: $4 + F\dfrac{(x-2)}{3} + F\dfrac{(x-2)}{2} + M = 0$

$M = x \cdot 6 + 2x - 2 \cdot 3$

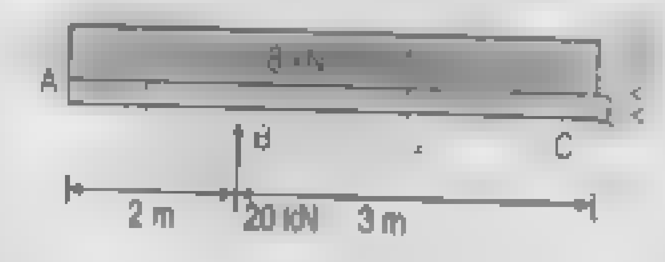
$M = -4$ kN.m $M = -17.5$ kN.m



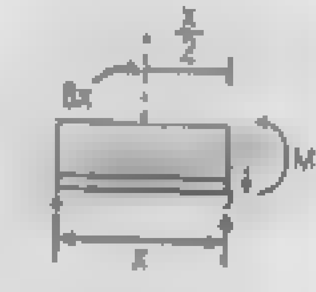
415. Ménsula con la carga indicada en la figura.



Resolución.



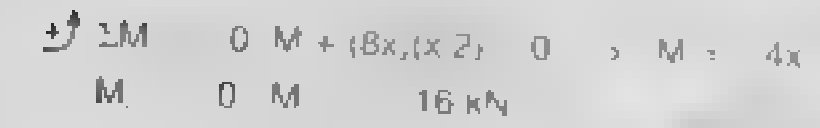
Calculamos las fuerzas en los cortes:



Corte 1 1 x (0,2)

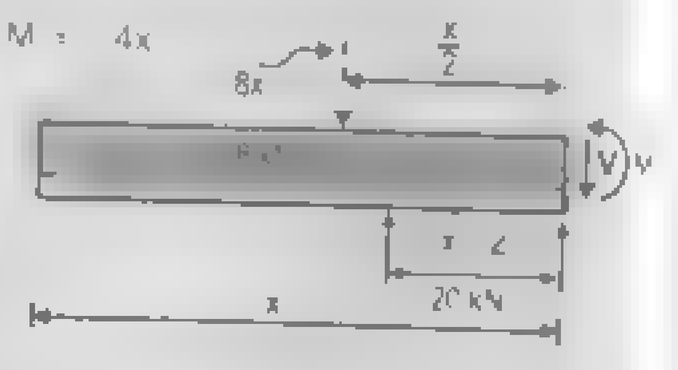
$+\uparrow \Sigma F \quad 0 \quad 8x - V = 0 \Rightarrow V = -8x$

$V_{.} \quad 0,\ V_{x=2} = -16$ kN



$\Sigma M \quad 0 \quad M + (8x)(x/2) \quad 0 \quad M = \quad 4x$

$M. \quad 0 \quad M \quad 16$ kN



Corte 2 2 x (2,5)

$+\uparrow \Sigma F_v \quad 0 \quad 8x + 20 \quad V \quad 0$

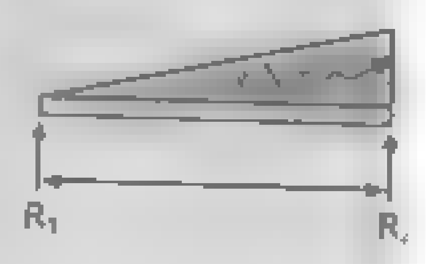
$\Rightarrow V = 20 - 8x$

$V \quad + 4$ kN, $M_{x=5} = -20$ kN

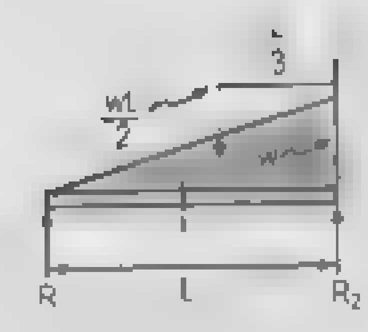
$\Sigma M_{2-2} = 0$: $M + 8x\,(x/2) - 20(x-2) = 0$

$M = (-4x^2 + 20x - 40)$ kN m

416. Viga con la carga triangular que indica la figura.



Resolución



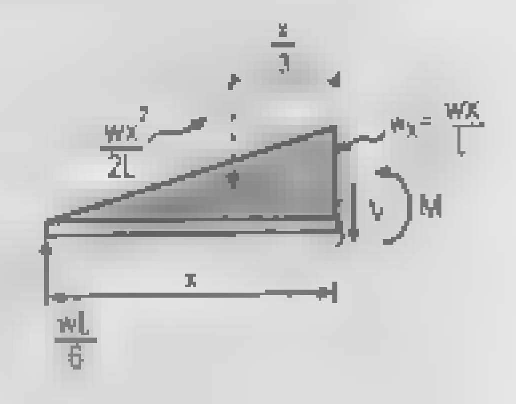
Calculamos R

$\Sigma M_2 = 0$: $\frac{wL}{2}(L/3) - R_1(L) = 0$

$R_1 = wL/6$

Calculamos las fuerzas en el corte 1 1 x (0 L)

$+\uparrow \Sigma F_v = 0$: $\frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L} - V = 0$



$V \quad \frac{wx}{2L} \quad \frac{wL}{6} \quad V. \quad \frac{wL}{6}$

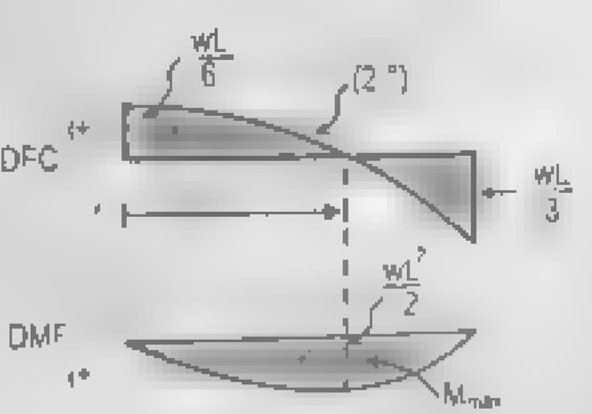
$V. \quad \frac{wL}{3}$

$V \quad 0 \quad \frac{wx}{2L} - \frac{wL}{6} \quad 0 \Rightarrow x \quad \frac{L}{\sqrt{3}}$

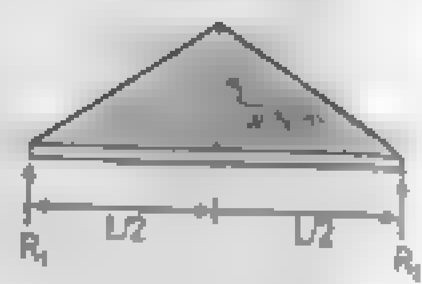
$+\uparrow \Sigma M \quad 0 \quad M \quad \frac{wx}{2L}\left(\frac{x}{3}\right) \quad \frac{wL}{6}x \quad 0$

$M \quad \frac{w}{6L}x \quad \frac{wL}{6}x \quad M. \quad 0 \quad M. \quad 0$

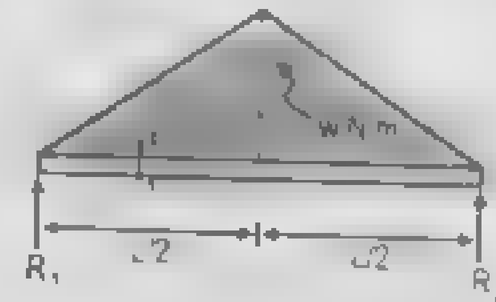
$M \quad M \quad \frac{wL}{9\sqrt{3}}$



417 Viga con la carga triangular que indica en la figura



Resolución:



Por simetría $R_1 = R_2 = \left(\frac{wL}{2}\right)/2 = \frac{wL}{4}$

Calculamos las fuerzas en el corte 1-1 hasta el centro del tramo y por tratarse de una estructura con simetría de cargas y geometría. El DFC es antisimétrico y el DMF es simétrico

Corte 1-1: $x = (0; L/2)$

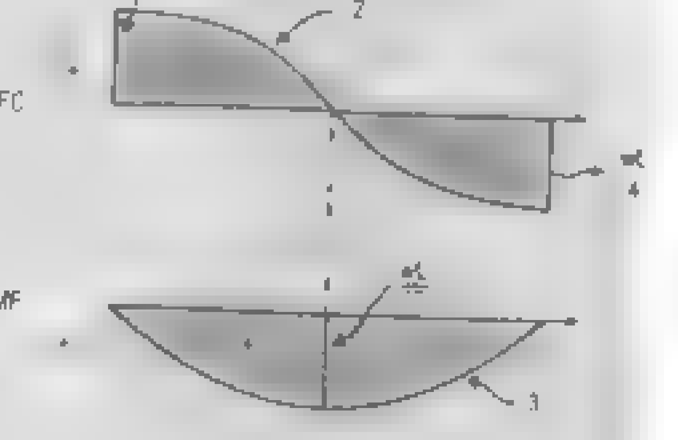
$+\uparrow \Sigma F_v = 0$: $\frac{wL}{4} - \frac{wx^2}{L} - V = 0 \Rightarrow V = \frac{wx^2}{L} \quad \frac{wL}{4}$

$V_{x=0} = \frac{wL}{4}$, $V_{x=L/2} = 0$

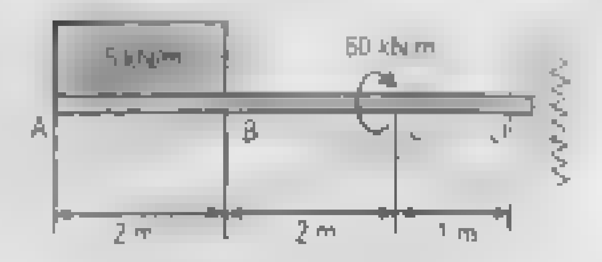
$\Sigma M \quad 0$: $M_1 + \frac{wx}{L}\left(\frac{x}{3}\right) \quad \frac{wL}{4} x \quad 0$

$M \quad \frac{wx}{3L} + \frac{wLx}{4}$

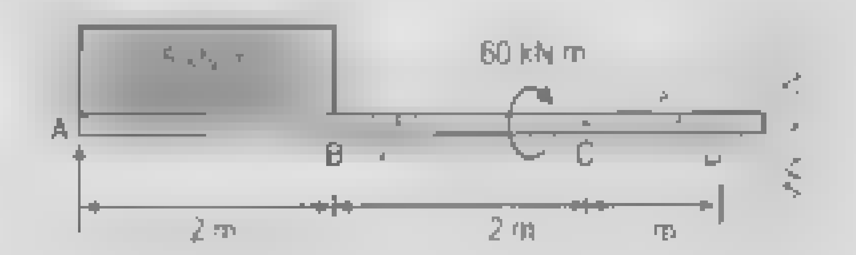
$M_x \quad = 0 \qquad M_x \quad \frac{wL}{12}$



418 Voladizo o ménsula cargada como indica la figura

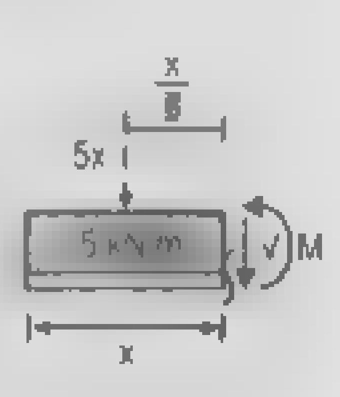


Resolución



Calculamos las fuerzas en los cortes

Corte 1-1: $x = (0;2)$



$+\uparrow \Sigma F \quad 0 \quad 5x \quad V \quad 0 \quad V \quad 5x$

$V \quad 0 \quad V \quad 10\ kN$

$\Sigma M_{1-1} = M + (5x)(x/2) = 0 \rightarrow M = -2.5x^2$

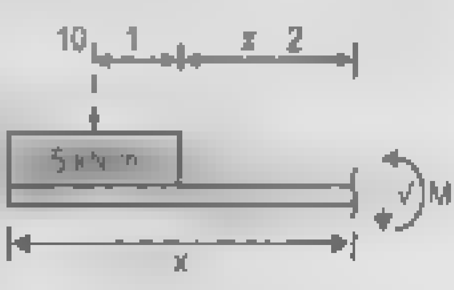
$M \quad 0; M_{x=2} = -10\ kN.m$

Corte 2 - 2: $x = (2;4)$

$+\uparrow \Sigma F_v = 0: -10 - V = 0 \Rightarrow V = -10\ kN$ (cte.)

$\Sigma M_{2-2} \quad 0 \quad M + 10(x \quad 1) \quad 0 \quad M \quad 10x + 10$

$10\ kN.m \quad M \quad 30\ kN.m$



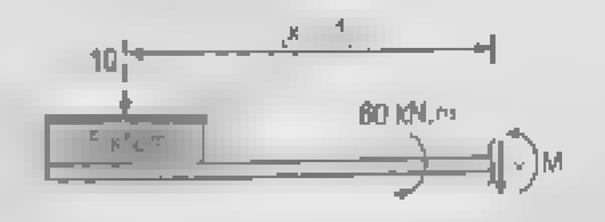
Corte 3-3: $x \quad (4;5)$

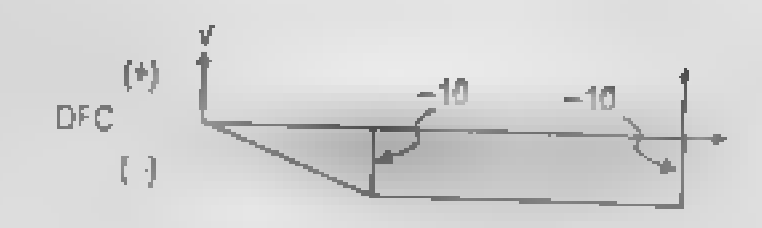
$+\uparrow \Sigma F_v = 0: -10 - V = 0 \Rightarrow V = -10\ kN$

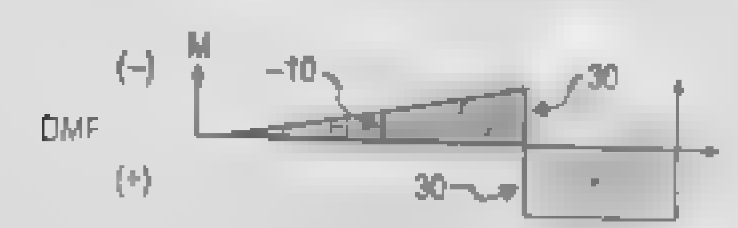
$\Sigma M_{3-3} = 0: M - 60 + 10(x - 1) = 0$

$M = -10x + 70$

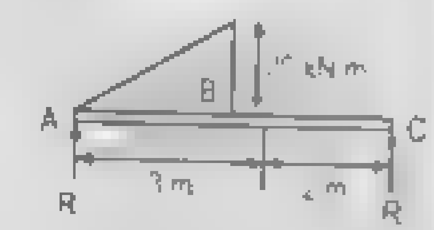
$M \quad = 30\ kN.m \quad M \quad = 20\ kN.m$



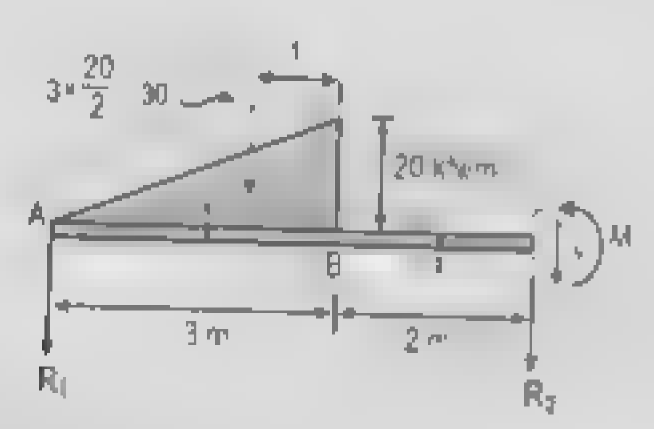




419 Viga cargada como indica en la figura



Resolución:



(I) Cálculo de las reacciones:

$\circlearrowleft + \Sigma M_c = 0$: $30(3) - R_1(5) = 0 \Rightarrow R_1 = 18$

$+\uparrow \Sigma F_v = 0$: $R_1 - 30 + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 12$ kN

(II) Cálculo de las fuerzas en los cortes

Corte 1-1 $x = (0;3)$

$+\uparrow \Sigma F_v$: $18 - \frac{10}{3}x^2 - V = 0 \Rightarrow V = 18 - \frac{10}{3}x^2$

$V_{x=0} = 18$; $V_{x=3} = -12$ kN

$V_x = 18 - \frac{10}{3}x^2 \Rightarrow x = 2.32 = \frac{3}{5}\sqrt{15}$

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0$: $M + \frac{10}{3}x^2\left(\frac{x}{3}\right) - 18x = 0$

$M = -\frac{10}{9}x^3 + 18x$

$M_{x=0} = 0$; $M_{x=3} = 24$ kN.m

$M_{máx} = M_{x=2.32} = 27{,}89$ kN m

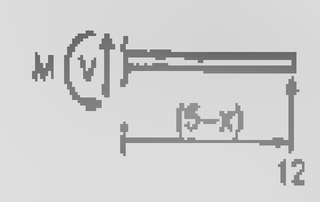
Corte 2-2: $x = (3;5)$

$+\uparrow \Sigma F = 0$: $V + 12 = 0 \Rightarrow V = -12$ kN

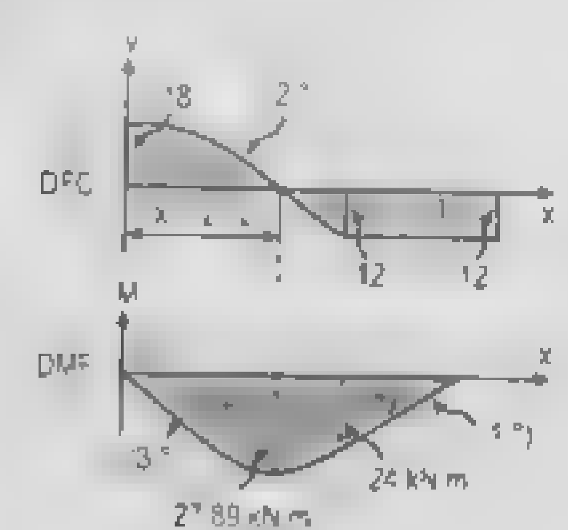
$\circlearrowleft + \Sigma M_{2-2} = 0$: $12(5 - x) - M = 0$

$M = 60 - 12x$

$M_{x=3} = 24$ kN m; $M_{x=5} = 0$ kN m

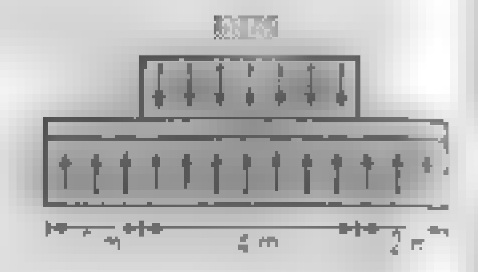


(III) Dibujando los diagramas

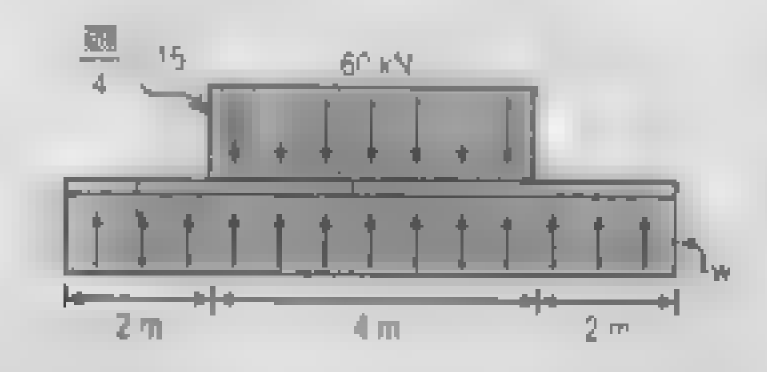


$M_{máx} = 27{,}89$ kN m

420 Una carga distribuida con un total de 60 kN, soportada por una reacción uniforme como indica la figura.



Resolución.

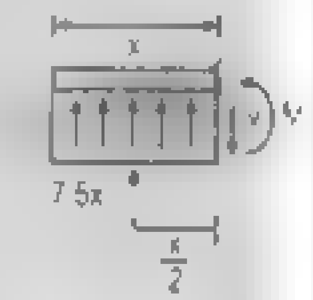


(I) Calculamos w, para que la viga esté en equilibrio.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: -60 + w(8) = 0 \Rightarrow w = 7{,}5$ kN/m

(II) Calculamos las fuerzas en los cortes (notar que es simétrico)

Corte 1 - 1 $x = \langle 0;2 \rangle$



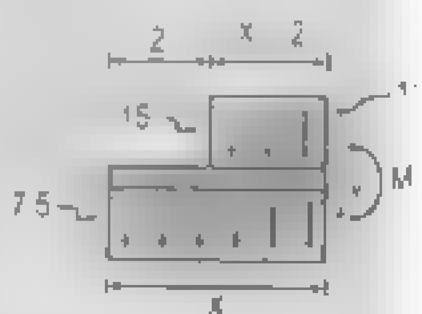
$+\uparrow \Sigma F_y = 0: 7{,}5x - V = 0 \Rightarrow V = 7{,}5x$

$V_{x=0} = 0$, $V_{x=2} = 15$ kN

$\Sigma M_{1-1} = 0$: $M - (7{,}5x)(x/2) = 0 \Rightarrow M = 3{,}75x^2$

$M_{x=0} = 0$, $M_{x=2} = 15$ kN.m

Corte 2 - 2' $x = \langle 2;4 \rangle$



$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $7{,}5x - 15(x-2) - V = 0$

$\Rightarrow V = -7{,}5x + 30$

$V_{x=2} = 15$ kN ; $V_{x=4} = 0$ kN

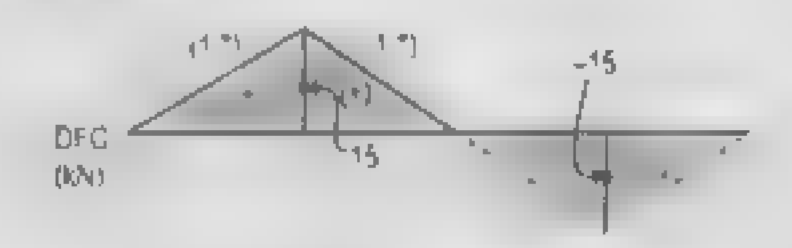
$\Sigma M_{2-2} = 0$: $M + [15(x-2)(x-2)/2] - (7{,}5x)(x/2) = 0$

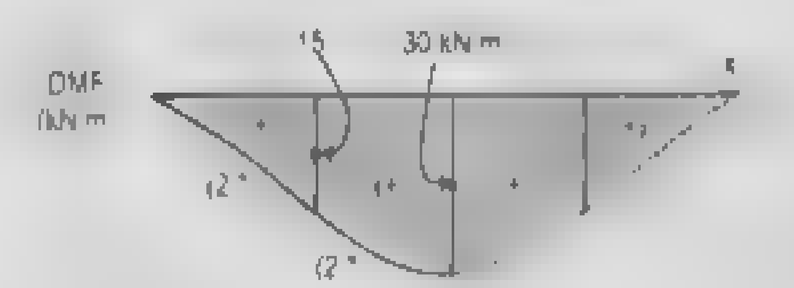
$M = -3{,}75x^2 + 30x - 30$

$M_{x=2} = 15$ kN.m $M_{x=4} = 30$ kN.m

$M_{x=4} = M_{x=4} = 30$ kN.m

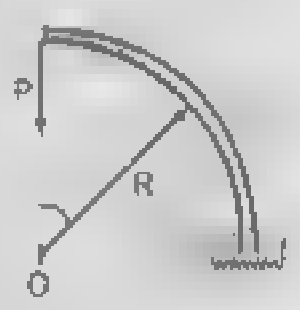
) Dibujando los diagramas





Comentario: esta estructura es simétrica en geometría y carga, por lo cual el DFC es antisimétrico y el DMF simétrico.

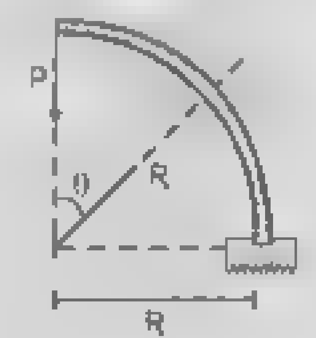
421 Determinar las distribuciones de fuerza cortante y momento flexionante en la barra curva de la figura. (a) en el caso de que la fuerza P sea vertical como está indicado y (b) en el caso de que sea horizontal y dirigida hacia la izquierda.

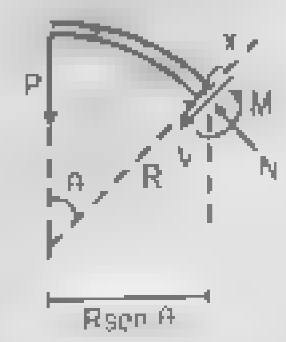


Resolución

Calculamos las fuerzas en el corte 1 - 1: $\theta = \langle 0, \pi/2 \rangle$

Corte 1 - 1





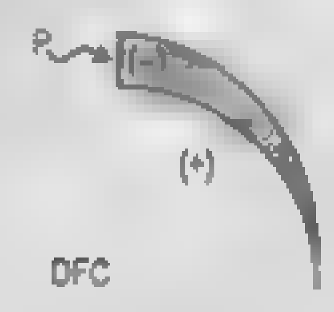
$\Sigma F_x = 0$: $-V - P\cos\theta = 0$

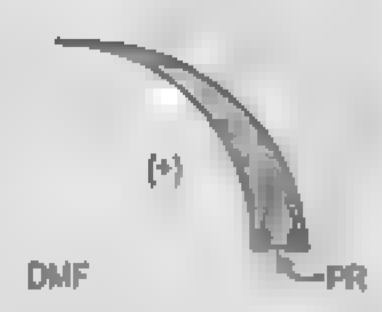
$V = -P\cos\theta$

$\Sigma M = 0$: $M + P(R\,\text{sen}\,\theta) = 0$

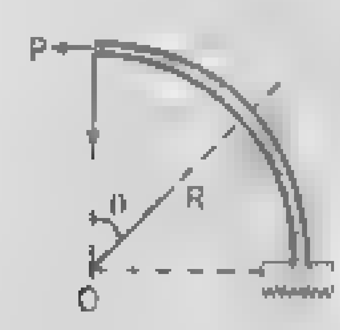
$M = -PR\,\text{sen}\,\theta$

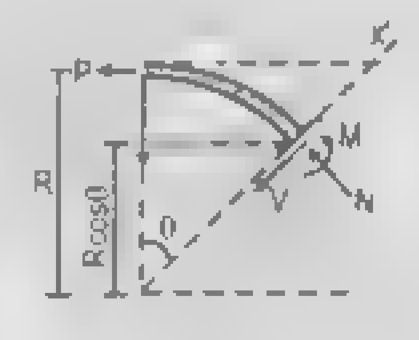
Dibujamos los diagramas





b) Calculamos las fuerzas en el corte 1-1





En el corte 1-1

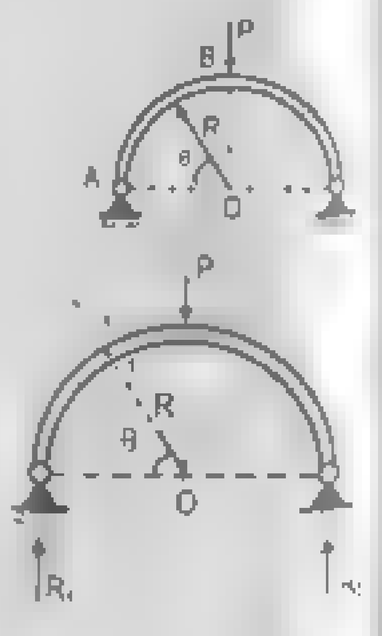
$\Sigma F_x = 0: -V - P\text{sen}\,\theta = 0$

$$\boxed{V = -P\text{sen}\theta}$$

$\Sigma M_{1-1} = 0: M + P(R - R\cos\theta) = 0$

$$\boxed{M = -PR(1-\cos\theta)}$$

422 Determinar las distribuciones de V y M en el arco semicircular de la figura si (a) la fuerza P es vertical como se indica, y (b) si es horizontal y hacia la izquierda, pero aplicada en el mismo punto



Resolución:

(a)

(I) Cálculo de las reacciones, por ser simétrico:

$R_A = R_C = \frac{P}{2}$

(II) Cálculo de las fuerzas:

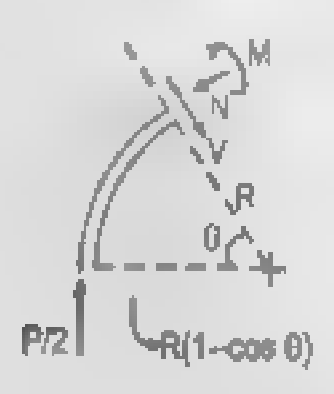
Corte 1-1 (tramo AB) $\theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

$\Sigma F = 0: V - (P/2)\text{sen}\,\theta = 0$

$$V = \frac{P}{2}\text{sen}\theta$$

$\Sigma M = 0: M - (P/2)[(R(1-\cos\theta)] = 0$

$$M = \frac{PR}{2}(1-\cos\theta)$$



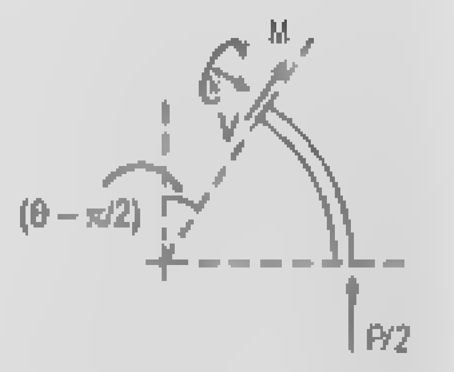
Corte 2 - 2: (tramo BC); $\theta \in \left\langle\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$

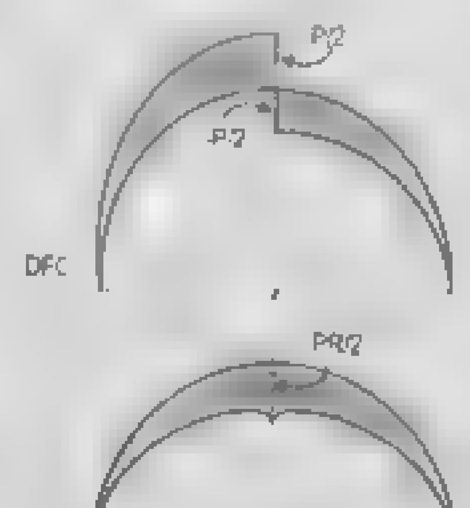
$\Sigma F_t = 0: V + \frac{P}{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 0$

$$V = -\frac{P}{2}\text{sen}\theta$$

$\Sigma M = 0: \frac{P}{2}R\left[1 - \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] - M = 0$

$M = \frac{PR}{2}(1+\cos\theta)$





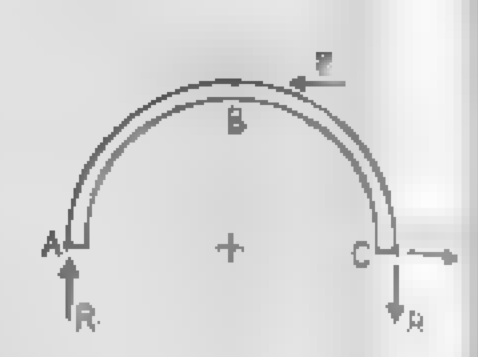
(i) Cálculo de las reacciones

$\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0 \Rightarrow P(R) - R_2(2R) = 0$

$R_2 = P/2$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_1 - R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = P/2$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_H = 0 \Rightarrow -P + r_2 = 0 \Rightarrow r_2 = P$



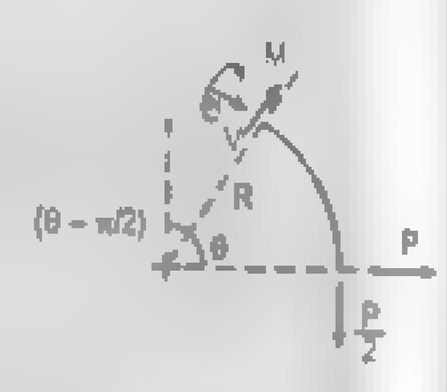
(ii) En el tramo AB las fuerzas son iguales a 222(a)

Para el tramo BC: $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$

$$\Sigma F_r = 0: V + P\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{P}{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

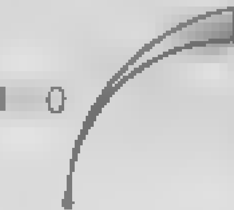
$$V = P\cos\theta + \frac{P}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$V_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{P}{2}, \quad V_{\theta=\pi} = P$$



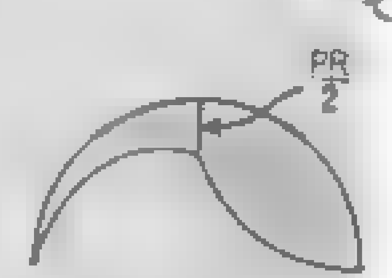
$\circlearrowleft \Sigma M = 0$

$$P\,R\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{P}{2}R\left[1 - \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] - M = 0$$



$$M = PR\operatorname{sen}\theta - \frac{PR}{2}(1+\cos\theta)$$

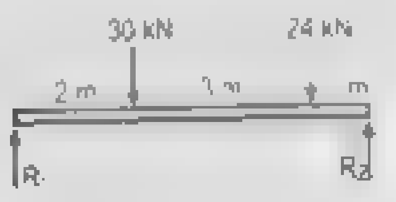
$$M_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{PR}{2}, \quad M_{\theta=\pi} = 0$$



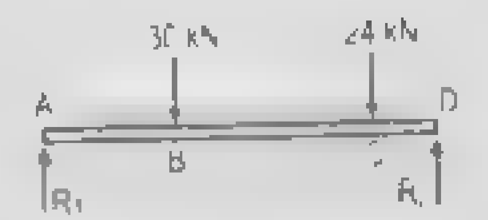
423, 424: problemas ilustrativos

Sin escribir las expresiones de momento flexionante y fuerza cortante, trazar los diagramas correspondientes a las vigas de los problemas siguientes. Dar los valores numéricos en todos los puntos de discontinuidad y en los de fuerza cortante nula.

425 Viga cargada como indica la figura.



Resolución:



Cálculo de las reacciones

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: -30(2) - 24(5) + R_2(6) = 0 \Rightarrow R_2 = 30\text{ kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: -R_1 - 30 - 24 + 30 = 0 \Rightarrow R_1 = 24\text{ kN}$

Dibujando el diagrama de cortante

$V_A = R_1 = 24\text{ kN}$

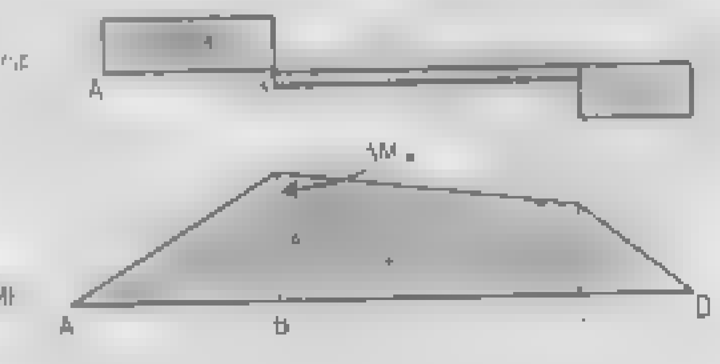
$\Delta V_{A-B} = (\text{área})_{carga} = 0$

$V_B = V_A - 30 = -6\text{ kN}$

$\Delta V_{B-C} = (\text{área})_{carga} = 0$

$V_C = V_B - 24 = -30\text{ kN}$

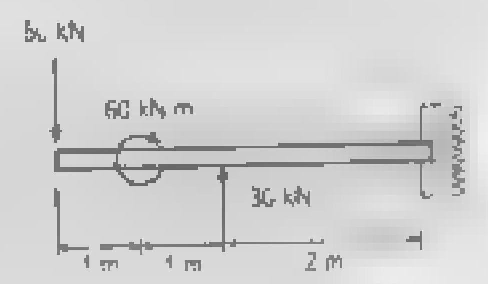
$M_A = 0$



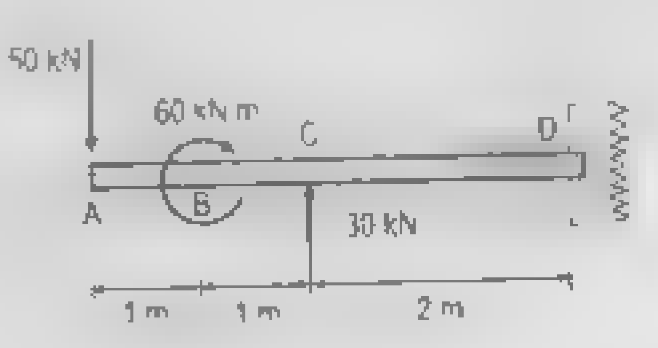
$\Delta M_{AB} = (\text{área})_{cortante} = (+24)(2) = 48$

$\Delta M_{BC} = (\text{área})_{cortante} = (-6)(3) = -18$

426 Viga en voladizo sobre la que actúan dos fuerzas y un par como indica la figura.



Resolución

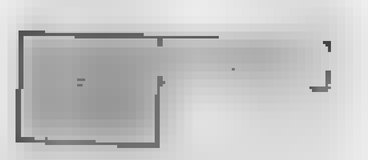


Cortante

$V_A = -50$ kN

$\Delta V_{AB} = 0$ ΔV_{BC}

$V = -50 + 30 = -20$ kN



Flexionante

$\Delta M_{AB} = (-50)(1) = -50$ kN m

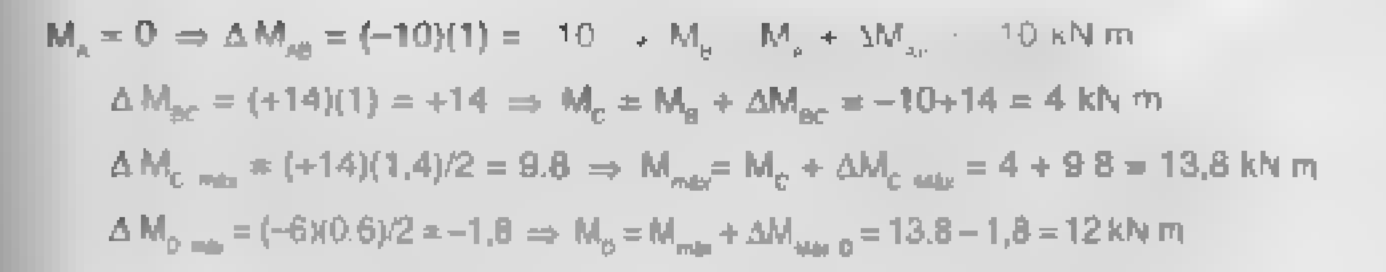
$M_B = -50 + 60 = 10$

$\Delta M_{BC} = (-50)(1) = -50$

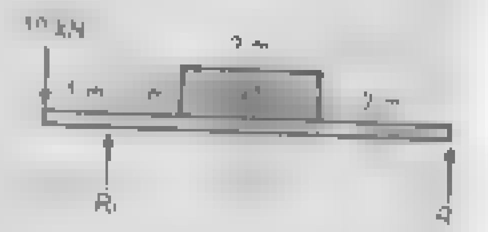
$M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 10 - 50 = -40$

$\Delta M_{CD} = (-20)(2) = -40$

$M_D = M_C + \Delta M_{CD} = -40 - 40 = -80$



4.27 Viga cargada como indica la figura



Resolución:

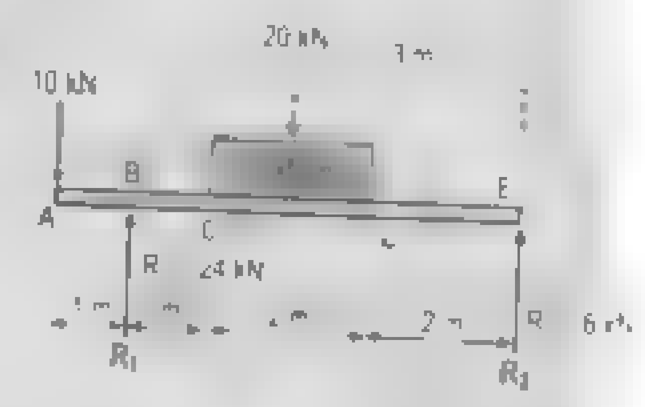
Cálculo de las reacciones

$\sum M = 0$ $10(6) - R_1(5) + 20(3) = 0$

$R_1 = 24$ kN

$\sum F = 0$ $-10 + 24 - 20 + R = 0$

$R = 6$ kN



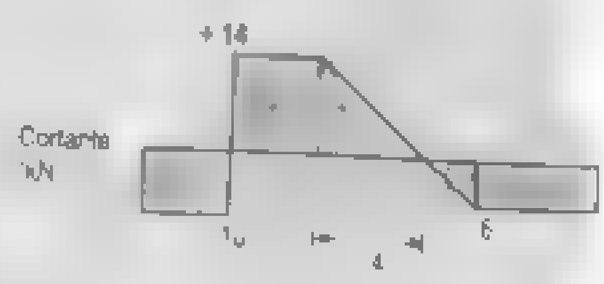
$V_A = -10$ kN

$\Delta V_{A-B} = 0$

$V_B^- = -10$ kN

$V_B = V_B^- + 24 = -10 + 24 = 14$

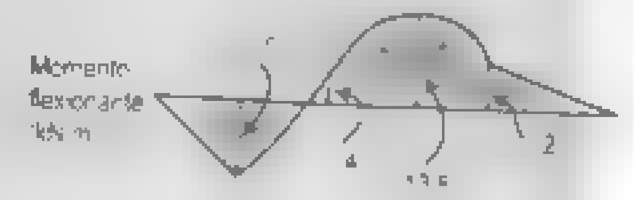
$\Delta V_B = 0$ $V_C = V_B = 14$



$\Delta V_{CE} = (-10)(2) = -20$ kN

$V_E = V_C + \Delta V_{CE} = 14 - 20 = -6$ kN

$\Delta V_{EF} = 0$ $V_F = V = 6$ NK

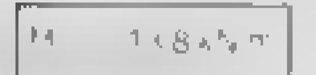


$M_A = 0 \Rightarrow \Delta M_{AB} = (-10)(1) = -10 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -10$ kN m

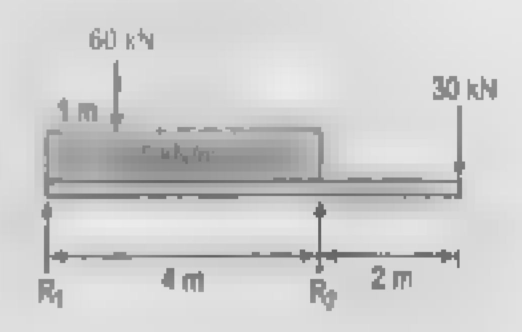
$\Delta M_{BC} = (+14)(1) = +14 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -10+14 = 4$ kN m

$\Delta M_{C\,máx} = (+14)(1,4)/2 = 9.8 \Rightarrow M_{máx} = M_C + \Delta M_{C\,máx} = 4 + 9.8 = 13,8$ kN m

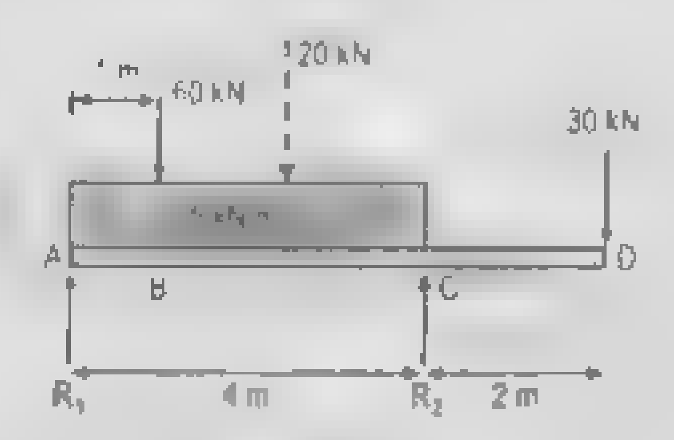
$\Delta M_{D\,máx} = (-6)(0.6)/2 = -1,8 \Rightarrow M_D = M_{máx} + \Delta M_{máx\,D} = 13.8 - 1,8 = 12$ kN m



4.28 Viga cargada como se muestra en la figura



Resolución



$\sum M = 0$ $-R_1(4) + 60(3) + 120(2) - 30(2) = 0$ $R_1 = 40$ kN

$\sum F = 0$ $40 - 60 - 120 + R_2 - 30 = 0$ $R_2 = 70$ kN

$V_A = R_1 = 40$ kN

$\Delta V_{A-B} = (-5)(1) = -5$ kN, $V_B = 35$

$V_B^- = V_B - 60 = 35 - 60 = -25$ kN

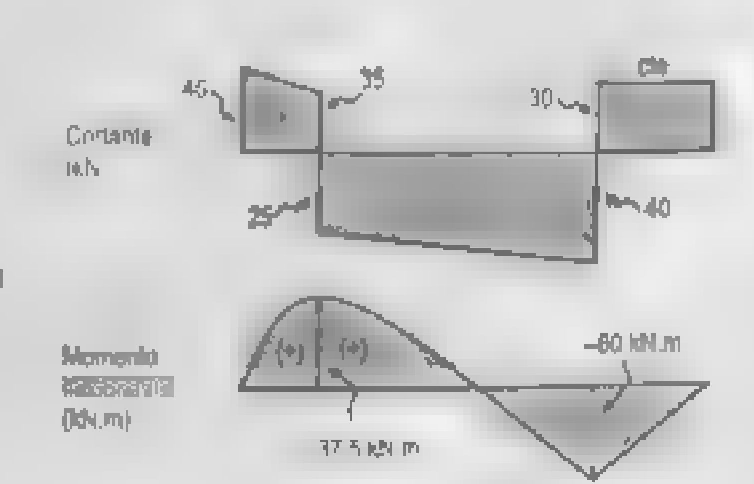
$\Delta V = (-5)(3) = -15$ kN

$V_C = V_B + \Delta V = -25 - 15 = -40$

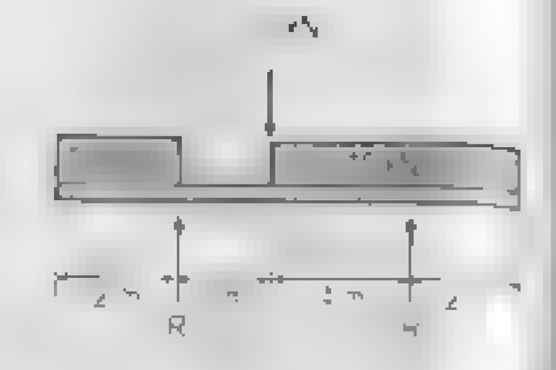
$V_C^+ = V_C + R_2 = -40 + 70 = 30$ kN

$M_A = 0$

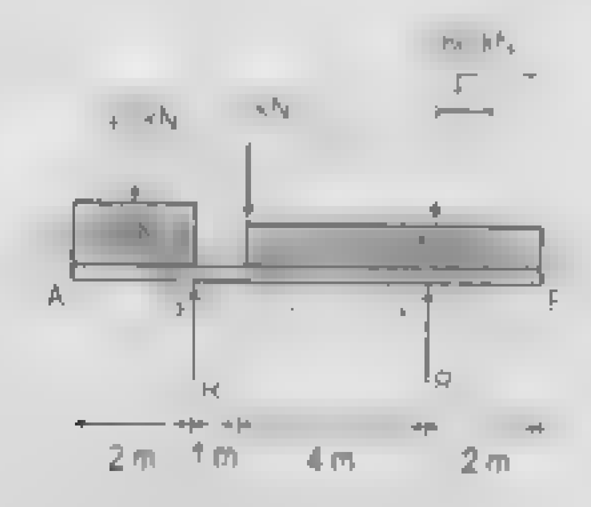
$\Delta M_{AB} = (40 + 35) \times 1/2 = 37,5$



429 Viga cargada como se indica en la figura.



Resolución



Cálculo de las reacciones

$\circlearrowleft\!+ \ \Sigma M \quad 0 \ 40\,6) \quad R \ 5 \ + \ldots \ 4) + 60(1) \quad 0 \qquad R \quad 76 \text{ kN}$

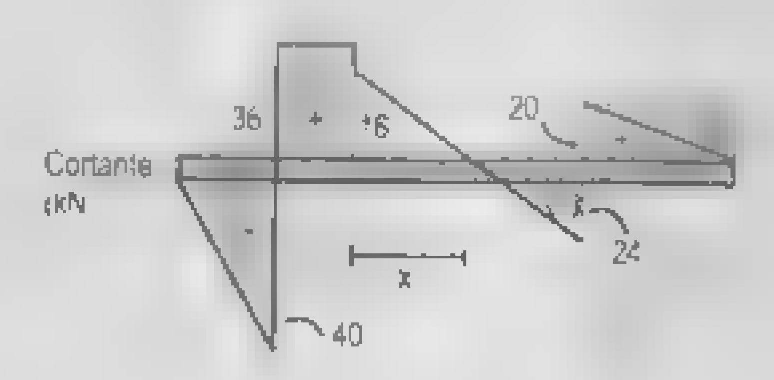
$+\uparrow \ \Sigma F \quad 0 \quad 40 + 76 \quad 20 \quad 60 + R \qquad R \quad 44 \text{ kN}$

$V_A \ 0 \quad \Delta V_{AB} \quad 20 \cdot 2 \quad 40 \text{ kN} \ \ldots \quad V_A \quad \Delta V_{AB} \quad 0 \ldots \quad 40 \text{ kN m}$

$V_B \quad V_B \quad R \quad 40 \quad 76 \quad 36 \quad \Delta V_{BC} \quad 0 \Rightarrow V \quad \ldots \quad 36$

$V_C^+ = V_C - 20 = 36 - 20 = 16; \ \Delta V_{CD} = (-10)(4) = -40 \ \Rightarrow \ V_D = V_C^+ + \Delta V_{CD} = -24$

$V_D^+ = V_D + R_2 = -24 + 44 = 20; \ \Delta V_{DE} = (-10)(2) = -20 \ \Rightarrow \ V_E = V_D^+ + \Delta V_{DE} = 0$



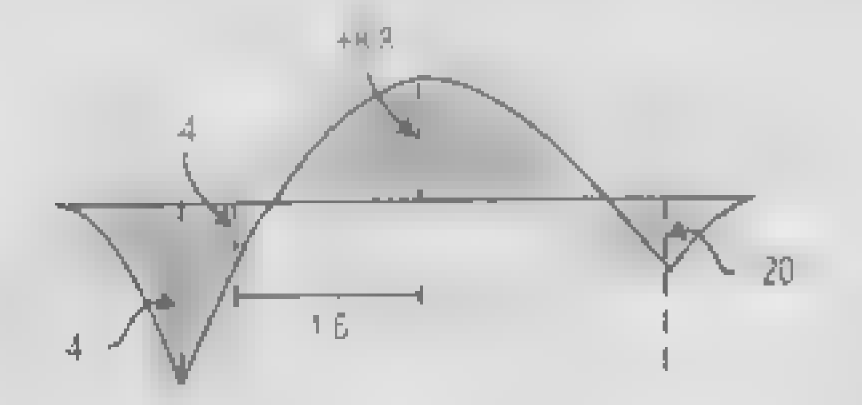
Cálculo de la posición para $V = 0 \ \Rightarrow \ x = 1.6$ m

$M_A = 0, \ \Delta M_{AB} = (\text{área})_{cortante} = (-40)(2)/2 = -40 \text{ kN m}, \ M_B = -40 \text{ kN.m}$

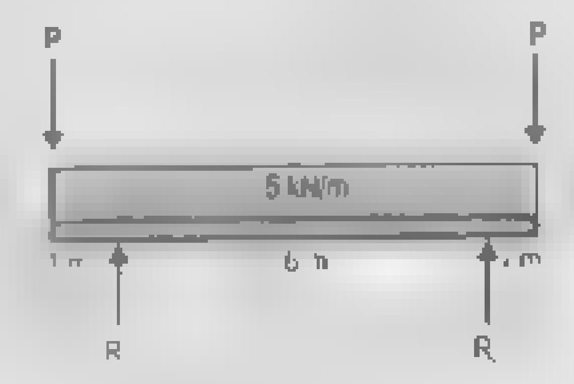
$\Delta M_{BC} = (36)(1) = 36, \ M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -40 + 36 = -4$

$\Delta M_{CX} = (16)(1{,}6)/2 = 12{,}8 \ ; \ M_X = M_C + \Delta M_{CX} = -4 + 12{,}8 = 8{,}8$

$\Delta M_{XD} = (-24)(2{,}4/2) = 28{,}8 \ , \ M_D = M_X + \Delta M_{XD} = 8.8 - 28.8 = -20$



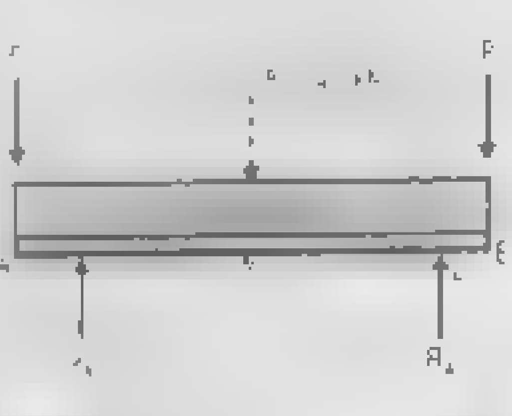
430 En la viga mostrada en la figura determine P para que el momento sobre cada apoyo sea igual al momento a la mitad del claro.



Resolución

Cálculo de las reacciones

$R_1 = R_2 = P + 20$ (simétrico)



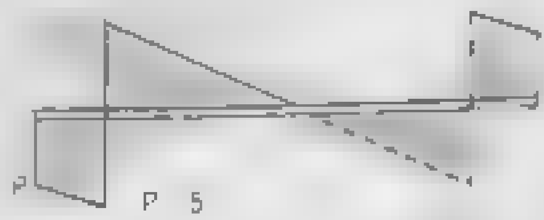
$V_A = -P, \ \Delta V_{AB} = (-5)(1) = -5, \ V_B = -P - 5$

$V_B^+ = V_B^- + R_1 = 15, \ \Delta V_{BC} = (-5)(3) = -15$

$V_C = V_B^+ + \Delta V_{BC} = 15 - 15 = 0$

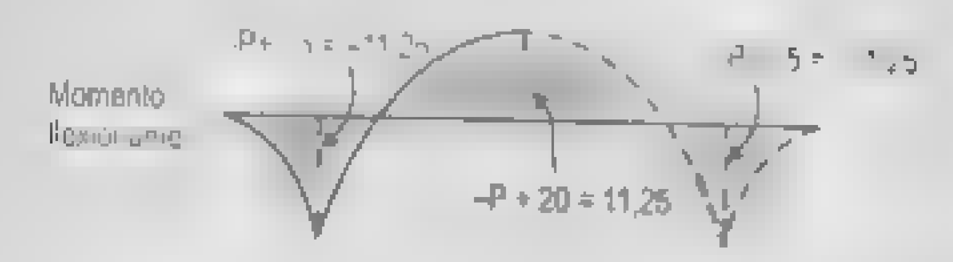
$M_A = 0, \ \Delta M_{AB} = -P(1) - (1)(5)/2 = -P - 2{,}5$

$M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -P - 2{,}5$

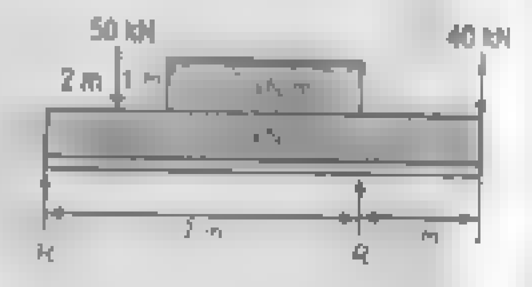


$\Delta M_{BC} = (15)(3)/2 = 22,5 \quad M_C = -P + 20$

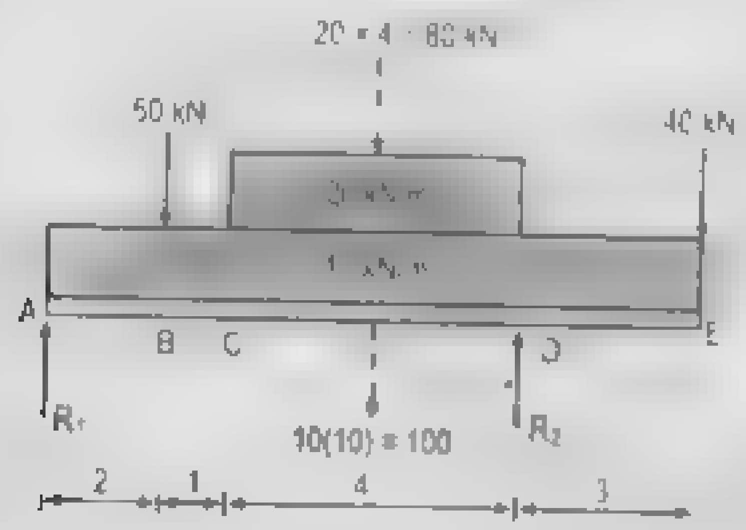
$M_B + M_C = 0 \quad -P - 2,5 - P + 20 = 0 \Rightarrow P = 8,75$



431 Viga cargada y apoyada como indica la figura



Resolución:



(a) Reacciones

$\circlearrowleft + \; \Sigma M_D = 0: \; -R_1(7) + 50(5) + (100 + 80)(2) - 40(3) = 0 \Rightarrow R_1 = 70$ kN

$+\uparrow \; \Sigma F_y = 0: \; 70 - 50 - 100 - 80 + R_2 - 40 = 0 \Rightarrow R_2 = 200$ kN

(b) Cortante

$V_A = R_1 = 70 \Rightarrow \Delta V_{AB} = (-10)(2) = -20; \; V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 70 - 20 = 50$ kN

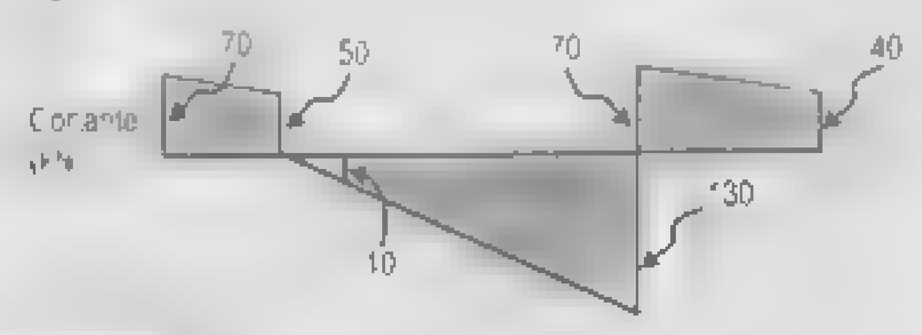
$V_B^+ = V_B - 50 = 50 - 50 = 0 \Rightarrow \Delta V_{BC} = (-10)(1) = -10, \; V_C = V_B + \Delta V_{BC} = -10$ kN

$V_C^+ = V_C^- = -10 \Rightarrow \Delta V_{CD} = (-10 - 20)(4) = -120$

$V_D^- = V_C^+ + \Delta V_{CD} = -10 - 120 = -130$ kN

$V_D^+ = V_D + R_2 = -130 + 200 = 70 \Rightarrow \Delta V_{DE} = (-10)(3) = -30$

$\Rightarrow V_E = V_D^+ + \Delta V_{DE} = 70 - 30 = 40$



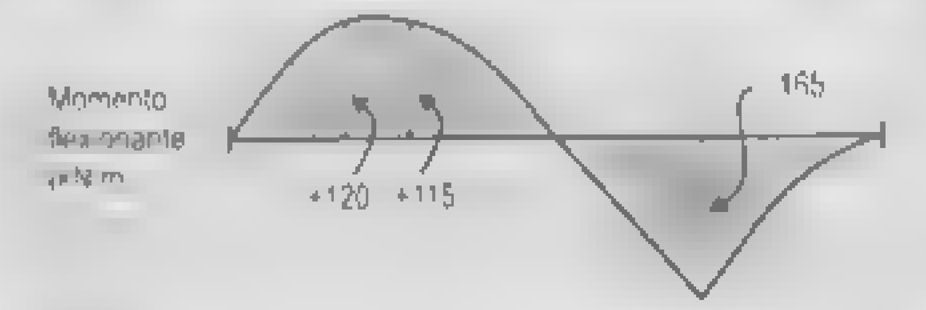
(c) Momento flexionante

$M_A = 0 \Rightarrow \Delta M_{AB} = (+70 + 50)(2/2) = 120; \; M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 120$ kN m

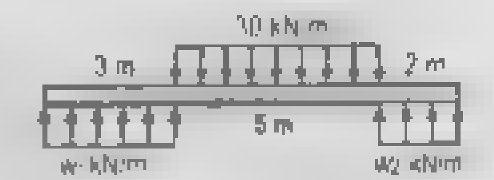
$\Delta M_{BC} = (0 - 10)(1/2) = -5 \quad M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 120 - 5 = 115$ kN m

$\Delta M_{CD} = (-10 - 130)(4/2) = -280 \quad M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 115 - 280 = -165$

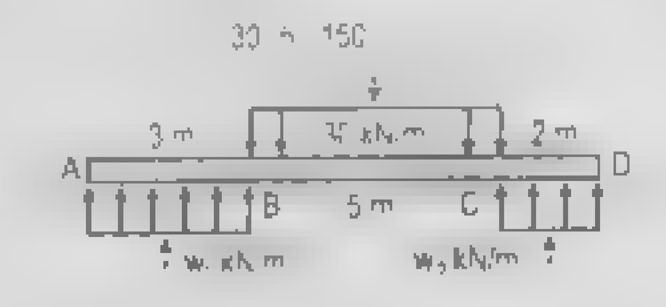
$\Delta M_{DE} = (70 + 40)(3/2) = 165 \quad M_E = M_D + \Delta M_{DE} = -165 + 165 = 0$



432 Una carga distribuida está sostenida por dos cargas repartidas como se muestra en la figura



Resolución:



(a) Reacciones

$\circlearrowleft \Sigma M = 0$: $(3w_1)(7{,}5) + 150(3{,}5) = 0 \;\Rightarrow\; w_1 = 70/3 = 23{,}3$ kN/m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $70 - 150 + 2w_2 = 0 \;\Rightarrow\; w_2 = 40$ kN/m

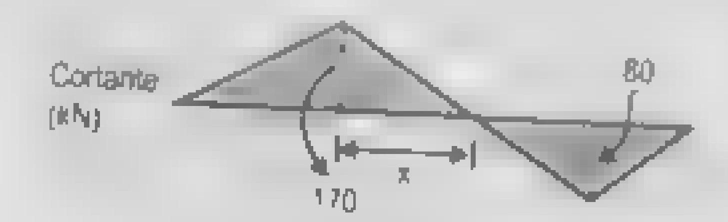
(b) Cortante

$V_A = 0$, $\Delta V_{AB} = (70/3)(3) = 70 \Rightarrow V_B^- = V_A + \Delta V_{AB} = 0 + 70 = 70$

$V_B^+ = V_B^- = 70$, $\Delta V_{BC} = (-30)(5) = -150 \Rightarrow V_C = V_B^+ + \Delta V_{BC} = 70 - 150 = -80$

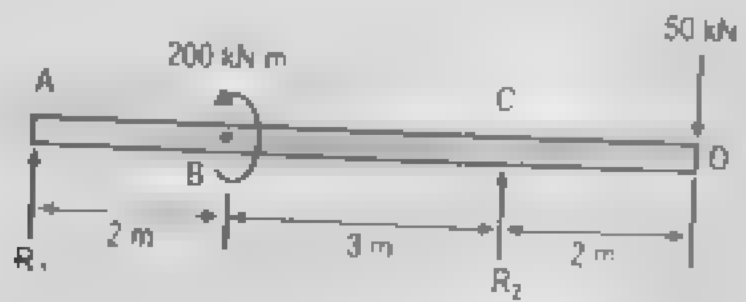
$V_C^+ = V_C^- = 80$, $\Delta V_{CD} = (40)(2) = 80 \Rightarrow V_D^+ = V_C^+ + \Delta V_{CD} = -80 + 80 = 0$

$x = \dfrac{70}{150}(5) = \dfrac{7}{3} = 2{,}33$ m



433. Viga como voladizo cargada por una fuerza y un par, como se muestra en la figura.

Resolución:



(a) Reacciones: equilibrio

$\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0$: $R_1(5) + 200 - 50(2) = 0 \;\Rightarrow\; R_1 = 20$ kN

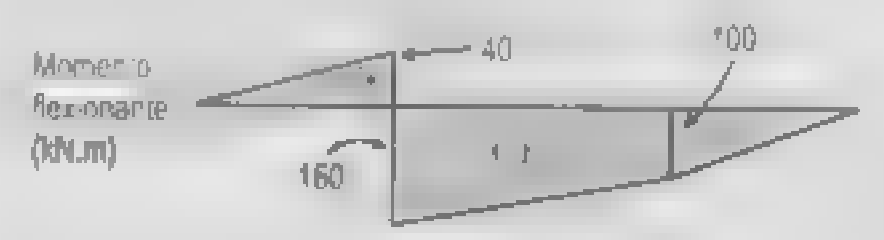
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $20 + R_2 - 50 = 0 \;\Rightarrow\; R_2 = 30$ kN

(b) Cortante

$V_A = R_1 = 20 \Rightarrow \Delta V_{AB} = 0 \Rightarrow V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 20 + 0 = 20$ kN

$V_B = V_B = 20 \Rightarrow \Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow V_C = V_B + \Delta V_{BC} = 20 + 0 = 20$ kN

$V_C^+ = V_C + R_2 = 20 + 30 = 50 \Rightarrow \Delta V_{CD} = 0 \rightarrow V_D = V_C^+ + \Delta V_{CD} = 50 + 0 = 50$ kN



(c) Momento flexionante

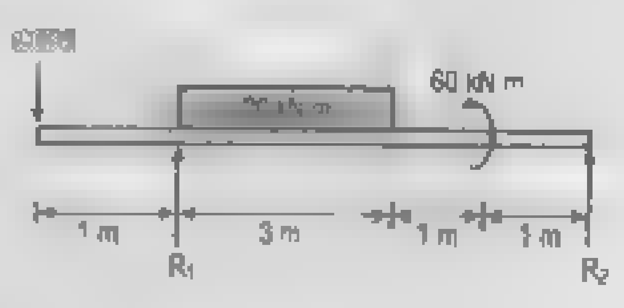
$M_A = 0 \Rightarrow \Delta M_{AB} = (20)(2) = 40$, $M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 + 40 = 40$ kN m.

$M_B^+ = M_B - 200 = 40 - 200 = -160$, $\Delta M_{BC} = (20)(3) = 60$, $M_C = -160 + 60 = -100$ kN.m

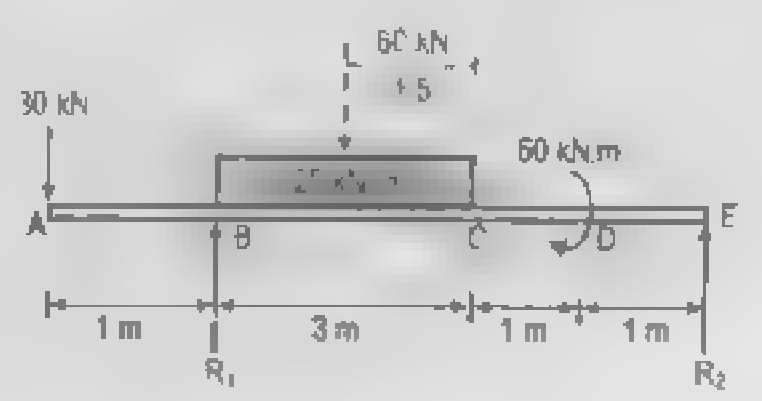
$M_C^+ = M_C = -100 \Rightarrow \Delta M_{CD} = 50(2) = 100 \Rightarrow M_D = M_C^+ + \Delta M_{CD} = -100 + 100 = 0$ kN.m

Momento flexionante (kN.m)
40
100
160

434. Viga cargada como se muestra en la figura.



Resolución



(a) Reacciones

$\circlearrowleft \Sigma M = 0$: $30(6) - R_1(5) + 60(3{,}5) - 60 = 0 \Rightarrow R_1 = 66$ kN

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $-30 + 66 - 60 + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 24$ kN

(b) Cortante

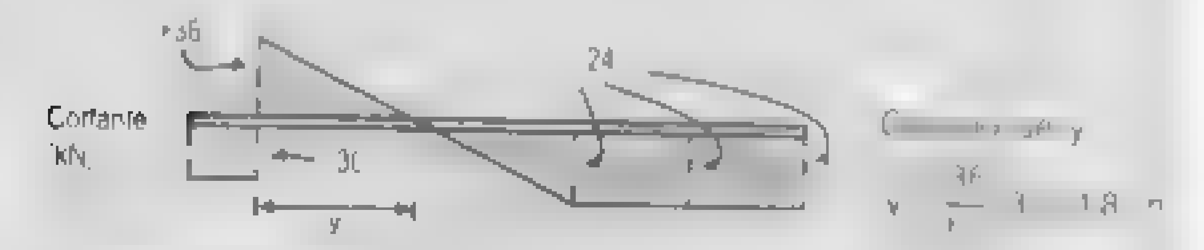
$V_A = -30$, $\Delta V_{AB} = 0 \Rightarrow V_B^- = V_A + \Delta V_{AB} = -30 + 0 = -30$ kN

$V_B^+ = V_B^- + R = -30 + 66 = 36$, $\Delta V_{BC} = (-20)(3) = -60$

$\Rightarrow V_C = V_B^+ + \Delta V_{BC} = -24$ kN

$V_C = -24$, $\Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_D = V_C + \Delta V_{CD} = -24 + 0 = -24$ kN

$V_D^+ = V_D = -24$, $\Delta V_{DE} = 0 \Rightarrow V_E = -24$ kN



(c) Momento flexionante

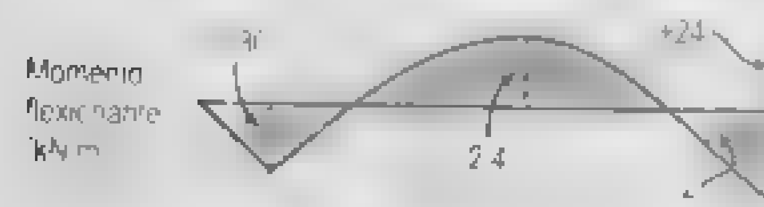
$M_A = 0$ ... -30 ... $0 - 30 = -30$ kN m

M_B ... -30 ... $(36)(1{,}8)/2 = 32{,}4$ ... $-30 + 32{,}4 = 2{,}4$ kN m

M ... $2{,}4$ ... $(24)(1{,}2)/2 = 14{,}4$ ... $M_C = 2{,}4 - 14{,}4 = -12$ kN m

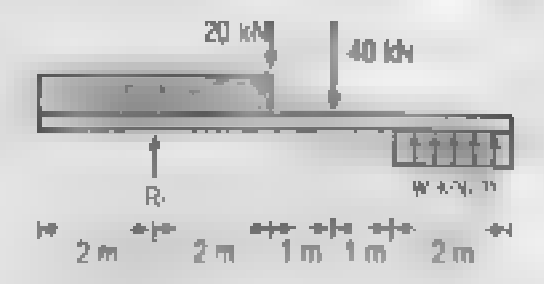
M ... -12, $\Delta M_{CD} = (-24)(1) = -24 \Rightarrow M_D = -12 - 24 = -36$ kN m

$M_D^d = M_D + 60 = -36 + 60 = 24$, $\Delta M_{DE} = -24$ ... $24 - 24 = 0$ kN m

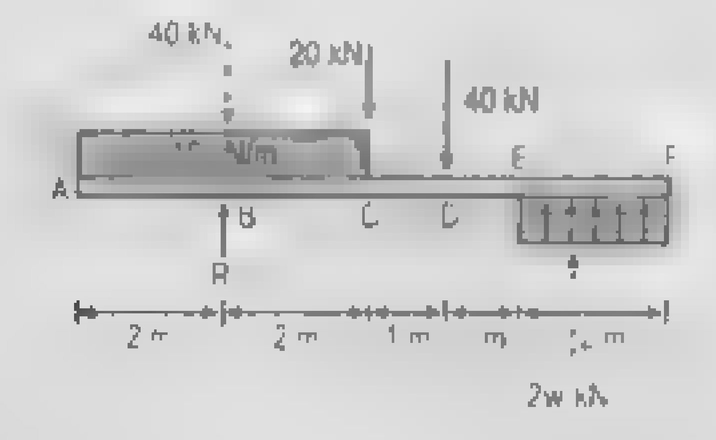


M ... 36 kN m

Viga cargada como se muestra en la figura



Resolución



a) Reacciones

$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $-20(2) - 40(3) + 2w(5) = 0 \Rightarrow w = 16$ kN/m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $R_1 - 40 - 20 - 40 + 2(16) = 0 \Rightarrow R_1 = 68$ kN

b) Cortante

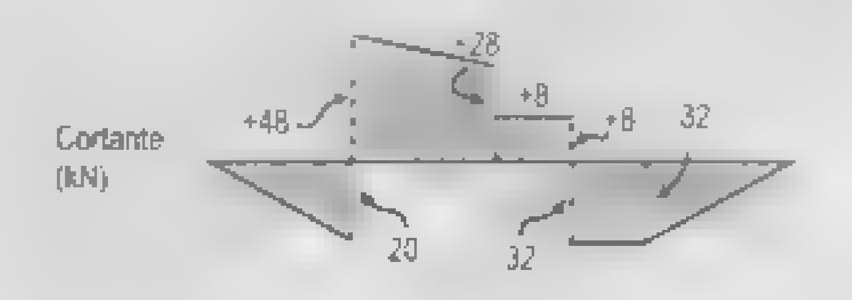
$V_A = 0$, $\Delta V_{AB} = (-10)(2) = -20 \Rightarrow V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 0 - 20 = -20$ kN

$V_B^+ = V_B^- + R_1 = -20 + 68 = 48$, $\Delta V_{BC} = (-10)(2) = -20 \Rightarrow V_C = 48 - 20 = 28$ kN

$V = V_C^+ - 20 = 28 - 20 = 8$, $\Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_E = 8 + 0 = 8$ kN

$V = V_D^+ - 40 = 8 - 40 = -32$, $\Delta V_{DE} = 0 \Rightarrow V_E = V_D^d + \Delta V_{DE} = -32 + 0 = -32$ kN

V_F ... -32, $\Delta V_{EF} = (16)(2) = 32 \Rightarrow V_F = V_E^d + \Delta V_{EF} = -32 + 32 = 0$ kN



c) Momento flexionante

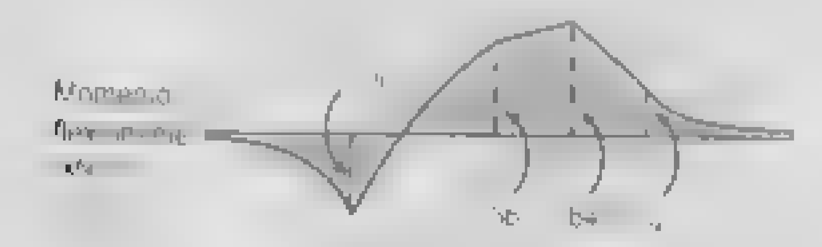
$M_A = 0$, $\Delta M_{AB} = (-20)(2/2) = -20$, $M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 - 20 = -20$ kN.m

$\Delta M_{BC} = (48 + 28)(2/2) = +76$, $M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -20 + 76 = 56$ kN.m

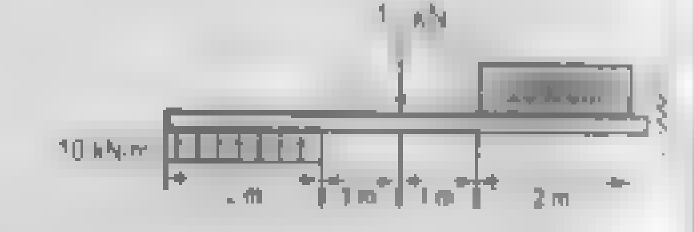
$\Delta M_{CD} = (8)(1) = 8$, $M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 8 + 56 = 64$ kN.m

$\Delta M_{DE} = (-32)(1) = -32$, $M_E = M_D + \Delta M_{DE} = 64 - 32 = 32$ kN.m

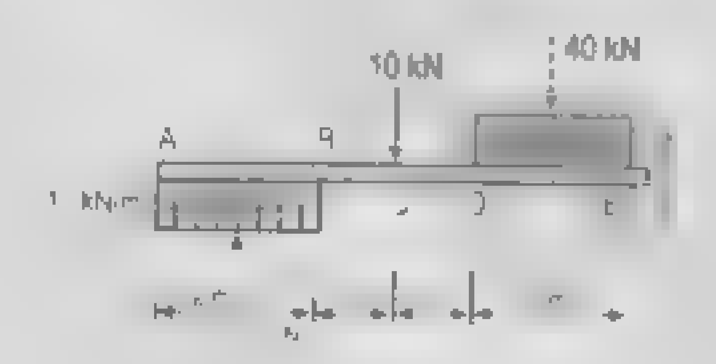
$\Delta M_{EF} = (-32)(2/2) = -32$, $M_F = M_E + \Delta M_{EF} = 32 - 32 = 0$ kN.m



436 Viga en voladizo cargada como se indica en la figura.



Resolución



a) Cortante

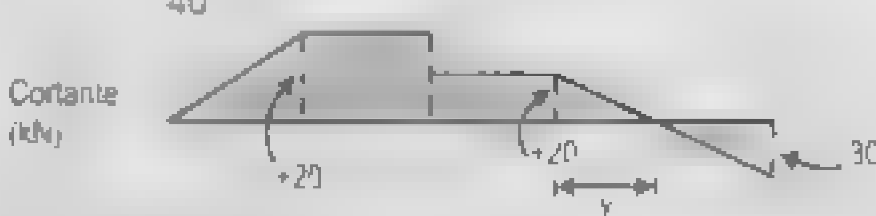
$V_A = 0$, $\Delta V_{AB} = (10)(2) = 20$ kN $\Rightarrow V_B^i = V_A + \Delta V_{AB} = 0 + 20 = 20$ kN

V_B^d: $V_B = 20$, $\Delta V_{BC} = 0$ [illegible] $20 + 0 = 20$

[illegible] $10 = 20 - 10 = 10$ [illegible] $= 0$ [illegible] $= 10 + 0 = 10$ kN

$V_D^d = V_D = 10$, $\Delta V_{DE} = (-20)(2) = -40 \Rightarrow V_E = V_D^d + \Delta V_{DE} = 10 - 40 = -30$ kN

Cálculo de y: $y = \frac{10}{40} \times 2 = 0{,}5$ m



b) Momento flexionante

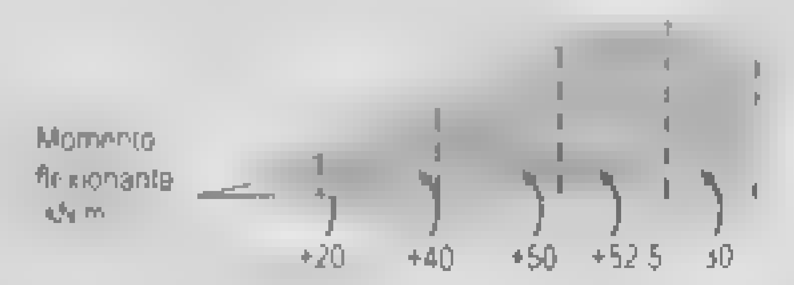
$M_A = 0$, $\Delta M_{AB} = (20)(2/2) = 20 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 + 20 = 20$ kN.m

$\Delta M_{BC} = (+20)(1) = 20 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 20 + 20 = 40$ kN.m

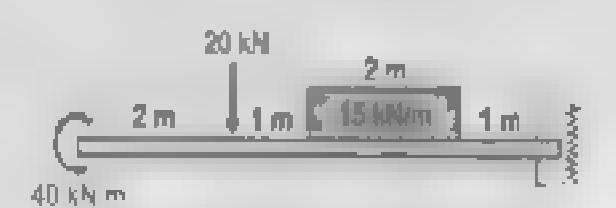
$\Delta M_{CD} = (+10)(1) = 10 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 40 + 10 = 50$ kN.m

$\Delta M_{Dy} = (10)(0{,}5/2) = 2{,}5 \Rightarrow M_y = M_D + \Delta M_{Dy} = 50 + 2{,}5 = 52{,}5$ kN.m

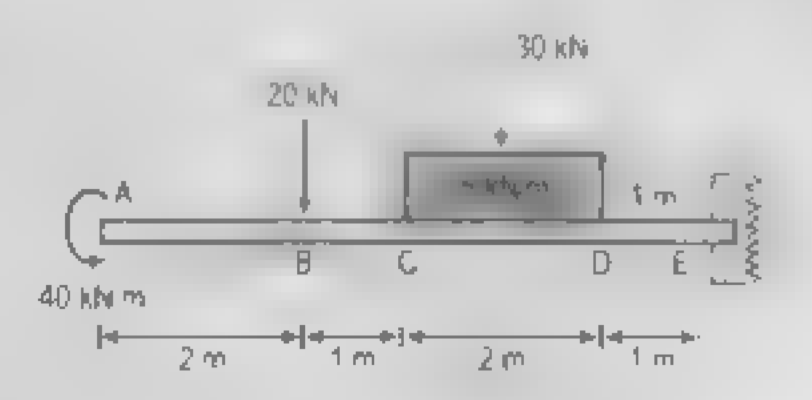
$\Delta M_{yE} = (-30)(1{,}5/2) = -22{,}5 \Rightarrow M_E = M_y + \Delta M_{yE} = 52{,}5 - 22{,}5 = 30$ kN.m



437. Viga en voladizo cargada como se muestra en la figura.



Resolución.

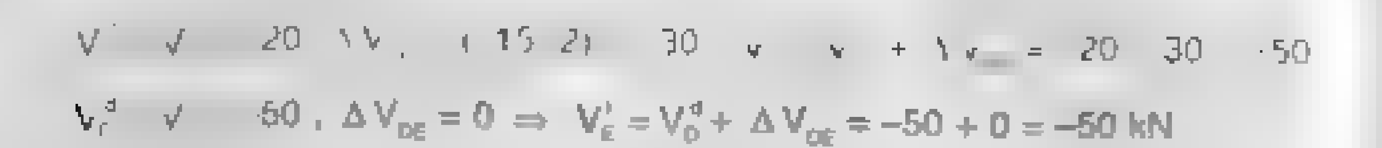


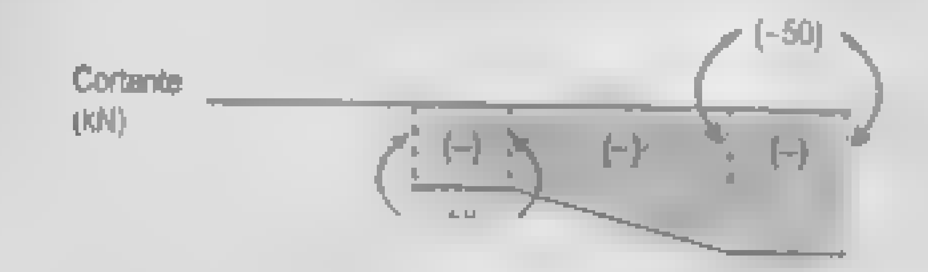
a) Cortante

$V_A = 0$, $\Delta V_{AB} = 0$, $V_B = 0$

$V_B = V_B^i - 20 = 0 - 20 = -20$ kN

$\Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow = V_C = -20$ kN





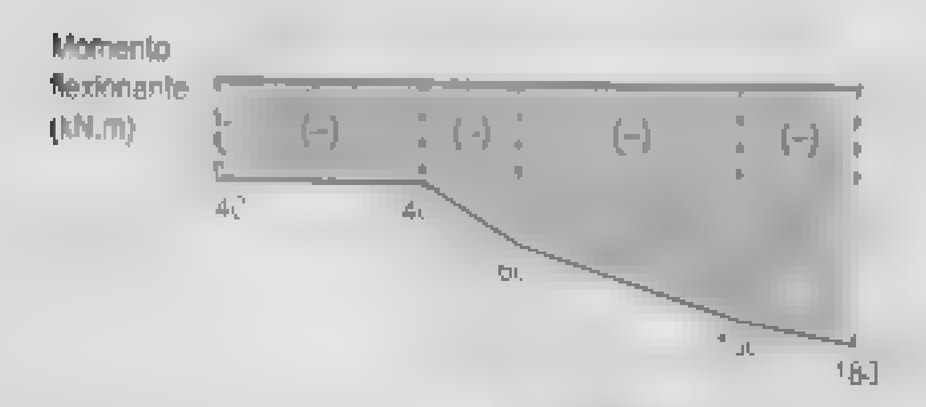
b) Momento flexionante

$M_A = -40$, $\Delta M_{AB} = 0 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -40 + 0 = 40$ kN m

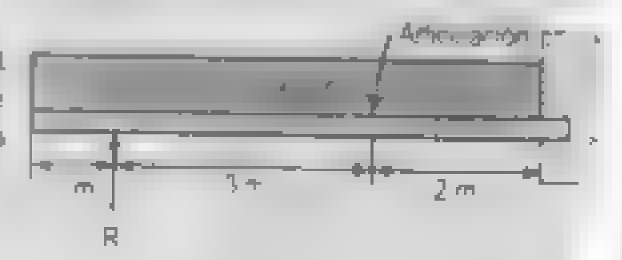
$\Delta M_{BC} = (-20)(1) = -20 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -40 - 20 = -60$ kN m

$\Delta M_{CA} = (-20 - 50)(2/2) = -70 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = -60 - 70 = -130$ kN m

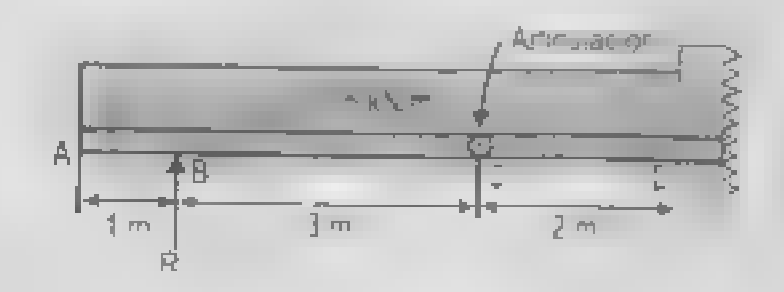
$\Delta M_{DE} = (-50)(1) = -50 \Rightarrow M_E = M_D + \Delta M_{DE} = -130 - 50 = -180$ kN m



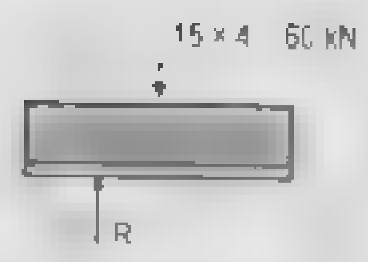
438. Una viga en voladizo apuntada y cargada como se muestra en la figura consiste de dos segmentos unidos por un perno liso en el que el momento flexionante es nulo.



Resolución:



(a) Reacciones



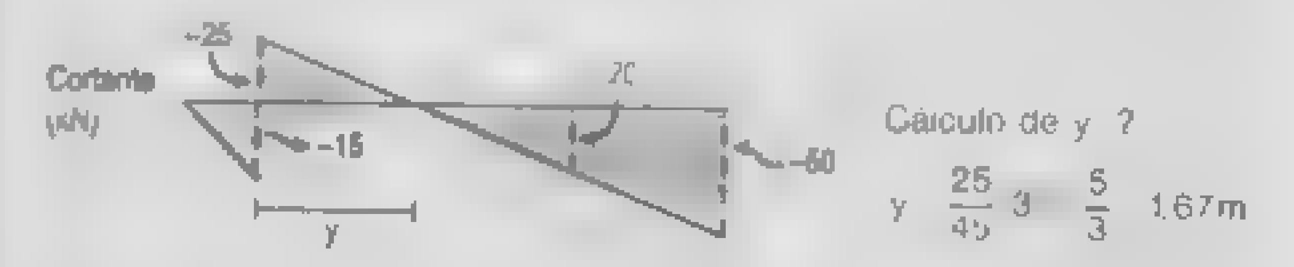
$\circlearrowleft + \Sigma M_c = 0$: $60(2) - R_1(3) = 0 \Rightarrow R_1 = 40$ kN

a) Cortante

$V_A = 0$, $\Delta V_{AB} = (-15)(1) = -15 \Rightarrow V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 0 - 15 = -15$ kN

$V_B^d = V_B^i + R_1 = -15 + 40 = 25$. $\Delta V_{BC} = (-15)(3) = -45 \Rightarrow V_C^i = 25 - 45 = -20$ kN

$V_C^d = V_C = -20$ kN, $\Delta V_{CD} = (-15)(2) = -30 \Rightarrow V_D = V_C^d + \Delta V_{CD} = -20 - 30 = -50$ kN



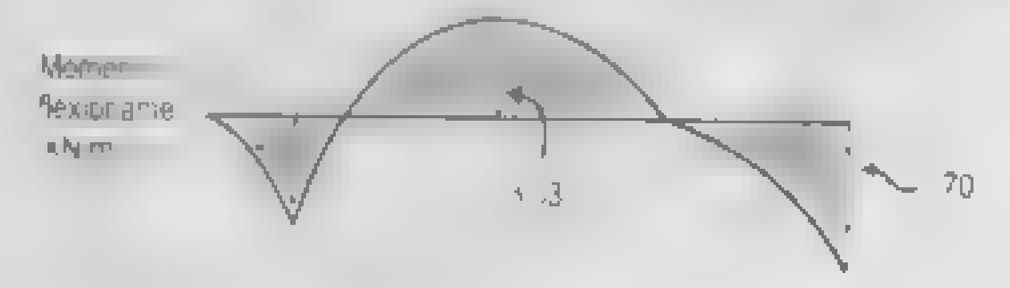
b) Momento flexionante

$M_A = 0$, $\Delta M_{AB} = (-15)(1/2) = -7{,}5 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 - 7{,}5 = -7{,}5$ kN m

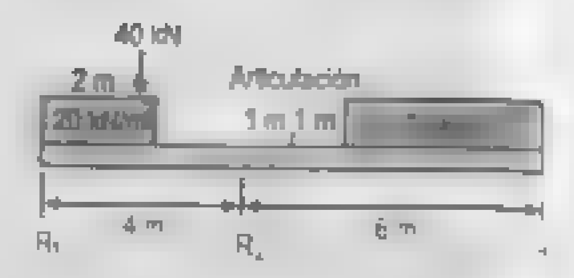
$\Delta M_{By} = (25)(5/3)/2 = 20{,}83 \Rightarrow M_y = M_B + \Delta M_{By} = -7{,}5 + 20{,}83 = 13{,}33$ kN m

$\Delta M_{yC} = (-20)(4/3)/2 = -13{,}33 \Rightarrow M_C = M_y + \Delta M_{yC} = 0$ kN.m

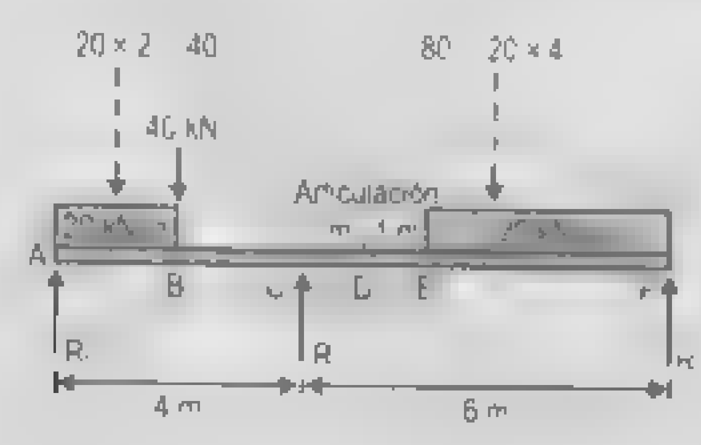
$\Delta M_{CD} = (-20-50)(2/2) = -70 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 0 - 70 = -70$ kN m



439 Una viga apoyada en tres puntos como se muestra en la figura consiste en dos segmentos unidos en un perno liso en el que el momento flexionante es nulo



Resolución



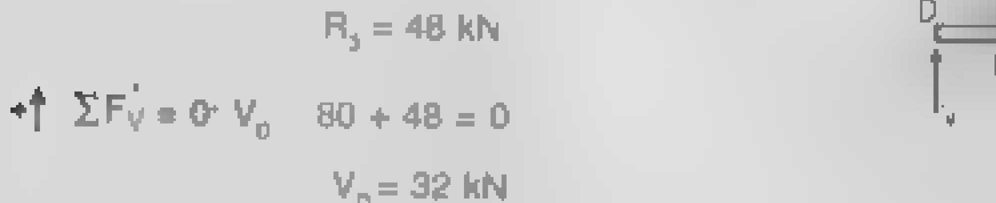
a) Cálculo de las reacciones

$\circlearrowleft \sum M_D^{\prime} = 0$: $R_3(5) - 80(3) = 0$

$R_3 = 48$ kN

$+\uparrow \sum F_V^{\prime} = 0$: $V_D - 80 + 48 = 0$

$V_D = 32$ kN

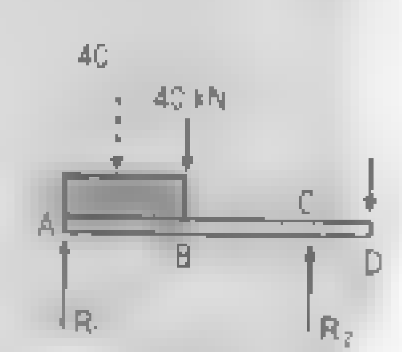


$\circlearrowleft \sum F_C = 0$: $(-32)(1) + 40(2) + 40(3) - R_1(4) = 0$

$R_1 = 42$ kN

$+\uparrow \sum F_V = 0$: $42 - 40 - 40 + R_2 - 32 = 0$

$R_2 = 70$ kN



b) Cortante

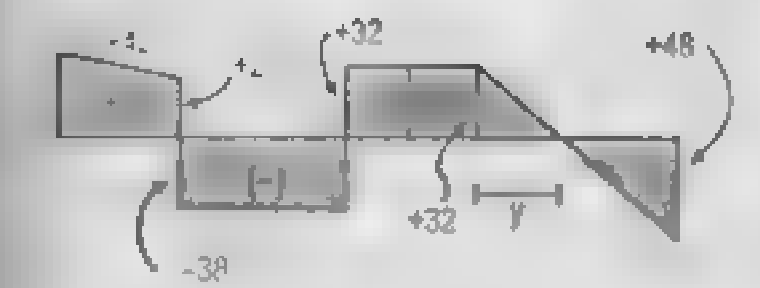
$V_A = R_1 = 42$, $\Delta V_{AB} = (-20)(2) = -40 \Rightarrow V_B^i = \Delta V_{AB} = 42 - 40 = 2$ kN

$V_B^d = V_B^i = -40 = -38$, $\Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow V_C^i = V_B^d + \Delta V_{BC} = -38$ kN

$V_C^d = V_C + R_2 = -38 + 70 = 32$, $\Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_D^i = V_C^d + \Delta V_{CD} = 32$ kN

$V_D^d = V_D^i \pm V_D = 32$ kN , $\Delta V_{DE} = 0 \Rightarrow V_E = V_D^d + \Delta V_{DE} = 32$ kN

$V_E^d = V_E = 32$ kN , $\Delta V_{EF} = (-20)(4) = -80 \Rightarrow V_F = V_E + \Delta V_{EF} = -48$ kN



Cálculo de y

$$y = \frac{32}{(32 + 48)}(4) = 1{,}6 \text{ m}$$

c) Momento flexionante

$M_A = 0$, $\Delta M_{AB} = (42 + 2)(2)/2 = 44 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 + 44 = 44$ kN m

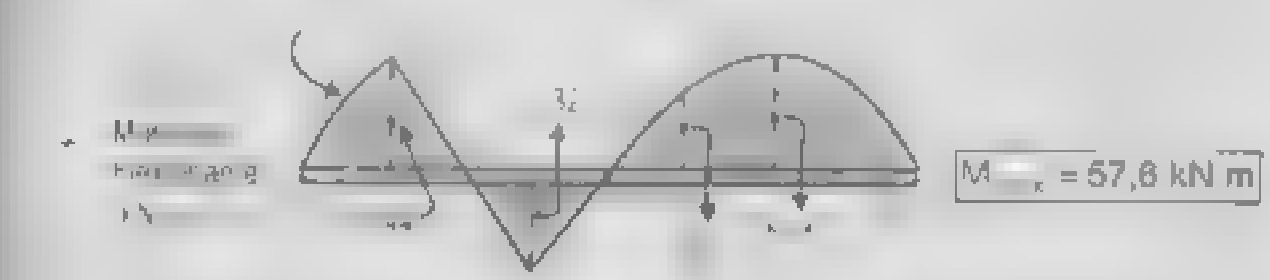
$\Delta M_{BC} = (-38)(2) = -76 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 44 - 76 = -32$ kN.m

$\Delta M_{CD} = (32)(1) = 32 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = -32 + 32 = 0$ kN m

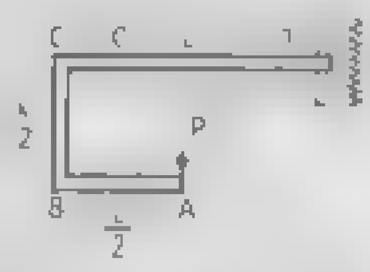
$\Delta M_{DE} = (32)(1) = 32 \Rightarrow M_E = M_D + \Delta M_{DE} = 0 + 32 = 32$ kN m

$\Delta M_{EY} = (32)(1{,}6)/2 = 25{,}6 \Rightarrow M_Y = M_E + \Delta M_{EY} = 32 + 25{,}6 = 57{,}6$ kN.m

$\Delta M_{YF} = (-48)(2{,}4)/2 = -57{,}6 \Rightarrow M_F = M_Y + \Delta M_{YF} = 0$ kN.m



440 Un marco ABCD, con esquinas rígidas en B y C, sostiene la carga concentrada P como se muestra en la figura. (Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para cada una de las tres partes del marco)

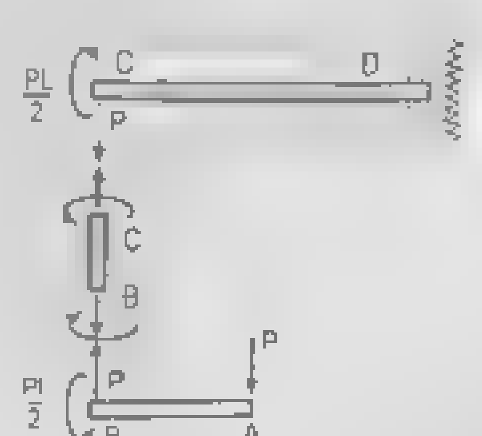


Resolución

a) Cortante

$V_B = P$, $\Delta V_{BA} = 0$, $V_A = V_B + \Delta V_{BA} = P$

$V_C = P$, $\Delta V_{CD} = 0$, $V_D = V_C + \Delta V_{CD} = P$



b) Momento flexionante

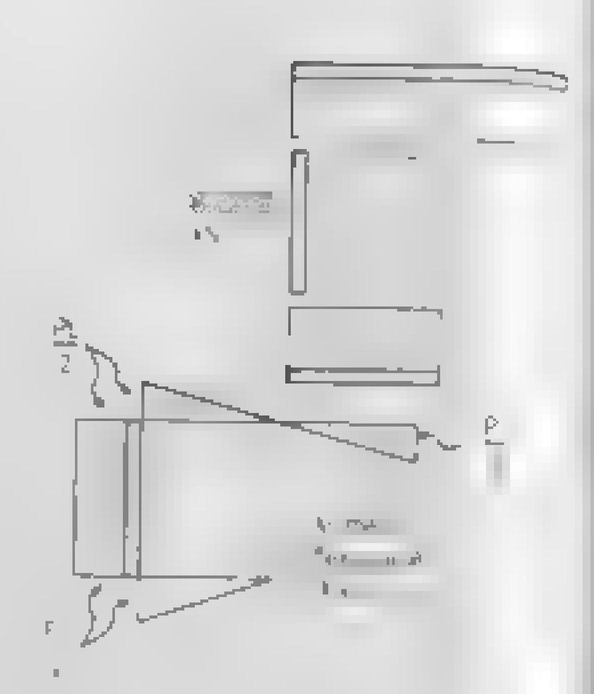
$M_B = \frac{PL}{2}$, $\Delta M_{BA} = (+P)(L/2) = PL/2$

$\Rightarrow M_A = M_B + \Delta M_{BA} \quad \frac{PL}{2} + \frac{PL}{2} \quad 0$

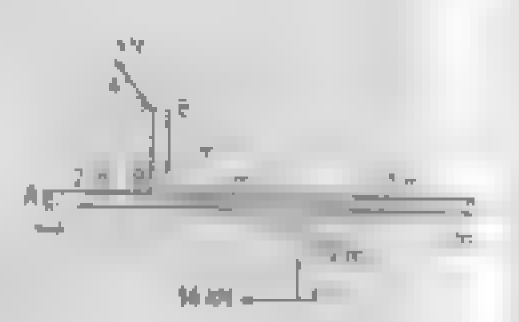
$M_C = \frac{PL}{2}$, $\Delta M_{CD} = (-P)(L) = -PL$

$M \quad \frac{P}{2} \cdot PL \quad \frac{PL}{2}$

$M \quad \frac{PL}{2} \quad \Delta M \quad 0 \quad M \quad \frac{PL}{2}$



441 Una viga ABCD está sostenida por un perno en A y un apoyo libre en D, sujeta a las cargas mostradas en la figura que actuan en los extremos de los miembros verticales BE y CF. Estos miembros están unidos rígidamente a la viga en B y C. (Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga ABCD solamente)

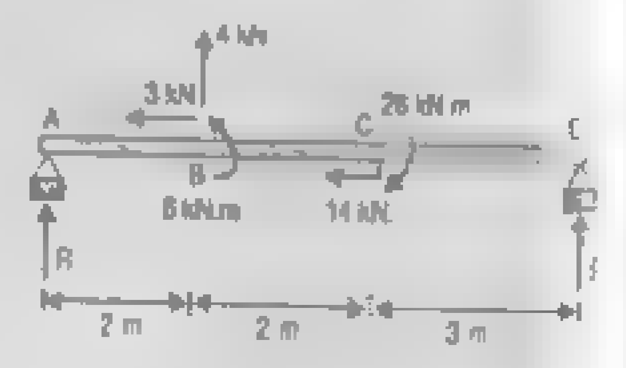


Resolución.

c) Cálculo de las reacciones

$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$: $-R_1(7) - 4(5) + 6 - 28 = 0$
$\Rightarrow R_1 = 6$ kN

$\Sigma F_V = 0$: $-6 + 4 + R_2 = 0$
$\Rightarrow R_2 = 2$ kN



b) Cortante

$V_A = R_1 = 6$ kN, $\Delta V_{AB} = 0 \Rightarrow V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 6 + 0 = 6$ kN

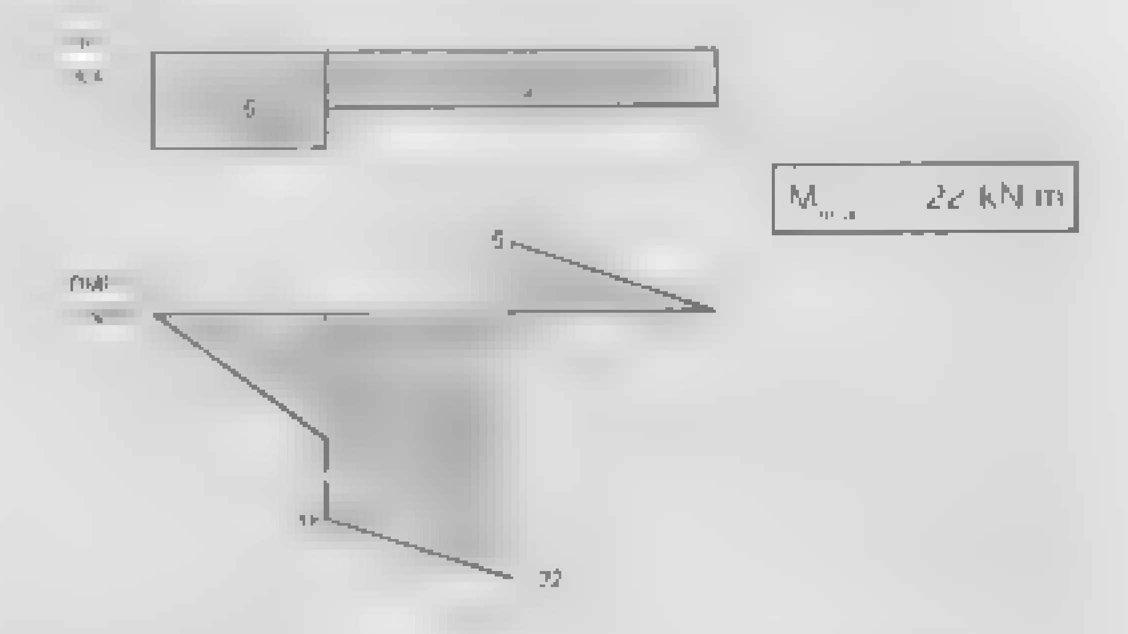
$V_B \quad V \quad 6 + 4 \quad 6 + 4 = -2$, $\Delta V_{BD} = 0 \Rightarrow V_D = V_B^{(+)} + \Delta V_{BD} = -2 + 0$
$= -2$ kN

c) Momentos

$M_A = 0$; $\Delta M_{AB} = 2(-6) = -12$, $M_B^{(-)} = M_A + \Delta M_{AB} = 0 - 12 = -12$ kN m

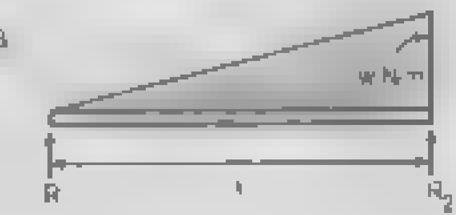
$M_B^{(+)} = M_B^{(-)} - 6 = -18$ kN m, $\Delta M_{BC} = 2(-2) = -4$, $M_C^{(-)} = M_B^{(+)} + \Delta M_{BC} = -22$

$M_C^{(+)} = M_C^{(-)} + 28 = -22 + 28 = 6$, $\Delta M_{CD} = 3(-2) = -6$, $M_D = M_C^{(+)} + \Delta M_{CD} = 0$

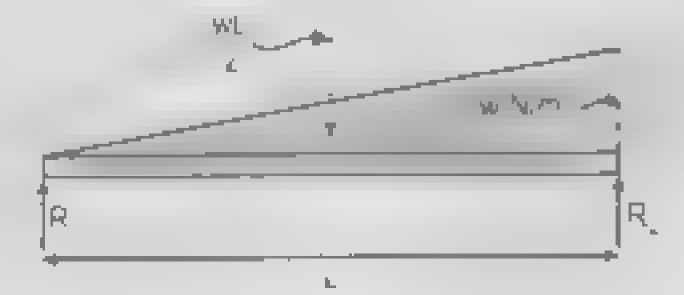


$M_{max} = 22$ kN m

442 ... uniformemente ...



Resolución.



Reacciones

$\circlearrowleft \Sigma M = 0$: $R \cdot L + \frac{wL}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow R = \frac{wL}{6}$

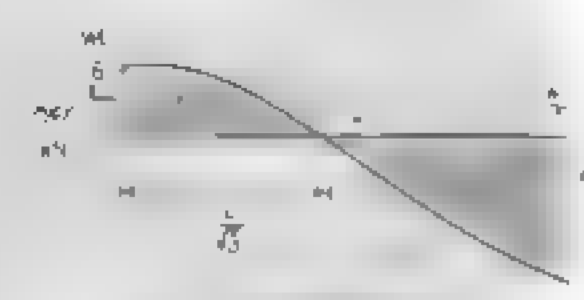
$+\uparrow \Sigma F = 0$: $\frac{wL}{6} - \frac{wL}{2} + R = 0 \Rightarrow R = \frac{wL}{3}$

Cortante

$V \quad \frac{wL}{6} \quad \Delta V \quad \frac{wL}{2} \quad v \quad v + \Delta v \quad \frac{wL}{3}$

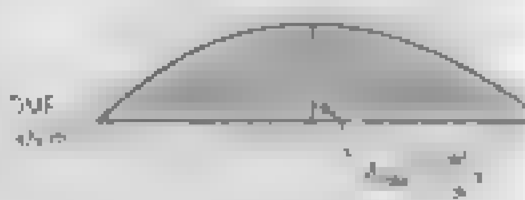
Para el cortante cero

$\Delta V_{...} = \frac{wx}{2L} \; ; \; \frac{wL}{6} \quad \frac{wx}{2L} \quad x \quad \frac{L}{\sqrt{3}}$



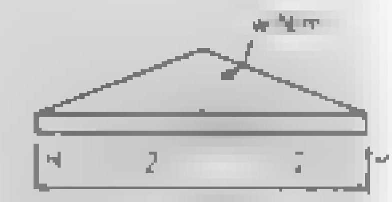
Momento

$M_1 = 0 \quad \Delta M_{1-2} = \frac{2}{3}\left(\frac{wL}{6}\right)\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) \quad \frac{wL}{9\sqrt{3}}$



$$M_{max} = \frac{wL}{9\sqrt{3}}$$

443. Viga sometida a la acción de la carga triangular, como indica la figura.



Resolución:

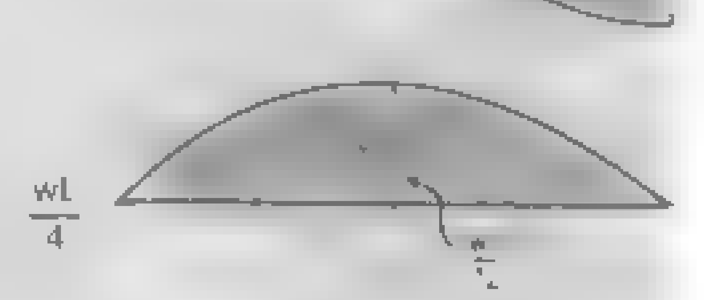
Por equilibrio y simetría.

$R \quad R \quad \frac{wL}{4}$

$V \quad R \quad \frac{wL}{4} \quad \Delta V \quad = \quad \frac{wL}{4}$

$V \quad 0$

$V_{L/2}^{(+)} = V_{L/2}^{(-)} = 0; \; \Delta V_{L/2-2} = \frac{wL}{4} \quad V \quad \frac{wL}{4}$

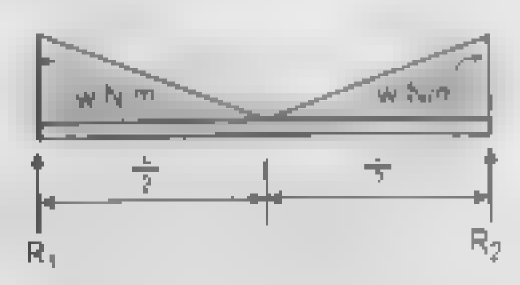


Momento flexionante

$M \quad 0 \quad \Delta M \quad \frac{2}{3}\left(\frac{wL}{4}\right)\left(\frac{L}{2}\right) \quad \frac{wL}{12}$

$M_{max} = \frac{wL}{12}$ Además el DMF debe ser simétrico.

444. Viga cargada como indica la figura

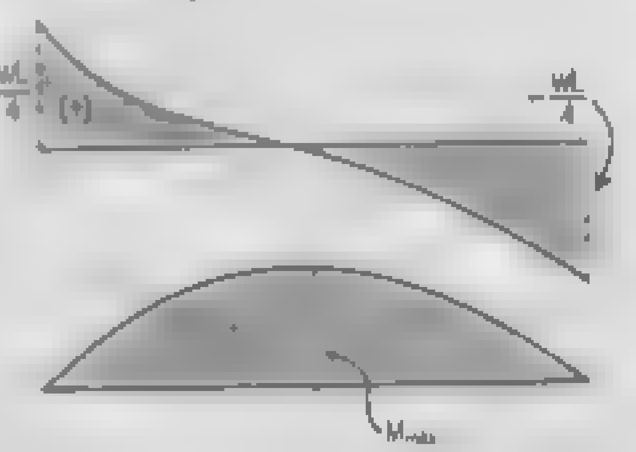


Resolución:

Este problema es similar al anterior y presenta lo siguiente:

Reacciones: ídem P-443

Cortante: ídem P-443

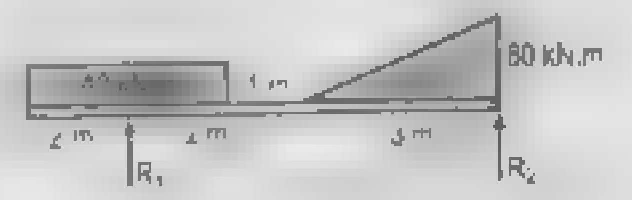


Momento flexionante:

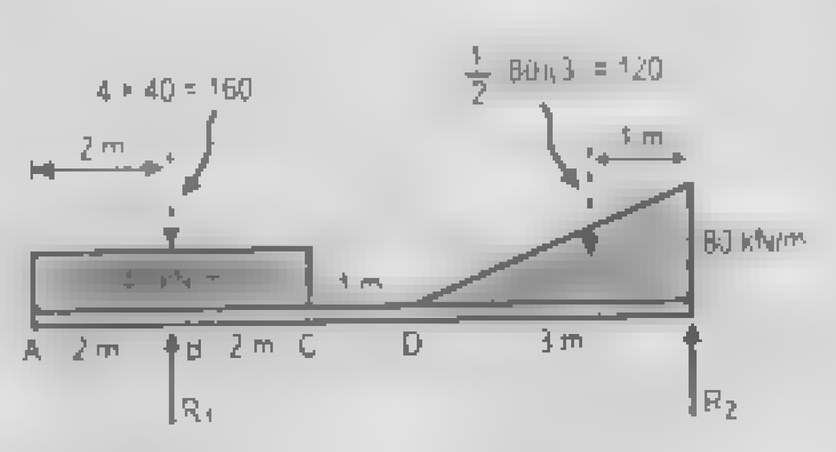
$M_1 = 0 \cdot \Delta M_{1-L/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{wL}{4}\right)\left(\frac{L}{2}\right) \quad \frac{wL}{24}$

$M \quad \frac{wL}{24}$

445. Viga cargada como indica la figura.



Resolución



Cálculo de reacciones

$\Sigma M_E = 0: \; 120(1) + 160(6) - R_1(6) = 0$

$R \quad 180 \text{ kN}$

$+\uparrow \; \Sigma F \quad 0 \cdot R_1 + R_2 - 160 - 120 = 0$

$\Rightarrow R = 100 \text{ kN}$

Fuerza cortante

$V_A = 0$; $\Delta V_{AB} = -40(2) = -80$

$V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 0 - 80 = -80$

$V_B^{*} = V_B + R = 100$

$\Delta V_{BC} = 40(2) = 80$

$V_C = V_B + \Delta V_{BC} = 20$

$\Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_D = V_C = 20$

$\Delta V_{DE} = \frac{1}{2}(-80)(3) = -120$

$\Rightarrow V_E = V_D + \Delta V_{DE} = 20 - 120 = -100$

Cálculo de x

$\Delta V_{Dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{80}{3}x\right)(x) = -20 \rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = 1{,}224\ m$

Momento flexionante

$M_A = 0$; $\Delta M_{AB} = \frac{1}{2}(-80)(2) = -80$; $M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -80$ kN m

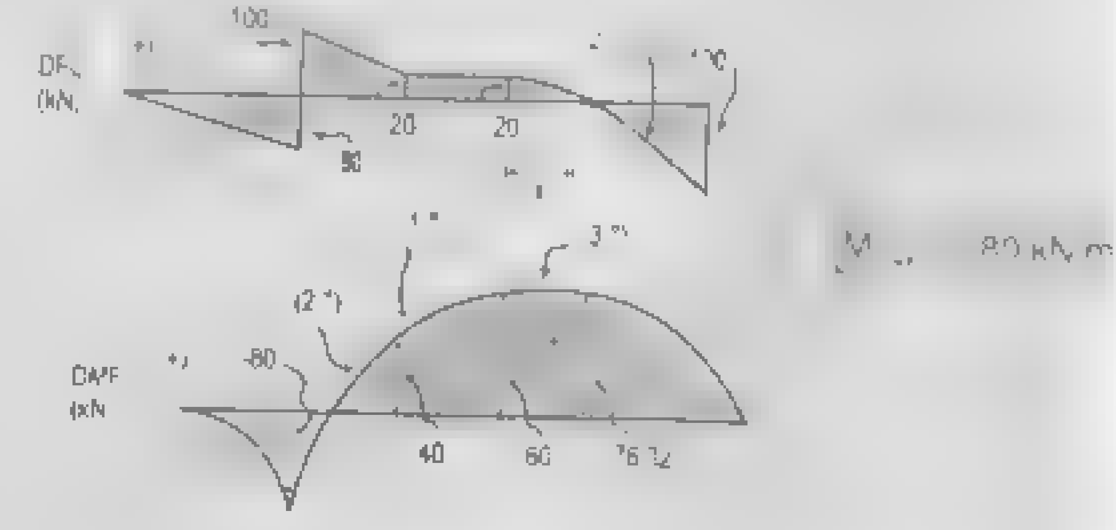
$\Delta M_{BC} = \frac{1}{2}(100 + 20)(2) = 120$; $M_C = M_A + \Delta M_{BC} = 40$ kN.m

$\Delta M_{CD} = (20)(1) = 20$; $M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 60$ kN.m

$\Delta M_{Dx} = \frac{2}{3}(1{,}224)(20) = 16{,}32$; $M_x = M_D + \Delta M_{Dx} = 76{,}32$ kN m

$\Delta M_{xE} = \left[\frac{1}{3}(3)(120) - \frac{1}{3}(1{,}224)(20)\right] ... = -76{,}32$ kN m

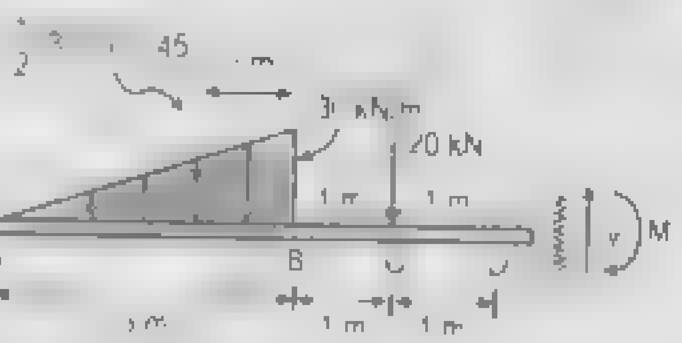
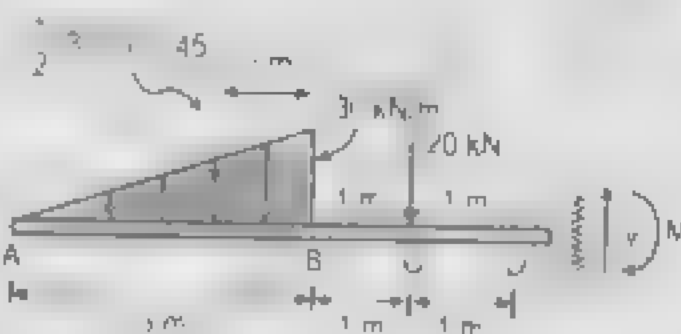
$M_E = M_x + M_{xE} = 76{,}32 - 76{,}32 = 0$



$M_{max} = 80$ kN m

446 Viga en voladizo, cargada como se muestra en la figura

Resolución

Cálculo de las reacciones

$\uparrow \Sigma F = 0$: $V - 45 - 20 = 0$

$V = 65$ kN

$\Sigma M_D = 0$: $20(1) + 45(3) - M = 0$

$M = 155$ kN.m

Cálculo de la fuerza cortante

$V_A = 0$; $\Delta V_{AB} = -\frac{1}{2}(3)(30) = 45$; $V_B = -45$

$V_C = V_B = -45$; $\Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow V_C = -45$

$V_D = V_C - 20 = -45 - 20 = -65$

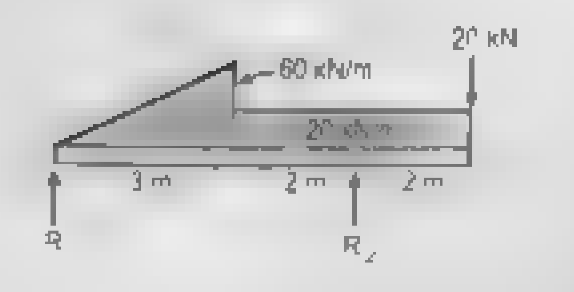
Cálculo del momento flexionante

$M_A = 0$; $\Delta M_{AB} = \frac{1}{3}(3)(-45) = -45 \Rightarrow M_B = -45$

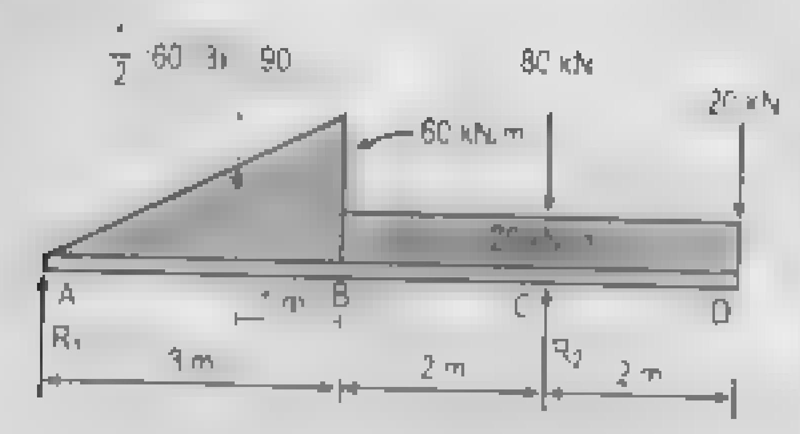
$\Delta M_{BC} = (1)(-45) = -45 \Rightarrow M_C = -90$

$\Delta M_{CD} = (1)(-65) = -65 \Rightarrow M_D = -155$

447 Viga cargada como se muestra en la figura



Resolucion

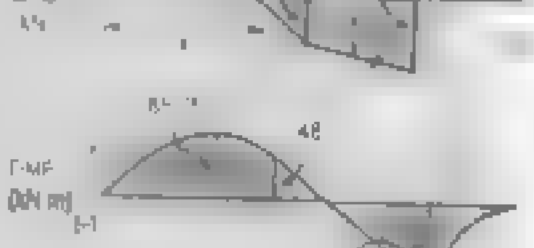


Calculo de las reacciones:

$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0;\ 90(3) - R_1(5) - 20(2) = 0 \Rightarrow R_1 = 46\text{ kN}$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0;\ R_1 + R_2 - 90 - 80 - 20 = 0 \Rightarrow R_2 = 144\text{ kN}$

Fuerza cortante:



$V_A = R_1 = 46;\ \Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(3)(-60) = -90\text{ kN}$

$V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 46 - 90 = -44\text{ kN}$

$\Delta V_{CD}\ \ (2)(-20) = -40 \Rightarrow V_C = -84\text{ kN}$

$V_C^{+}\ \ V_C + R_2 = -84 + 144 = 60\text{ kN}$

$\Delta V\ \ (2)(-20) = -40 \Rightarrow V_D = 20\text{ kN}$

Cálculo de x:

$\frac{1}{2}(20x)(x) = 46 \Rightarrow x = 2,144$

Cálculo de momento flexionante

$M_A = 0;\ \Delta M_{AX} = \frac{2}{3}(2,144)(46) = 65,75 \Rightarrow M_X = M_A + \Delta M_{AX} = 65,75$

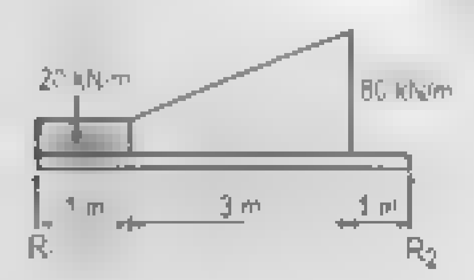
$\Delta M_{XB} = \left[\frac{1}{3}(90)(3) - \frac{1}{3}(46)(2,144) - (46)(3 - 2,144)\right] = -17,75 \Rightarrow M_B = 48$

$\Delta M_{BC} = \frac{1}{2}(-44 - 84)(2) = -128 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = 48 - 128 = -80$

$\Delta M_{CD} = \frac{1}{2}(60 + 20)(2) = 80 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = -80 + 80 = 0$

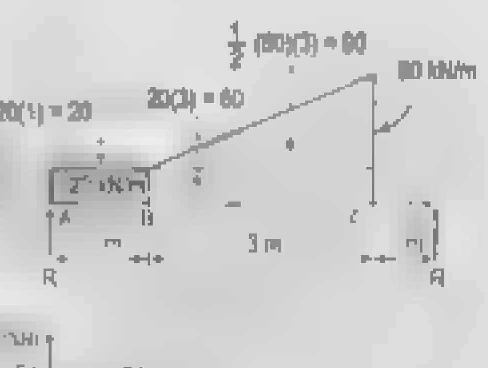
$\boxed{M_{máx} = -80\text{ kN.m}}$

...8 Viga cargada como se indica en la figura.



Resolucion:

Cálculo de reacciones

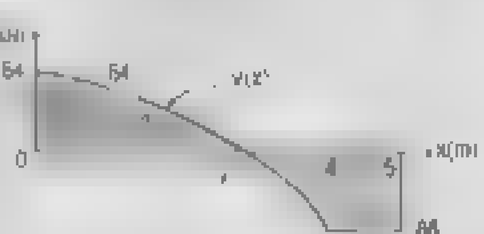


$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0;\ 20(4,5) + 60(2,5) + 90(2) - R_1(5) = 0 \Rightarrow R_1 = 84\text{ kN}$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0\quad R_1 + R_2 - 20 - 60 - 90 = 0$

$R_2 = 86\text{ kN}$

Fuerza cortante



$V_A = R_1 = 84\ ,\ \Delta V_{AB} = (-20)(1) = -20$

$V_B = V_A + DV_{AB} = 84 - 20 = 64\text{ kN}$

$\Delta V_{BC} = \frac{1}{2}(-80 - 20)(3) = -150$

$\Rightarrow V_C = V_B + \Delta V_{BC} = 64 - 150 = -86\text{ kN}$

Calculo de x: (cortante cero)

$20x + 10x^2 = 64 \Rightarrow x^2 + 2x - 6,4 = 0 \Rightarrow x = 1,72$

Momento flexionante

El momento máximo será la suma de las áreas A_1 y A_2

$M_{máx} = A_1 + A_2$

$A_1 = \frac{1}{2}(84 + 64)(1)\text{ kN.m} = 74\text{ kN.m} \qquad (1)$

Para A_2 es generada por una curva de segundo grado:

$V_{(x)} = 84 - 20x - 10(x-1)^2 = 74 - 10x^2$

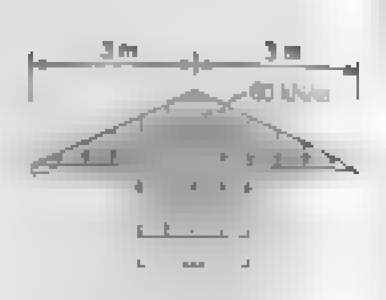
Así $\quad A_2 = \int_1^{2,72}(74 - 10x^2)dx = 74x - \frac{10}{3}x^3\Big|_1^{2,72}$

$\Rightarrow A_2 = 63,54\text{ kN.m} \qquad \ldots(2)$

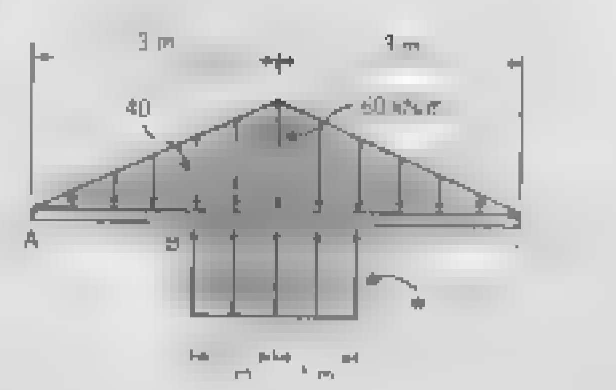
Por lo tanto, $M_{máx} = 74\text{ kN.m} + 63,54\text{ kN.m}$

$\boxed{M_{máx} = 137,5\text{ kN.m}}$

449 Una viga sobre la que actua la carga triangular de la figura está sostenida por una reacción distribuida uniformemente



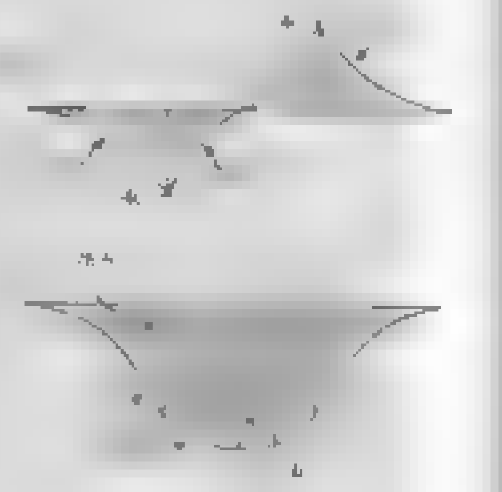
Resolución



Cálculo de w

$$\Sigma F_y = 0: w(2) - \frac{1}{2}(6)(60) = 0$$

$$w = 90 \text{ kN/m}$$



Fuerza cortante

$V_A = 0 \quad \Delta V_{AB} \quad \frac{1}{2}(40)(2) \quad 40 \text{ kN}$

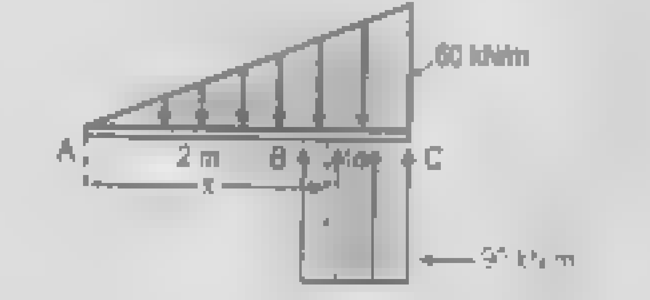
$$\Delta V_{BC} = \frac{1}{2}(-40-60)(1) + 90(1) = 40 \text{ kN}$$

$V_B \quad -40 \quad V \quad V_B + \Delta V_{BC} \quad 0$

Momento flexionante

De la ecuación que genera el momento flector respecto a una variable "x" genérica

Graficando solo hasta el punto medio "C" por ser simétrico



Donde

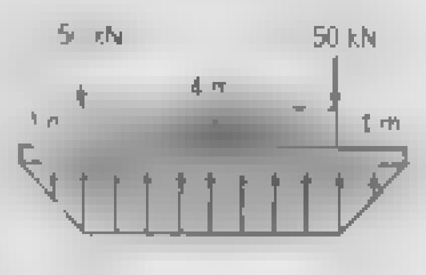
$$M = -\frac{20}{2}x\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{90}{2}(x-2) = -\frac{10}{3}x \quad 45 \quad x \quad 2$$

Obtenemos $M_{máx}$ para x = 3

$M \quad \frac{10}{3}(3) \quad 45 \quad 3 \quad 2 \quad \text{kN·m} \quad 45 \text{ kN·m}$

$\Rightarrow \boxed{M_{máx} = -45 \text{ kN·m}}$

450. Viga cargada y apoyada como se muestra en la figura



Resolución

Cálculo de w

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 5w - 80 - 2(50) = 0$$

$$w = 36 \text{ kN/m}$$

Fuerza cortante $V_A = 0$

$$\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(36)(1) = 18 \text{ kN} \Rightarrow V_B = 18 \text{ kN}$$

$V_B \quad V_B \quad 50 - 18 \quad 50 \quad 32 \text{ kN}$

$$\Delta V_{BC} = (36 - 10)(2) = 32 \text{ kN} \Rightarrow V_C = 0$$

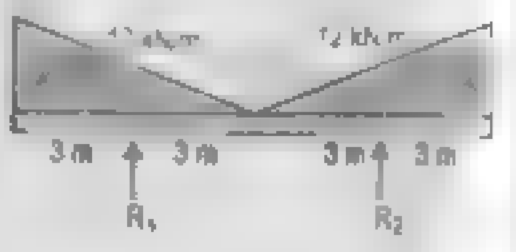
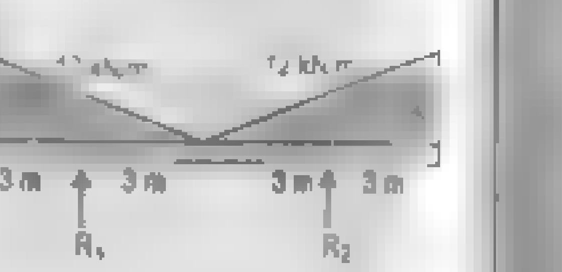
$\Rightarrow$ resto antisimétrico

Momento flexionante $M_A = 0$

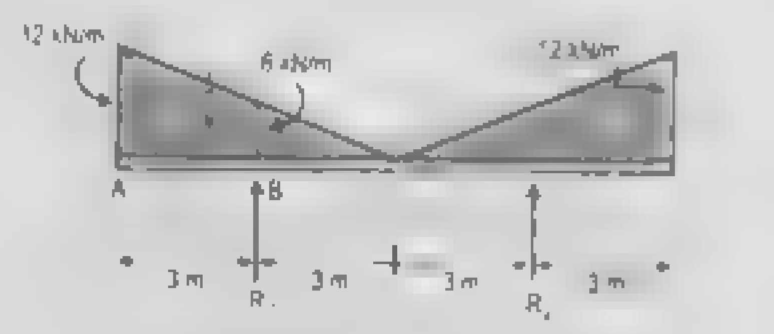
$\Delta M_{AB} = \frac{2}{3}(18)(1)$ 6 kN m ⇒ M_B 6 kN m

$\Delta M_{BC} = \frac{1}{2}(-32)(2) = -32$ kN m ⇒ $M_C = -26$ kN m ⇒ resto simétrico

451 Viga cargada como se muestra en la figura

Resolucion



Cálculo de reacciones

Simétrico ⇒ $R_1 - R_2 = \frac{12}{2}(6) = 36$ kN

Fuerza cortante $V_A = 0$

$\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(-12-6)(3) = -27 \Rightarrow V_B = 0 - 27 = -27$

V_B $V_B + R$ = 27 + 36 9 kN

$\Delta V_{BC} = (-6)(3) = -9 \Rightarrow V_C = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$ resto antisimétrico

Momento flexionante M_A 0

$A_T = \frac{2}{3}(6)(36) = 144$

$A = \frac{2}{3}(3)(9) = 18$ ⇒ $A_1 = 81$

$\Delta M_{AB} = (A - A \quad A) = (144 \quad 18 \quad 81) = -45$

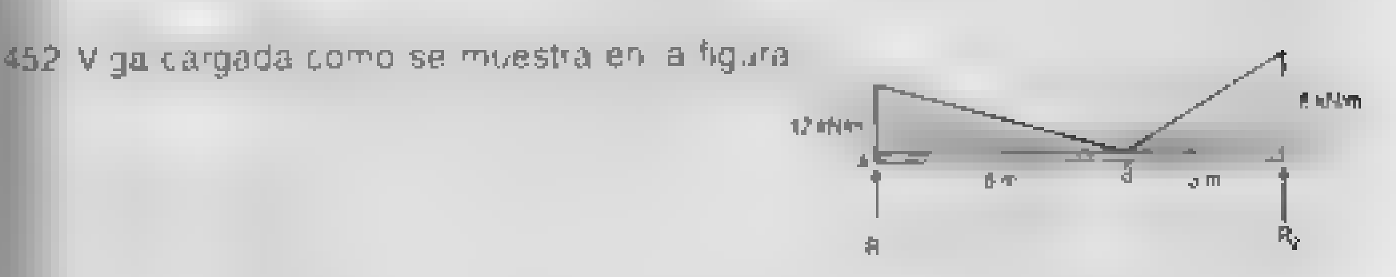
$M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 - 45 = -45$ kN.m

$\Delta M_{BC} = \frac{1}{3}(3)(9) = 9$ kN.m

M_C $M_B + \Delta M_{BC}$ -45 + 9 36 kN m

$M_{máx} = -45$ kN m

452 Viga cargada como se muestra en la figura



Resolución

Cálculo de reacciones

$\Sigma M_C = 0$: $27(1) + 36(7) - R_1(9) = 0 \Rightarrow R_1 = 31$ kN

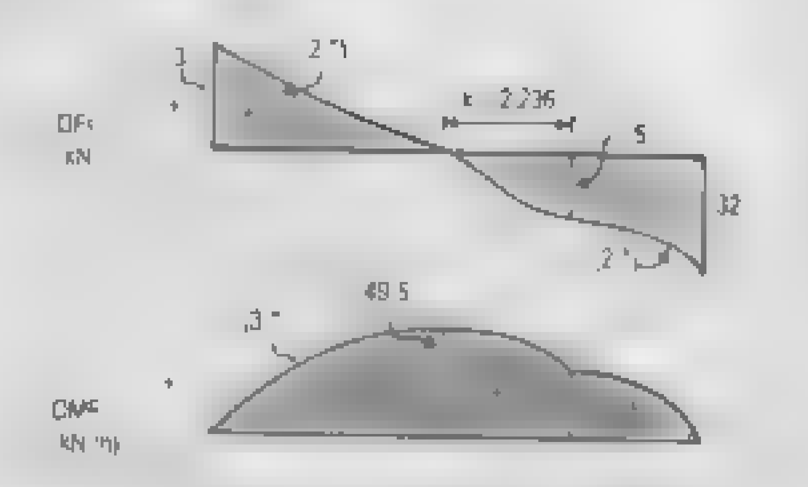
$\Sigma F_y = 0$: $R_1 + R_2 - 36 \quad 27 = 0 \Rightarrow R_2 = 32$ kN

Fuerzas cortantes

$V_A = R = 31$ kN

$\Delta V_{AB} = \frac{1}{2}(6)(12) = 36$ kN

$V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 31 - 36 = -5$ kN



Cálculo de x. (cortante cero)

$\frac{1}{2}(2x)(x) = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} = 2.236$ m

Momento flexionante $M_x = 0$

$A_T = \frac{1}{3}(6)(36) = 72$

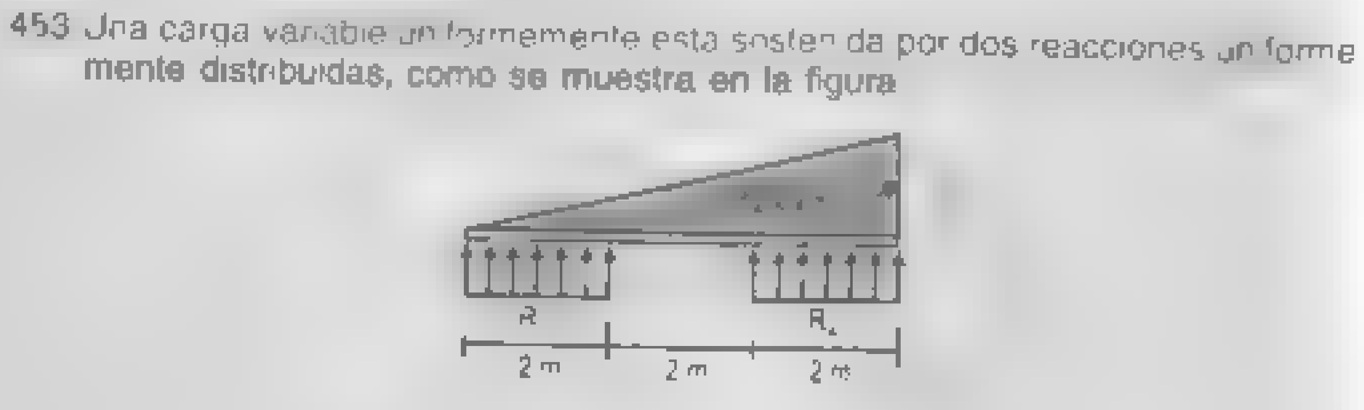
$A_1 = \frac{1}{3}(2.236)(5) = 3.7$

$A_2 = (6 - 2.236)(5) = 18.8$

$\Delta M_{AX} = A_T - A_1 - A_2 = 72 - 3.7 - 18.8$

$\Delta M_{AX} = 49.5$ kN m $\Rightarrow$ $\boxed{M_{máx} = 49.5 \text{ kN m}}$

453. Una carga variable uniformemente está sostenida por dos reacciones uniformemente distribuidas, como se muestra en la figura.



Resolución

Cálculo de las reacciones

$\sum M_x = 0$: $36(1) - 2R_1(4) = 0$

$R_1 = 4.5$ kN m

$\sum F_y = 0$: $2R_1 + 2R_2 - 36 = 0$

$R_2 = 13.5$ kN m

Fuerzas cortantes. $V_A = 0$

$\Delta V_{AB} = +2R_1 + \frac{1}{2}(2)(-4) = 5$ kN

$V_B = V_A + \Delta V_{AB} = 0 + 5 = 5$ kN

$\Delta V_{BC} = \frac{1}{2}(2)(-4 - 8) = -12$ kN

$V_C = V_B + \Delta V_{BC} = 5 - 12 = -7$ kN

$\Delta V_{CD} = 2R_2 + \frac{1}{2}(2)(-8 - 12) = 7$ kN

$V_D = V_C + \Delta V_{CD} = -7 + 7 = 0$

En los problemas siguientes, trazar los diagramas de cargas y de momentos flexionantes correspondientes al diagrama de fuerza cortante que se da y cuyos valores están expresados en kN. Especificar los valores numéricos en todos los puntos de discontinuidad y en los de fuerza cortante nula.

454. Diagrama de fuerza cortante como en la figura.

Resolución

Cargas

$V_A = 15$

$\Delta V_{AB} = 0$

$V_B = 15 \Rightarrow V_B' = -5$

$\Rightarrow R_B = -5 - 15 = -20$

$\Delta V_{BC} = 0$

$V_C = -5$ y $V_C' = -35$

$\Rightarrow R_C = -35 - (-5) = -30$

$\Delta V = 0$

V 35 y V^{1} 15 $\Rightarrow R_D = 15 - (-35) = 50$

$V_E = 15$

Momento flexionante

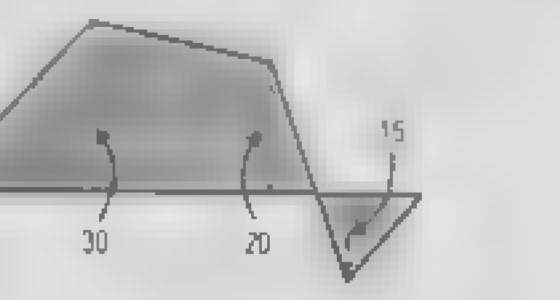
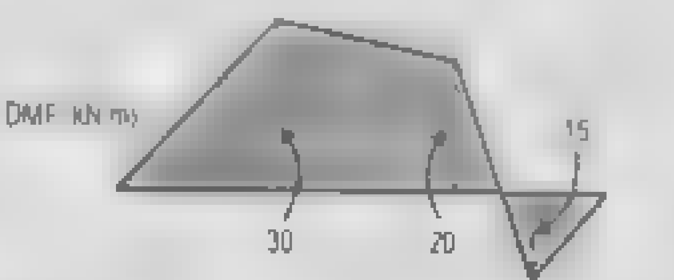
M_A 0

$\Delta M_{AB} = (15)(2) = -30 \Rightarrow M_B = 30$

ΔM_{BC} . 5)(2) $= -10 \Rightarrow M_C = 20$

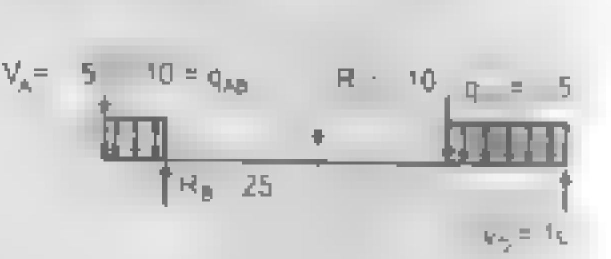
ΔM . 35)(1) $= -35 \Rightarrow M_D = -15$

ΔM (15)(1) 15 $\Rightarrow M_E = 0$

$M_{máx} = 30$ kN.m

455 Diagrama de fuerza cortante mostrado en la figura



Resolución

V_A 5 0 5

ΔV_{AB} [-15 5] 10

q_A 1 $= -10 \Rightarrow q = -10$

R_B 15 25

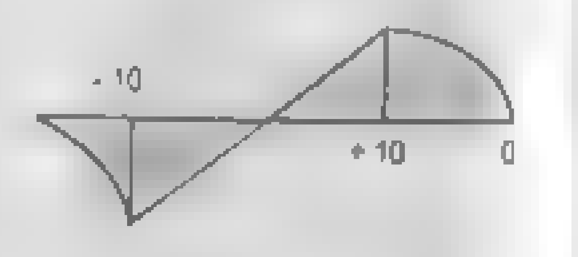
$\Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow q_{BC} = 0$

R 0 (10) 10

$\Delta V_{CD} = [-10 - 0] = 10$

$q_{CD}(2) = -10 \Rightarrow q_{CD} = -5$

V 0 10 10



Calculando el diagrama de momentos flexionante

$M_A = 0$; $\Delta M_{AB} = \frac{1}{2}(1)(-5 - 15) = -10 \Rightarrow M_B = M_A + \Delta M_{AB} = -10$

$\Delta M_{BC} = (2)(10) = 20 \Rightarrow M_C = M_B + \Delta M_{BC} = -10 + 20 = 10$

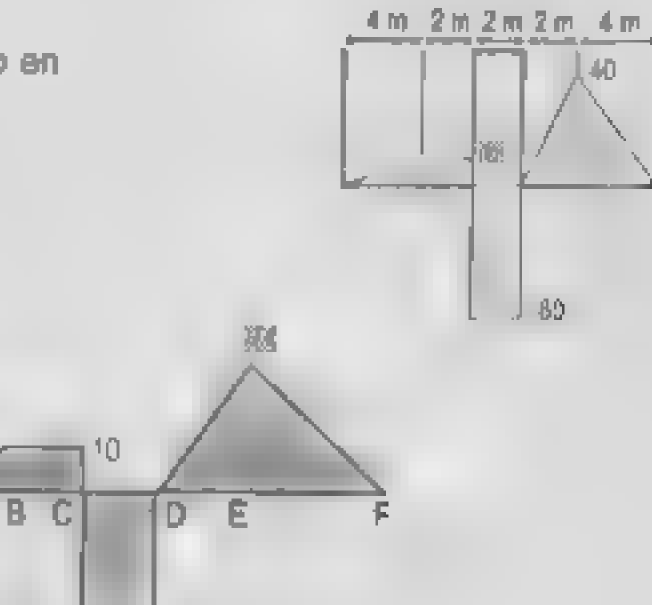
ΔM $\frac{1}{2}$ 2 10 0 10 ; M M ΔM 0

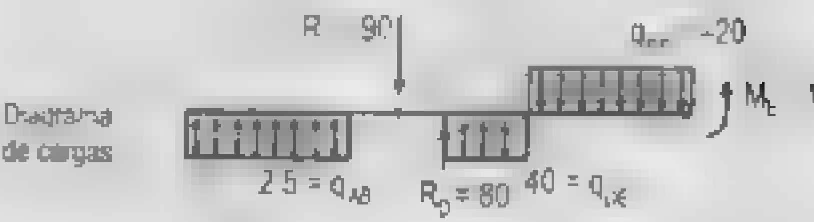
Verificando el equilibrio

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$: $-10\left(\frac{1}{2}\right) + 25(1) - 10(3) - 10(4) + 10(5) = 0$

456 Diagrama de fuerza cortante como en la figura

Resolución





$V_A = 0 \Rightarrow \Delta V_{AB} = (10 - 0) = 10 \Rightarrow q_{AB}(4) = \Delta V_{AB} = 10 \Rightarrow q_{AB} = 2{,}5$

$V_B = 10 \Rightarrow \Delta V_{BC} = 0 \Rightarrow q_{BC}(2) = 0 \Rightarrow q_{BC} = 0$

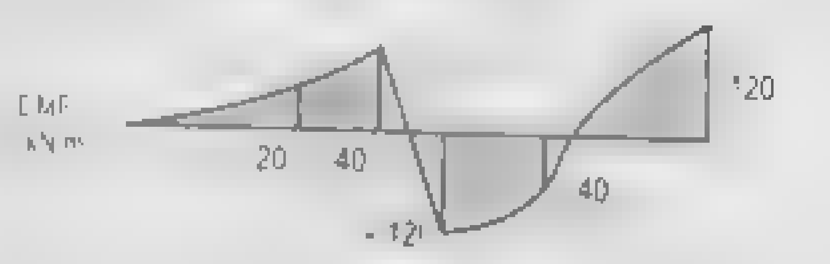
$R_C = -80 - (10) = -90$

$V_C = -80 \Rightarrow \Delta V_{CD} = 0 \Rightarrow q_{CD}(2)20 \Rightarrow q_{CD} = 0$

$V_D = 80 \Rightarrow \Delta V_{DE} = (80 - 0) = 80 \Rightarrow q_{DE}(2) = 80 \Rightarrow q_{DE} = 40$

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 10(2) - 80(6) + 80(6) + 80(9) - 80(12) = -120 \neq 0$

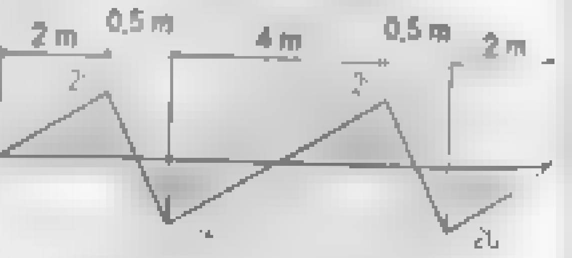
Dibujando ... diagrama de momento flexionante



$M_D = -120 \Rightarrow \Delta M_{DE} = \frac{1}{2}(2)(80) = 80 \Rightarrow M_E = -40$

457 Diagrama de fuerza cortante mostrado en la figura.

Resolución



A B C E F G
20
4 m

... el diagrama de cargas será simétrico

En el diagrama:

... 10 kN/m

... 80 kN/m

Obteniendo el diagrama de momento flexionante (simétrico) del DFC

... 20 kN·m

... 22,5 kN·m

... 20 kN·m

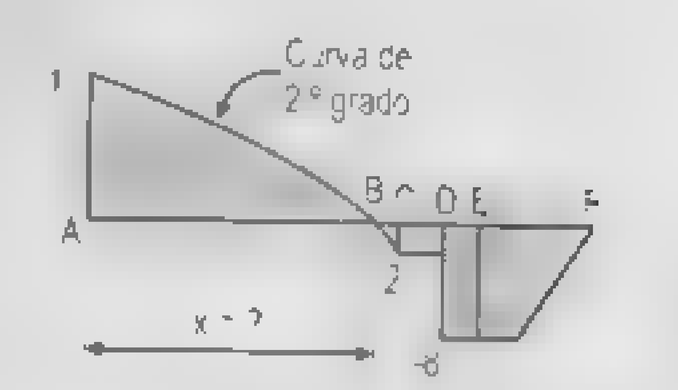
... 0 kN·m

DMF kN·m
22,5
20
22,5
20

458 Diagrama de fuerza cortante como el de la figura

Curva de 2º grado
10
-2
-8
3 m
1 m
1 m
2 m

Resolución



Del diagrama de cargas tenemos

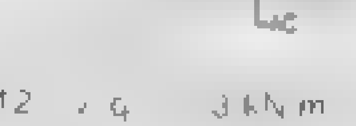
$V_A = 10$ kN

V [illegible] 8 [illegible] 2 [illegible] 6 kN

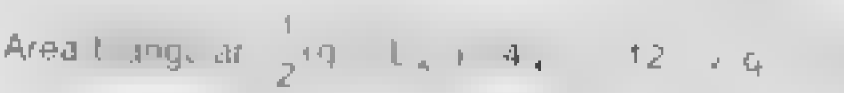
Tramo EF: carga uniforme

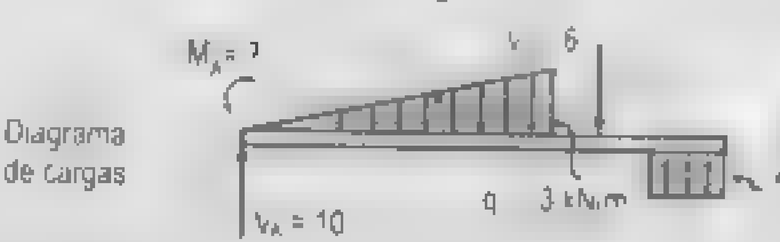
$$q_{EF} = \frac{8}{2} = 4 \text{ kN/m} \quad \text{(pendiente positiva)}$$

Tramo AC: carga triangular



Además: $\Delta V_{AC} = -2-(10) = -12$





Dibujando el diagrama de momento flexionante

Calculando x

$$q_x = \frac{3}{8}x \Rightarrow \text{área} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}x\right)(x) = 10 \Rightarrow x = 7{,}3 \text{ m}$$

$$\Delta M_{AB} = \text{área}(DFC_{AB}) = \frac{2}{3}(7{,}3)(10) = 48{,}67 \Rightarrow M_B = 18{,}67$$

$$\Delta M_{BC} = \left[\frac{1}{3}(8)(12) - \frac{1}{3}(7{,}3)(10) \quad (0{,}7)(10)\right] = -0{,}67 \Rightarrow M_C = 18$$

$$\Delta M_{CD} = 1(-2) = -2 \Rightarrow M_D = M_C + \Delta M_{CD} = 16$$

$$\Delta M_{DE} = 1(-8) = -8 \Rightarrow M_E = M_D + \Delta M_{DE} = 8$$

$$\Delta M \quad \frac{1}{2}\,2 \;\; 8 \quad 8 \Rightarrow M_F \quad M_E + \Delta M_{EF} \quad 0$$

$$\Sigma M_A \quad 0 \quad M_A \quad 12 \; \frac{16}{3} \quad 6{\cdot}9 + 8(11) \quad 0 \Rightarrow M_A \quad 30$$

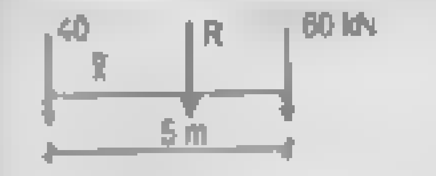
459 Problema ilustrativo

460 Un camión con cargas de 40 kN y 60 kN por eje, con una distancia entre ellos de 5 m, rueda sobre una viga de 10 m. Calcular el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante.

Resolución

(i) Para el momento flexionante

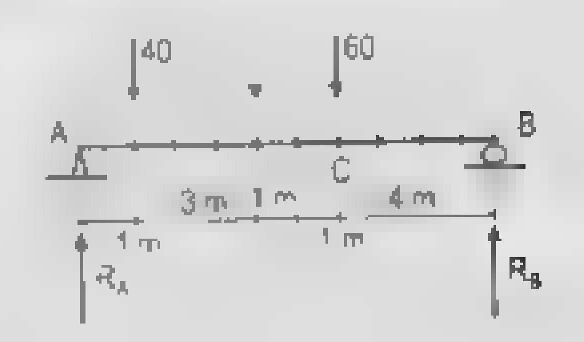
Calculamos el centro de carga



$R = 40 + 60 = 100$

$$\bar{x} = \frac{60 \times 5}{100} = 3 \text{ m}$$

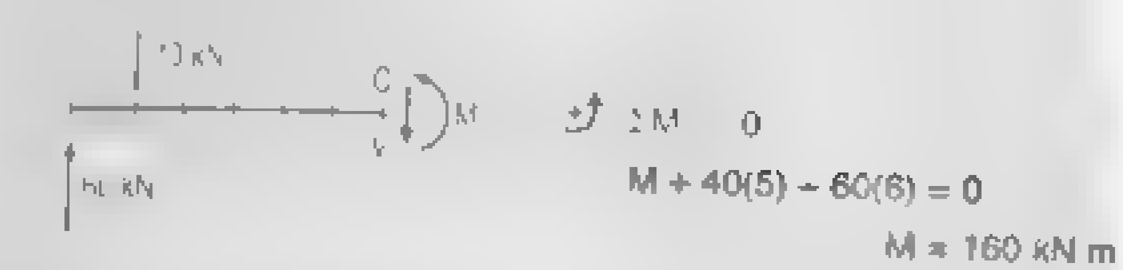
Posición para calcular el momento máximo



Calculamos la reacción (R_A)

$$\Sigma M_B = 0: \; 60(4) + 40(9) - R_A(10) = 0$$
$$\Rightarrow R_A = 60 \text{ kN}$$

Luego tomamos momento en el punto "C"



$\circlearrowleft^{+} \; \Sigma M = 0$

$M + 40(5) - 60(6) = 0$

$M = 160$ kN m

(I) Para la fuerza cortante
Posición para el cortante máximo

Equilibrio

$\circlearrowleft^{+} \; \Sigma M_A = 0 \quad R_B(10) - 60(10) - 40(5) = 0$

$R_B = 60$ kN

$\therefore \; |M_{máx.}| = 160$ kN m $\; \wedge \;$ $|V_{máx.}| = 80$ kN

461 Repetir el problema anterior si las cargas por eje son de 30 kN y 50 kN, su distancia de 4 m y la longitud de la viga de 8 m

Resolución

(I) Calculamos el centro de cargas

$R = 30 + 50 = 80$

$\bar{x} = \dfrac{50 \cdot 4}{80} = 2{,}5$ m

Posición para calcular el momento máximo

Calculamos la reacción en A (R_A)

$\circlearrowleft^{+} \; \Sigma M_B = 0: \; 50(3{,}25) + 30(7{,}25) - R_A(8) = 0$

$\Rightarrow R_A = 47{,}5$

Calculamos el momento en el corte

$\circlearrowleft^{+} \; \Sigma M = 0$

$M + 30(4) - 47{,}5\,(4{,}75) = 0$

$\Rightarrow M = 105$ kN.m

(I) Para la fuerza cortante tenemos

$\circlearrowleft^{+} \; \Sigma M_A = 0: \; R'_B(8) - 50(8) - 30(4) = 0$

$\Rightarrow R'_B = 65$ kN

$M_{máx.} = 105$ kN m

$V_{máx.} = 65$ kN

462 Un tractor con cargas sobre sus ejes, de 4 y 8 kN, tiene una distancia entre ejes de 3 m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante al cruzar un vano de 6 m

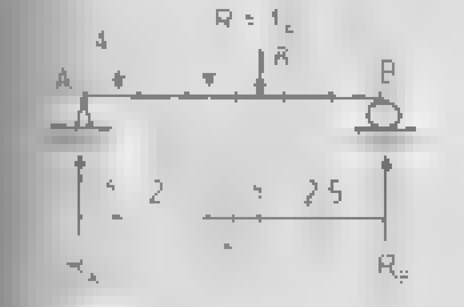
Resolución

Calculamos la resultante y su posición

$R = 4 + 8 = 12$

$\bar{x} = \dfrac{8 \times 3}{12} = 2$ m

Siguiendo los pasos y esquemas de los problemas anteriores tenemos que



Calculamos R_A

$\circlearrowleft^{+} \; \Sigma M_B = 0$

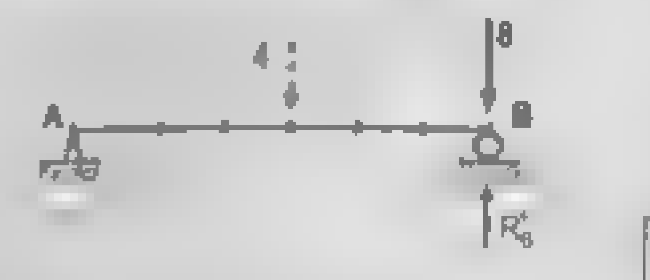
$8(2{,}5) + 4(5{,}5) - R_A(6) = 0$

$\Rightarrow R_A = 7$ kN

Luego

$M_{máx.} = 7(3{,}5) - 4(3) \Rightarrow \boxed{M_{máx.} = 12{,}5 \text{ kN m}}$

Posición para el cortante máximo



Calculando R'_B:

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$: $R'_B(6) - 8(6) - 4(3) = 0$

$\Rightarrow R'_B = 10$ kN

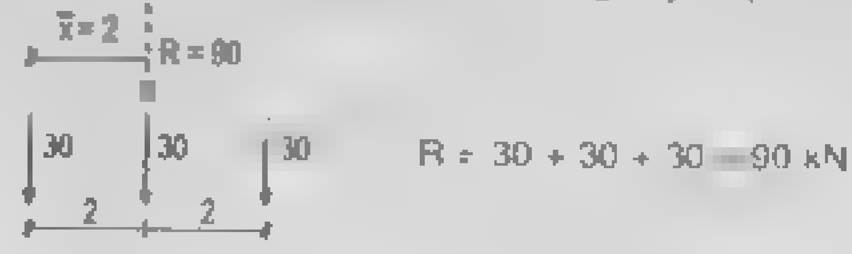
$V_{max} = R'_B = 10$ kN

463 Tres ruedas cargadas con 30 kN cada una y distantes 2 m se desplazan sobre un vano de 12 m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante.

Resolución:

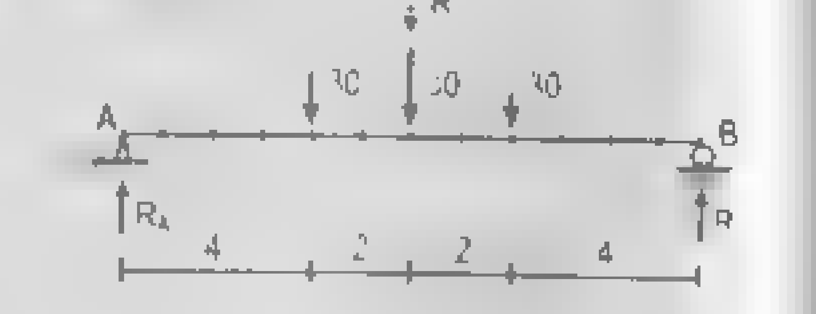
(I) Momento flexionante

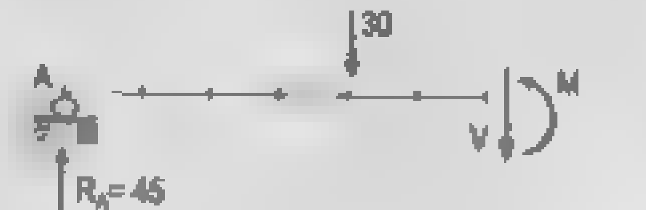
Calculando la resultante de las cargas y su posición



R = 30 + 30 + 30 = 90 kN

Posición para el momento máximo





Calculando R_A (simétrico)

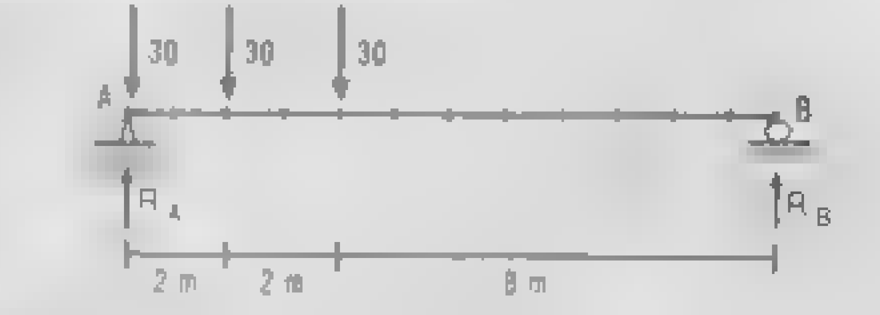
$2R_A = 90 \Rightarrow R_A = 45$ kN

Calculando M (M_{max}):

$\circlearrowleft \Sigma M_V = 0$: $M + 30(2) - 45(6) = 0 \Rightarrow M = 210$ kN m

(II) Cortante

Posición para el cortante máximo



Calculando R'_A:

$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $30(12) + 30(10) + 30(8) - R'_A(12) = 0$

$R'_A = 75$ kN

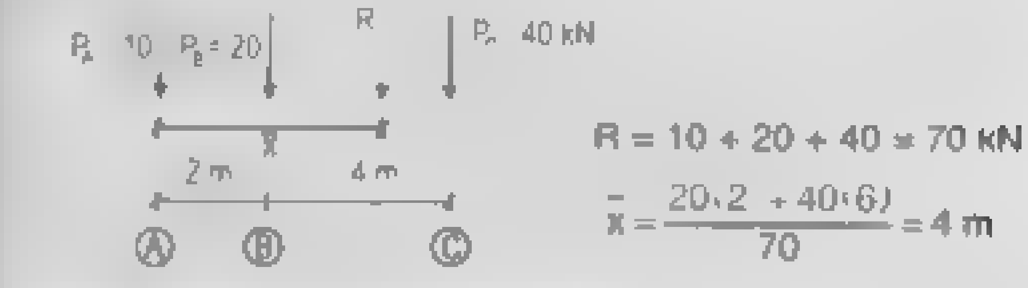
$M_{max} = 210$ kN m ; $V_{max} = 75$ kN

464 Tres cargas que se fijan sobre sendas ruedas se desplazan solidariamente sobre un claro de 16 m. Las cargas son A = 10 kN, B = 20 kN 2 m a la derecha de A y C = 40 kN 4 m a la derecha de B. Determine el máximo momento flexionante y el máximo esfuerzo cortante sobre la viga simplemente apoyada.

Resolución

(I) Momento flexionante

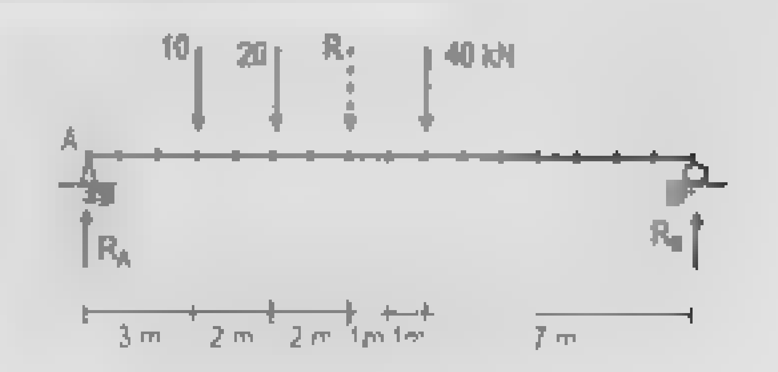
Calculando la resultante y su posición



R = 10 + 20 + 40 = 70 kN

$$\bar{x} = \frac{20(2) + 40(6)}{70} = 4 \text{ m}$$

Posición para el máximo momento



Calculando R_A

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0$: $40(7) + 20(11) + 10(13) - R_A(16) = 0$

$\Rightarrow R_A = 39.375$ kN

$R_B = 30.625$ kN

$M_{máx} = 7R_B = 7(30.625) = 214.4$ kN m

(II) Fuerza cortante

Posición para cortante máximo

Cálculo de R_B

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_A = 0$: $R_B(16) - 40(16) - 20(12) - 10(10) = 0$

$R'_B = 61.25$ kN

$\boxed{M_{máx} = 214.4 \text{ kN m}}$ $\boxed{V_{máx} = R_B = 61.25 \text{ kN}}$

465 Un camión con remolque que rueda sobre una viga de 12 m tiene cargas por eje de 10, 20 y 30 kN separadas [illegible]. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante sobre el claro.

Resolución:

(I) Momento flexionante

Calculando la resultante y su posición

$R = 30 + 20 + 10 = 60$ kN

$\bar{x} = \dfrac{20(5) + 10(8)}{60} = 3$ m

$\bar{x} = 3$ m

Posición para el momento máximo:

Calculando R_A

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0$: $30(10) + 20(5) + 10(2) - R_A(12) = 0$

$\Rightarrow R_A = 35$ kN

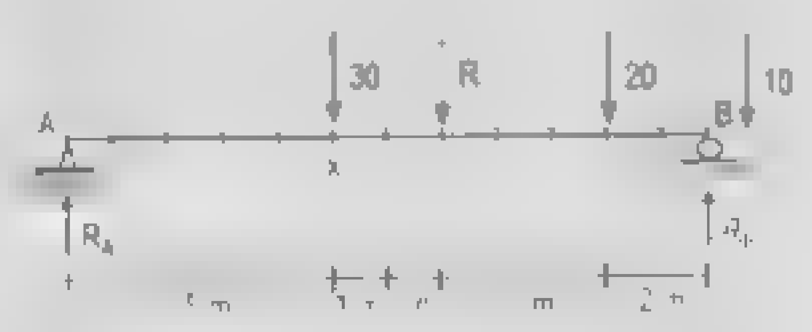
$M_x = 35(7) - 30(5) = 95$ kN.m

Resolviendo solo para dos cargas

$R = 30 + 20 = 50$

$\bar{x} = \dfrac{20 \times 5}{50} = 2$ m

Posición para estas dos cargas y la otra fuera del tramo



Calculando R_A

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0$: $20(2) + 30(7) - R_A(12) = 0$

$\Rightarrow R_A = 20.83$

$M_x = 20.83(5) = 104$ kN m

Cortante

Posición para el cortante máximo.

Calculando R'_A

$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_B = 0$: $30(12) + 20(7) + 10(4) - R'_A(12) = 0$

$\Rightarrow R'_A = 45$ kN

$\boxed{M_{máx} = 104 \text{ kN m}}$ $\wedge$ $\boxed{V_{máx} = 45 \text{ kN}}$

CAPÍTULO 5

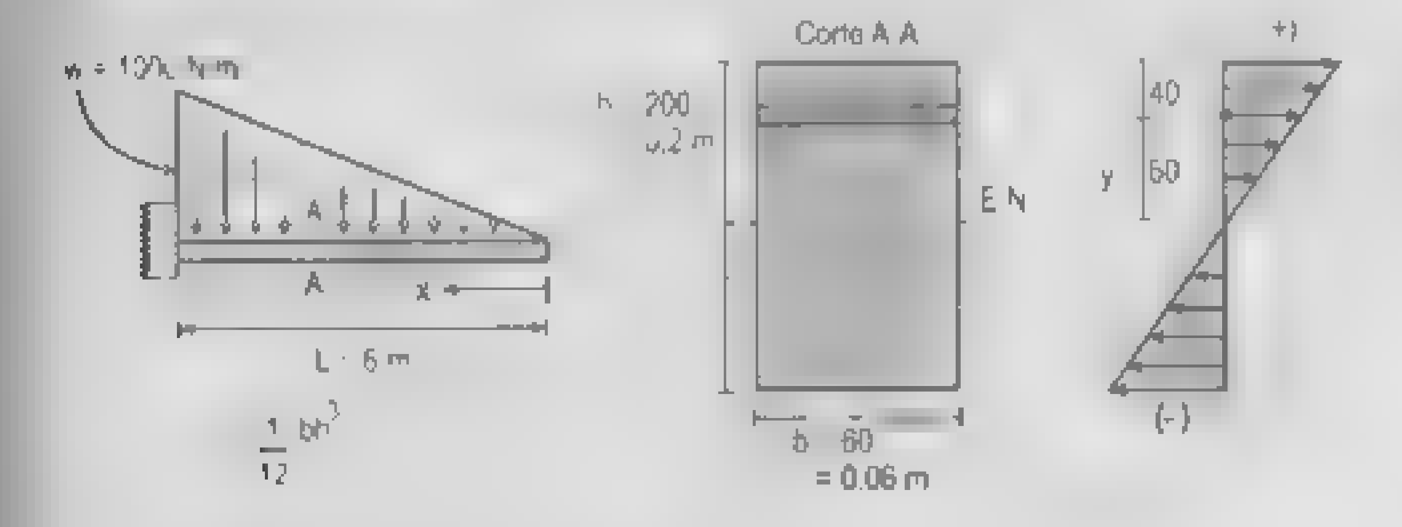
ESFUERZOS EN VIGAS

501 502 Problemas ilustrativos.

503 Una viga en voladizo, de 60 mm de ancho por 200 mm de canto y 6 m de longitud, soporta una carga que varía uniformemente desde cero en el extremo libre hasta 1000 N/m en el empotramiento. Determinar el valor y el signo del esfuerzo en una fibra situada a 40 mm del extremo superior de la viga en una sección a 3 m del extremo libre.

Resolución

Del enunciado tenemos



$\frac{1}{12} bh^3$

Calculamos el momento a una distancia de 3 m

$$M_{x=3} = \frac{w_x \, x^2}{2\times 3} = \frac{500 \, (3)^2}{6} = 750 \text{ N m}$$

Podemos apreciar que las fibras superiores al E.N. de la sección están en tracción.

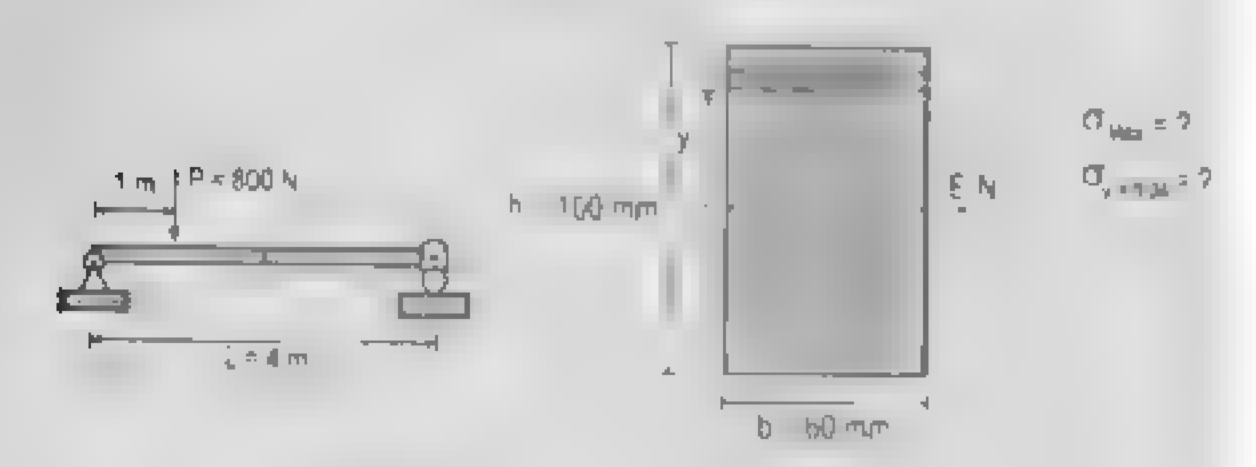
Sabemos que

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{750(0{,}06)}{\frac{1}{12}(0{,}06)(0{,}2)^3} = 1{,}13 \text{ MPa} \;\therefore\; \boxed{\sigma = 1{,}13}$$

504 Una viga simple o simplemente apoyada, de sección rectangular de 60 mm de ancho por 100 mm de altura, y 4 m de longitud, está sometida a una carga concentrada de 800 N en un punto situado a 1 m de uno de los apoyos. Determine el esfuerzo máximo así como el esfuerzo en una fibra situada a 10 mm de la parte superior de la sección, para una sección situada a la mitad del claro.

Resolución.

Del enunciado tenemos el siguiente esquema.



Dibujamos el diagrama de momento flector

DMF (N.m)

$M_n = \frac{2}{3} M_{máx} = 400$ N m

$M_{máx} = \frac{Pab}{L} = \frac{800 \times 3}{4} = 600$ N m

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(400)}{(0,06)(0,1)^2} = 4 \text{ MPa} \quad \therefore \boxed{\sigma_{máx} = 4 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_{y=0.04} = \frac{My}{I} = \frac{400(0.04)}{\frac{1}{12}(0.06)(0.1)^3} = 3.2 \text{ MPa} \quad \boxed{\sigma_{y=0.04} = 3,2 \text{ MPa}}$$

505 Una sierra de cinta de acero de alta resistencia que tiene 20 mm de ancho y 0.8 mm de espesor pasa por unas poleas de 600 mm de diámetro. ¿Qué esfuerzo máximo se desarrolla por la flexión al rodear las poleas? ¿Que diámetro mínimo pueden tener las mismas sin que sobrepase el esfuerzo de 400 MPa?
E = 200 GPa.

Resolución

Sabemos que

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \sigma = E\varepsilon = E\left(\frac{y}{\rho}\right)$$

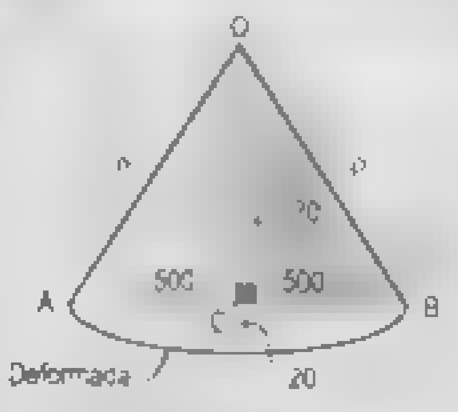
$$\sigma = 200 \times 10^9 \frac{0.4 \times 10^{-3} m}{300 \times 10^{-3} m} = 267 \text{ MPa} \quad \boxed{\sigma = 267 \text{ MPa}}$$

$$\sigma = 200 \times 10^9 \left| \frac{0.4 \times 10^{-3} m}{\frac{D}{2} 10^{-3} m} \right| \leq 400 \times 10^6 \quad \therefore \boxed{D \geq 400 \text{ mm}}$$

506 Una barra de acero, de 25 mm de ancho, 6 mm de espesor y 1 m de longitud se flexiona por la acción de pares aplicados en sus extremos, de manera que en el centro adquiere una deflexión de 20 mm. Determinar el esfuerzo máximo en la barra y la magnitud de los pares aplicados; E = 200 GN/m²

Resolución

Asumimos una deformada de forma circular



En el triángulo OCB, tenemos por Pitágoras.
$\rho^2 = (\rho - 20)^2 + 500^2$
Resolviendo
$\rho = 6260$ mm

Para el esfuerzo máximo

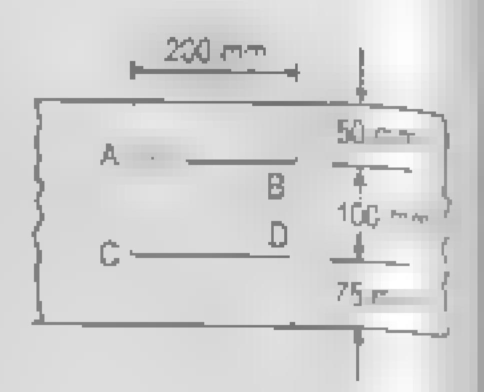
$$\sigma_{máx} = E\frac{y}{\rho} = 200 \times 10^9 \frac{(3 \text{ mm})}{(6260 \text{ mm})} = 95,8 \text{ MPa} \quad \therefore \boxed{\sigma_{máx} = 95,8 \text{ MPa}}$$

El momento es

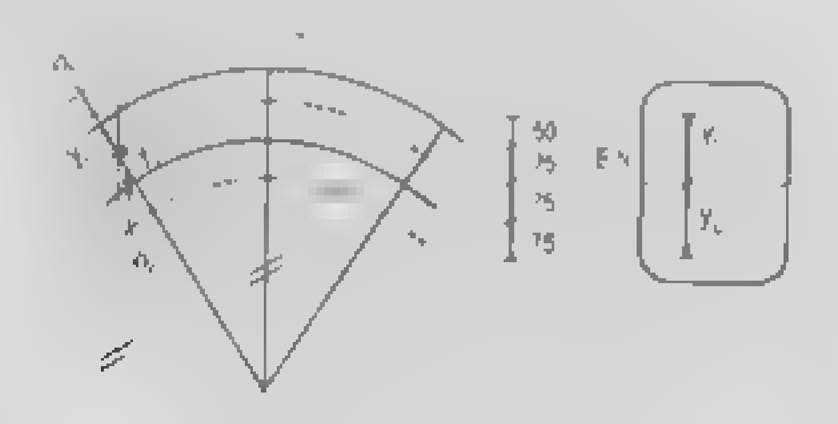
$$M = \sigma_{máx} \frac{bh^2}{6} = 95,8 \times 10^6 \frac{(0.025)(0.006)^2}{6}$$

$\therefore \boxed{M = 14,4 \text{ N m}}$

507 En un ensayo de laboratorio, sobre una viga cargada con pares en sus extremos, se encontró que las fibras tales como las AB de la figura, tuvieron un alargamiento de 0.03 mm mientras que las CD se habían acortado 0.09 mm en la longitud de 200 mm entre puntos. Calcular los esfuerzos que han debido de aparecer en las fibras superior e inferior de la viga, E = 100 GPa



Resolución.
Tenemos el siguiente esquema de deformación.



Del gráfico (sección)

$y_t + y_c = 100$ (I)

De los triángulos $\frac{\delta}{y_t} = \frac{\delta}{y} \Rightarrow \frac{0.03}{y} = \frac{0.09}{y}$

$y = 3y$ (II)

De (I) y (II), obtenemos.

$y = 25$ mm, $y_c = 75$ mm

Para calcular el radio de curvatura.

$\frac{\delta}{y_t} = \frac{L}{\rho} \Rightarrow \frac{0.03}{25} = \frac{200}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = 6 \times 10^{-6} \frac{1}{mm} = 6 \times 10^{-3} \frac{1}{m}$

Luego

$M = E\frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{M}{I} = \frac{E}{\rho}$

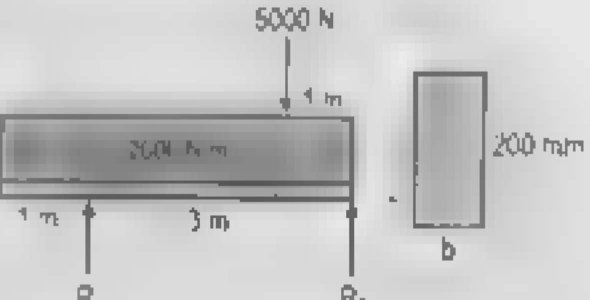
$\frac{M}{I} = 100 \times 10^{9}\ 6 \times 10^{-3} = 600 \times 10^{6}$

$\sigma_{max} = \frac{M}{I}c = 600 \times 10^{6}(0.15) = 90$ MPa

$\sigma_{max} = \frac{M}{I}t = 600 \times 10^{6}\ (0.075) = 45$ MPa

$\therefore \boxed{\sigma^{c}_{máx} = 90 \text{ MPa}}, \boxed{\sigma^{t}_{máx} = 45 \text{ MPa}}$

508 Determinar el espesor mínimo b de la viga de la figura, de manera que el máximo esfuerzo normal no exceda de 10 MPa



Resolución
Calculamos las Rx

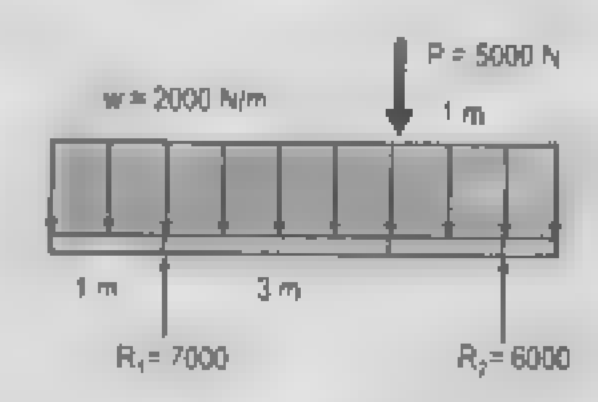
$\circlearrowleft \sum M = 0$

$5000(1) + 2000(4)(2) - R(3) = 0$

$\Rightarrow R = 7000$ N

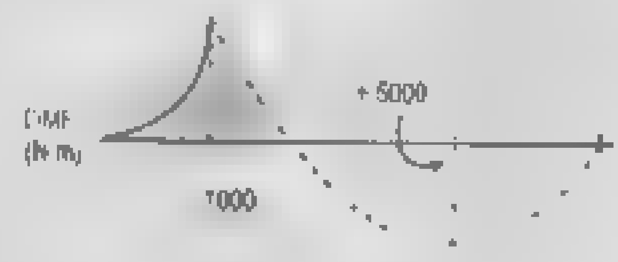
$\Rightarrow R = 6000$ N

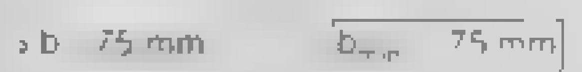
$\Rightarrow M_{máx} = 5000$ N m



Sabemos que

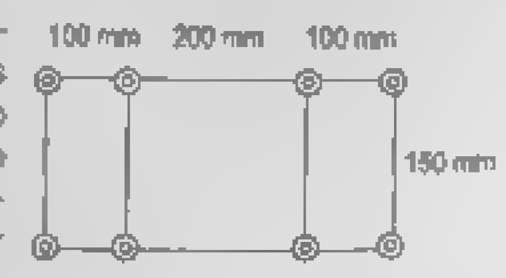
$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(5000)}{b(0.2)^2} = 10 \times 10^{6}$





$\Rightarrow b = 75$ mm $\boxed{b_{mín} = 75 \text{ mm}}$

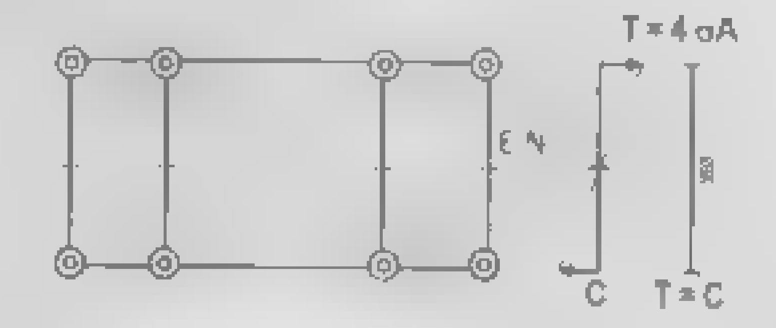
509 Una viga de tipo caja muy usada en construcciones aeronáuticas consta de una serie de tubos unidos mediante unas almas muy delgadas como se indica, en sección, en la figura. Cada tubo tiene una sección recta de 130 mm². Si el esfuerzo medio en estos tubos no puede exceder de 70 MPa, determinar la carga total uniformemente distribuida que puede soportar esta viga sobre un claro de 4 m. Despreciar el efecto resistente de las almas de unión.



Resolución:
Para un tramo simple, tenemos que

$$M^{+}_{máx}=\frac{wL^2}{8}=\frac{w(4)^2}{8}=2w \quad [N.m]$$

Además la sección transversal es

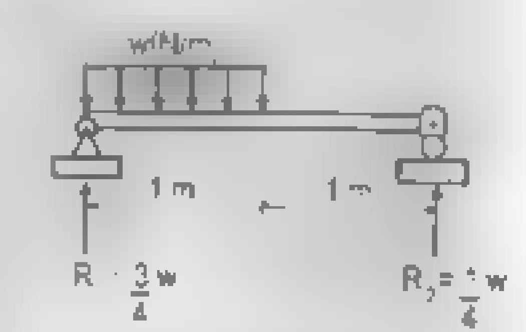


M = Td/2
M = 4σA (d/2) = 4(70 × 10⁶)(130 × 10⁻⁶)(0,15)/2
M = 5460/2
$M_{máx}$ = 2w ≤ 2730 ⇒ w ≤ 1365 N/m ∴ $w_{máx}$ = 1365 N/m

510 Una barra de 40 mm de diámetro se emplea como viga simplemente apoyada sobre un claro de 2 m. Determine la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a lo largo de la mitad derecha de la viga si el esfuerzo debido a la flexión está limitado a un valor de 60 MN/m²

Resolución
Calculamos el momento máximo

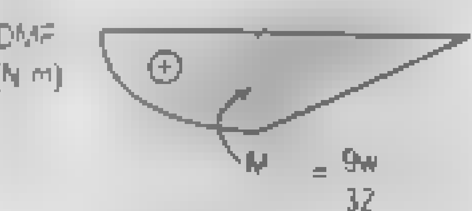
$$M_{máx}=\frac{9}{32}w$$



$$S_L=\frac{\pi d^3}{32}=\frac{I}{C}$$

Sabemos que

$$\sigma_{máx}=\frac{MC}{I}=\frac{M}{I/C}=\frac{M}{S}$$



$$\sigma=\frac{\frac{9}{32}w}{\frac{\pi}{32}(0.04)^3}=60\times10^6 \Rightarrow w=1340 \text{ N/m}$$

$w_{máx}$ = 1340 N/m

barra rectangular simplemente apoyada, de 50 mm de ancho por 100 mm espesor, soporta una carga de 1200 N/m uniformemente distribuida sobre su longitud. ¿Cuál es la longitud máxima de la barra si el esfuerzo está restringido a 20 MPa?

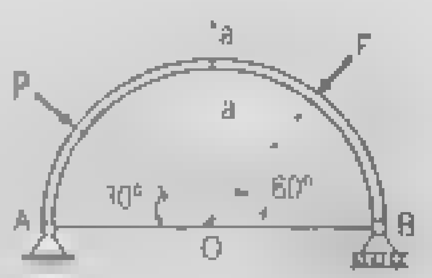
Resolución:
una barra simplemente apoyada:

b = 50 mm = 0.05 m
h = 100 mm = 0.10 m

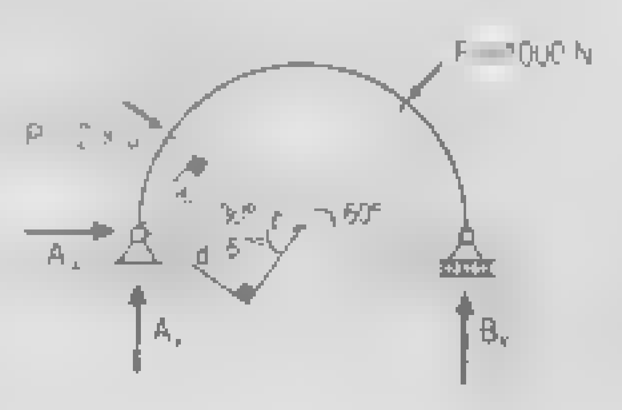
$$\frac{6(150\,L^2)}{}\le 20\times10^6$$

⇒ L ≤ 3.33 m ∴ $L_{máx}$ = 3,33 m

barra de sección circular de 20 mm de diámetro una línea axial semicircular de 600 mm de radio, como indica la figura. Si P = 2000 N y F = 1000 N calcular el esfuerzo máximo de flexión la sección a-a. Se desprecia la deformación general de la barra



Resolución
Calculamos el momento en la sección a-a



$$d=R\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

Equ...

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$ $B_y(2R) - F(d_2) - P(d_1) = 0$

$$B_y(2R) - 1000\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right) - 2000\left(\frac{R}{2}\right) = 0 \Rightarrow B_y = 933\ N$$

De la parte de la estructura

$\circlearrowleft \Sigma M_{a\text{-}a}$ 0

$933(R) - 1000\left(\frac{R}{2}\right) - M = 0$

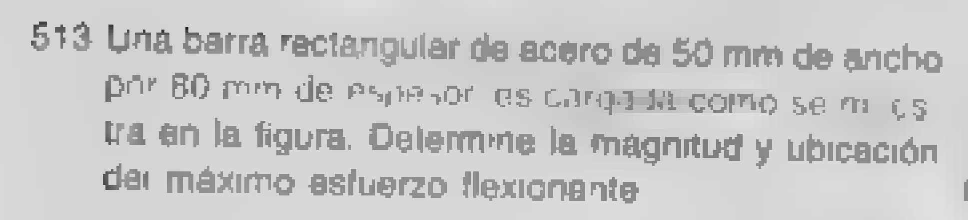
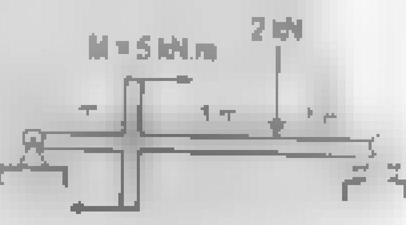
$M = 433\ R$

M 259.8 N.m

Además

$$\sigma_{máx} = \left(\frac{M}{S}\right) = \frac{M}{\frac{\pi}{32}d^3} = \frac{259.8}{\frac{\pi}{32}(0.02)^3} \quad \therefore \boxed{\sigma_{máx} = 331\ MPa}$$

513 Una barra rectangular de acero de 50 mm de ancho por 80 mm de espesor es cargada como se muestra en la figura. Determine la magnitud y ubicación del máximo esfuerzo flexionante

Resolución.

Dibujamos el diagrama de momento flexionante

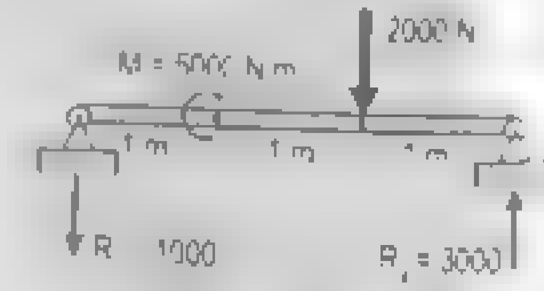
$M_{máx} = 4000\ N.m$

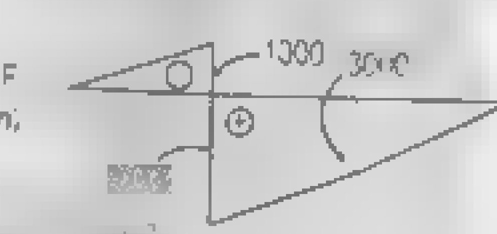
$b = 50\ mm = 0.05\ m$

h 80 mm 0.08 m

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(4000)}{0.05(0.08)^2}$$

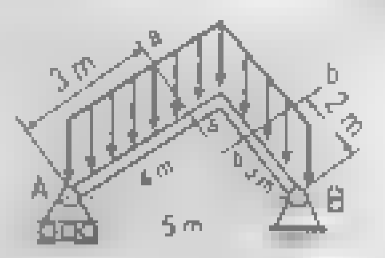
$\therefore \boxed{\sigma = 75\ MPa}$





Ubicación: a la derecha del punto de aplicación de M

514 El marco de la figura, de ángulo recto en C, soporta una carga uniformemente repartida equivalente a 200 N de proyección horizontal, es decir, una carga total de 1000 N. Determinar el máximo esfuerzo normal de flexión en la sección a-a si esta es un cuadrado de 50 mm de lado



Resolución:

Calculamos el momento en a-a

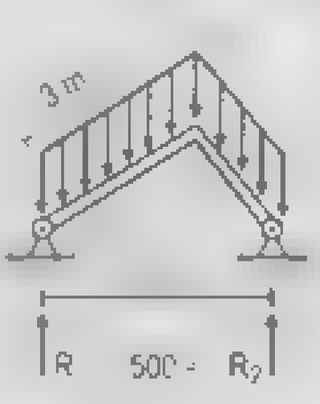
Cálculo de R_1 y R_2

$R_1 = R_2 = 500\ N$

$\circlearrowleft \Sigma M_{a\text{-}a} = 0$

$$200\frac{(2,4)^2}{2} - 500(2,4) + 1M = 0$$

$M = 624\ N.m$



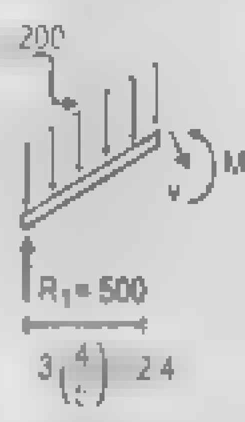
Ademas

$b = 50\ mm = 0.05\ m$

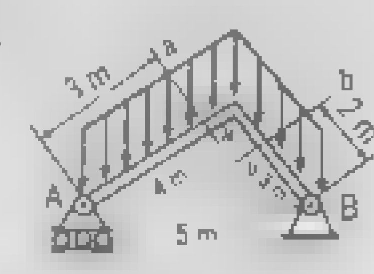
Luego

$$\sigma_{máx} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(624)}{(0.05)(0.05)^2}$$

$\therefore \boxed{\sigma_{máx} = 30\ MPa}$



515 Repita el problema, hallando el máximo esfuerzo debido a la flexión en la sección b-b



Resolución:

Calculamos el momento en b-b

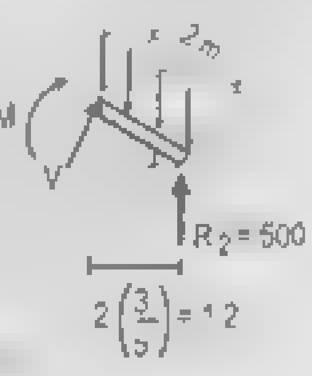
$\circlearrowleft \Sigma M_{b\text{-}b} = 0$

$$500(1,2) - 200\frac{(1,2)^2}{2} - M = 0$$

$\Rightarrow M = 456\ N.m$

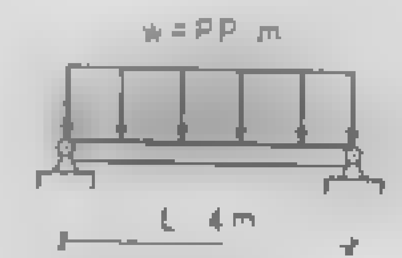
Luego

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(456)}{0.05(0.05)^2} \quad \boxed{\sigma_{máx} = 21.9\ MPa}$$



516 [illegible] barra rectangular de acero de 20 mm de ancho por 40 mm de altura y [illegible] de longitud, está simplemente apoyada en sus extremos. Sabiendo que la densidad del acero es 7850 kg/m³, determine el máximo esfuerzo por flexión debido al peso propio de la barra

Resolución:



$b = 20$ mm $= 0.02$ m
$h = 40$ mm $= 0.04$ m
$L = 4$ m
$\gamma = 7850$ kg/m³

Calculamos el peso por unidad de longitud debido al peso propio

$w = \gamma bh = (7850)(0.02)(0.04) = 6.28$ kgf/m

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{6.28 \cdot 4^2}{8} = 12.56 \text{ kgf/m}$$

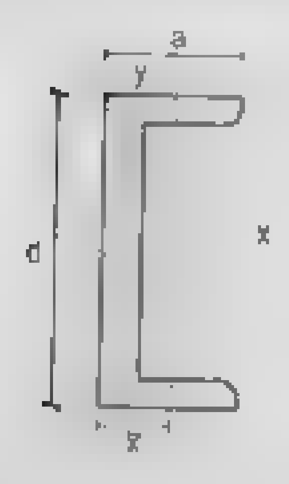
$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 12.56}{[illegible]} = 235{,}5 \text{ kgf/cm}^2 \quad \therefore \quad \boxed{\sigma_{máx} = 235{,}5 \text{ kgf/cm}^2}$$

[illegible] MPa

517 Una viga de 4 m de longitud, simplemente apoyada, [illegible] por dos perfiles C230 × 30 [illegible] que pueda soportar, además de su propio peso, sin que se sobrepase el esfuerzo admisible de 140 MN/m², si (a) las almas son verticales, y (b) las almas están horizontales.

Resolución.

Datos de los perfiles



C230 × 30
$A = 3800$ mm²
$w = 29.8$ kg/m $= 292$ N/m
$I_x = 25.5 \times 10^6$ mm⁴
$I_y = 1.01 \times 10^6$ mm⁴
$a = 67$ mm $\quad d = 229$ mm
$\bar{x} = 14.8$ mm

a)

$$S_x = \frac{2I_x}{(d/2)} = 445 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Calculando el momento

$$M = \frac{(2 \times 292 + w)(4^2)}{8} = 1168 + 2w$$

$$\sigma = \frac{M}{S_x} = \frac{1168 + 2w}{445 \times 10^3 \times 10^{-9}} \le 140 \times 10^6 \Rightarrow \boxed{w \le 30{,}5 \text{ kN/m}}$$

b) Calculando S_y

$I + A\bar{x}^2$

$1.01 \times 10^6 + 3800\,(14.8)^2$

1.84×10^6 mm⁴

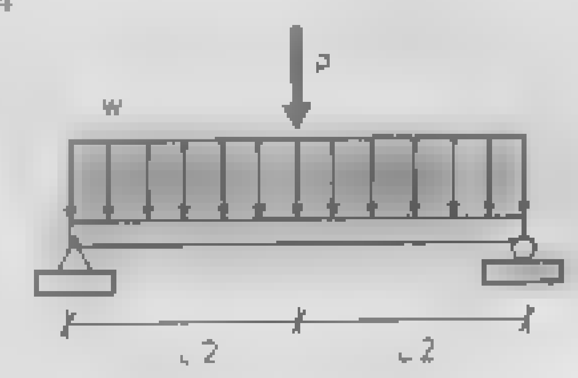
$$S_y = \frac{2I}{a} = \frac{2(1.84 \times 10^6)}{67} \Rightarrow S_y = 55 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{máx} = \frac{1168 + 2w}{55 \times 10^{-6}} \le 140 \times 10^6 \Rightarrow \boxed{w \le 32.7 \text{ kN/m}}$$

518 Una viga de sección S380 × 74 está simplemente apoyada en sus extremos. Soporta una carga concentrada [illegible] de 40 kN y [illegible] uniformemente distribuida de 15 kN/m, incluido su peso propio. Calcular la máxima longitud que puede tener si el esfuerzo admisible es de 140 MPa

Resolución:

Sección S380 × 74



De acuerdo a las tablas

$$S = \frac{I}{C} = 1060 \times 10^3\ mm^3$$

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{4} = 1875\ L^2 + 10\ 000L$$

Sabemos que

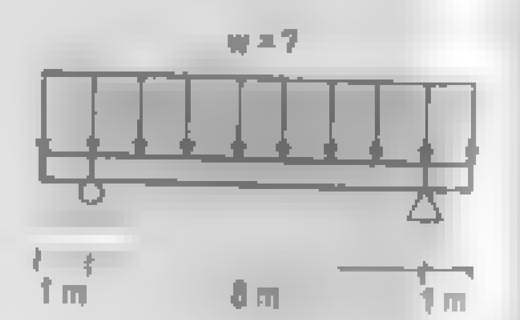
$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{S} = \frac{1875L^2 + 10\ 000\ L}{1060 \times 10^3 \times 10^{-9}} \leq 140 \times 10^6$$

$\Rightarrow 1875\ L^2 + 10\ 000\ L \leq 148\ 400$ [illegible]

519 Una viga de 10 m está colocada sobre dos apoyos [illegible] a 1 m de [illegible] extremos. Se ha construido de dos perfiles C 380 × [illegible] almas y colocados estas en posición vertical. Determinar [illegible] memente distribuida en toda su longitud que [illegible] soporta sin exceder el esfuerzo máximo de 120 MPa.

Resolución:

Calculamos los momentos:



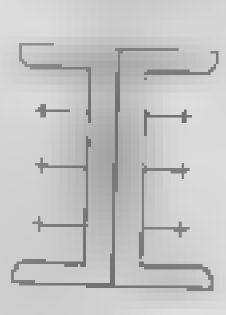
$$M_{máx} = \frac{w(8)^2}{8} - w(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 7{,}5\ w$$

Datos del perfil C 380 × 50 remachado

$S = 687 \times 10^3\ mm^3 \times 2 = 1374 \times 10^3\ mm^3$

Luego:

$$\sigma = \frac{M}{S}$$



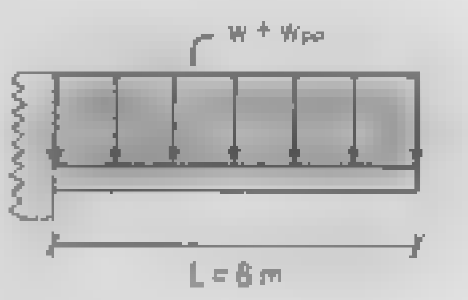
$$\sigma_{máx} = \frac{7{,}5\ w}{1374 \times 10^3 \times 10^{-9}} \leq 120 \times 10^6$$

$\Rightarrow w \leq 22\ kN/m$

$\boxed{w = 22\ kN/m}$

520 La viga de sección W200 × 27 se usa como viga en voladizo de 6 m de longitud. Calcule la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a todo lo largo de la viga además de su propio peso si el esfuerzo por flexión no ha de exceder el valor de 140 MN/m²

Resolución:



Datos de la sección W200×27

$w_{pp} = 26{,}6\ kg/m = 261\ N/m$

$S = 249 \times 10^3\ mm^3$

$w_T = w + 261$

$$M = w_T \frac{L^2}{2} = (w + 261)\frac{(6)^2}{2} = 18w + 4698$$

$$\sigma_{máx} = \frac{M}{S} = \frac{18w + 4698}{249 \times 10^3 \times 10^{-9}} \leq 140 \times 10^6 \qquad w \leq 1676\ N/m$$

521 Repetir el [illegible] por empotrado [illegible] viga de 4 m con una sección W250 × 67

Resolución.

Datos de la sección W250 × 67

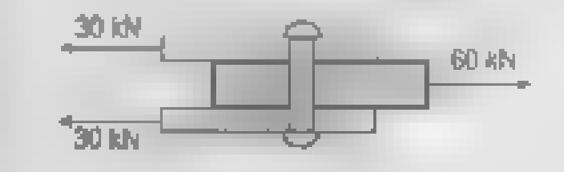
$w_{pp} = 67{,}1\ kg/m = 658\ N/m$ $\quad S = 806 \times 10^3\ mm^3$

$w_T = w + 658$

$$M = w_T\frac{L^2}{2} = (w + 658)\frac{4^2}{2} = 8w + 5264$$

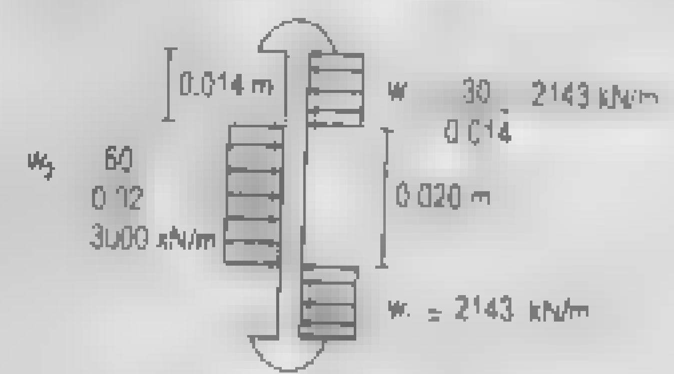
$$\text{Luego. } \sigma_{máx} = \frac{M}{S} = \frac{8w + 5264}{806 \times 10^3 \times 10^{-9}} \leq 140 \times 10^6 \qquad \therefore \boxed{w \leq 13{,}45\ kN/m}$$

522 La figura muestra la sección de una junta, en la que un remache de 28 mm de diámetro une dos placas de 14 mm a una de 20 mm. Suponiendo que las fuerzas indicadas se distribuyen uniformemente a lo largo de la parte del remache sobre la que actuan, determinar el máximo esfuerzo de flexión que aparece en el remache



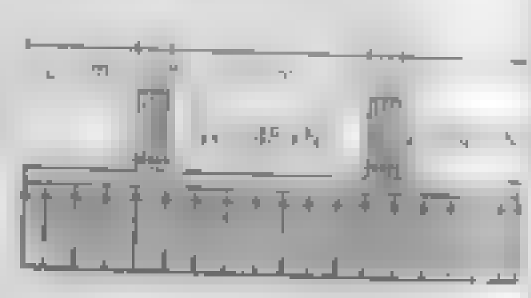
Resolución

Hacemos un esquema de cómo actúan los esfuerzos ... luego su DMF



$$\sigma_{max} = \frac{M}{S} = \frac{0{,}36\times10^3}{\frac{\pi}{32}(0{,}028)^3} = 167\ \text{MPa} \qquad \therefore \boxed{\sigma_{max} = 167\ \text{MPa}}$$

523 Una viga de madera de sección cuadrada que se emplea como durmiente de ferrocarril está sostenida por una reacción uniformemente distribuida y soporta las dos cargas concentradas de 48 kN cada una como indica la figura. Determinar el tamaño de la sección del durmiente si la tensión admisible es de 8 MPa



Resolución:

Calculamos el momento máximo del DMF

Por equilibrio:

$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0:$

$-2W + w(L) = 0$

$$\Rightarrow w = \frac{2w}{L} = \frac{2(48)}{2{,}4}$$

$w = 40$ kN/m

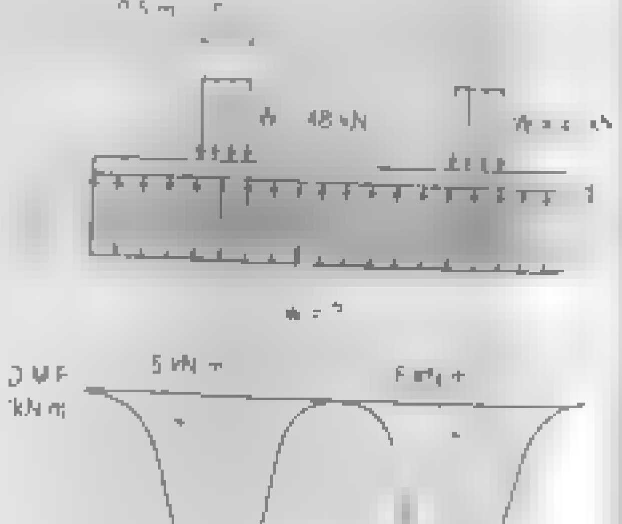
Del D.M.F.

$M_{máx} = 6$ kN m

Para una sección cuadrada, tenemos

$I = \frac{1}{12}a^4 \quad C = \frac{a}{2}$

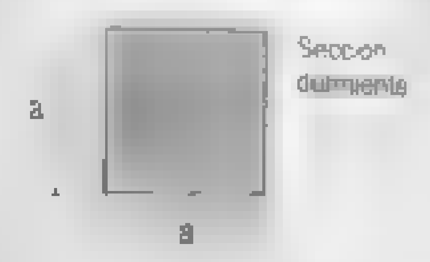
$\Rightarrow S = a^3/6$



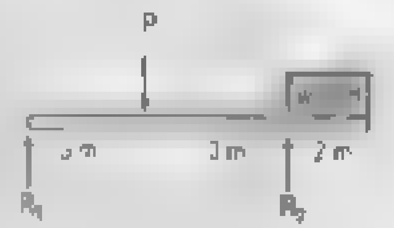
Luego: $\frac{M}{S} = \frac{6\times10^3}{\frac{1}{6}a^3} = 8\times10^6$

a = 0,165 m

a = 165 mm



524 Una viga de madera de 150 mm de ancho y de 300 mm de altura está cargada como indica la figura. Si el máximo esfuerzo admisible es de 8 MN/m², determinar los valores máximos de w y P que pueden aplicarse simultáneamente.



Resolución

Para que P y w sean máximos simultáneamente, haremos que el momento positivo sea igual al negativo

$M_{máx} = 3R_1$

$M_{máx} = 2w$

$3R_1 = 2w \qquad (1)$

$\circlearrowleft\ \Sigma M_2 = 0:\ 3P - 6R_1 - 2w = 0 \qquad (2)$

Además: b = 150 mm

h = 300 mm

σ_{adm} = 8 MN/m²

Sabemos que:

$$\sigma_{máx} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6\cdot 2w}{0{,}15(0{,}3)^2} = 8\times10^6$$

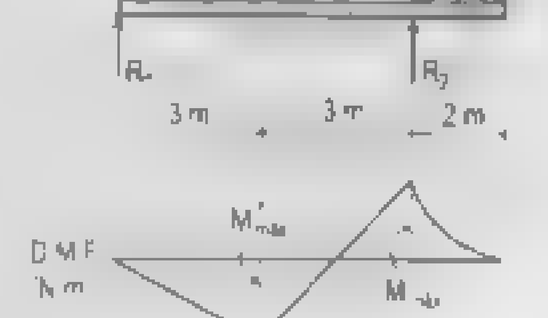
Obtenemos:

w = 9000 N/m

$w = 9000$ N/m $\Rightarrow R_1 = \frac{2}{3}w = 6000$ N

Para calcular P en (2)

$$P = 2R_1 + \frac{2}{3}w = 3R_1 = 3(6000) = 18\,000\ \text{N}$$



$\therefore$ $\boxed{w = 9\ \text{kN/m}}$ y $\boxed{P = 18\ \text{kN}}$

525 En el problema anterior, si la carga en el voladizo es de 10 kN/m y este tiene x metros de longitud, determinar los máximos valores de x y P que puede tener simultáneamente

Resolución:

Para este caso las incógnitas son P y x, sabemos ya que

$$M^{+}_{máx} = 3R_1$$

$$M_{máx} = w\frac{x^2}{2} = 10\times10^3\frac{x^2}{2} = 5000\,x^2$$

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(5000x^2)}{0{,}15(0{,}3)^2} = 8\times10^6 \Rightarrow x = 1{,}897\text{ m} \qquad x \approx 1{,}9\text{ m}$$

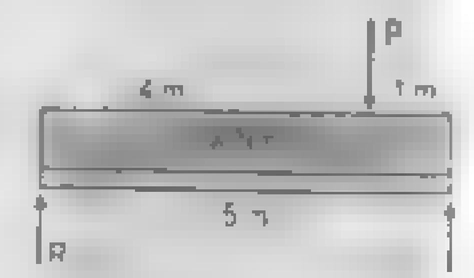
Además

$$5000x^2 = 3R \Rightarrow R = 6000\text{ N}$$

$$P = 2R + \frac{5000}{3}x^2 = 2(6000) + \frac{5000}{3}(3{,}6)$$

$$P = 18\,000\text{ N} \qquad \therefore \boxed{P = 18\text{ kN}}$$

526 Una viga rectangular, de 120 mm de ancho por 400 mm de altura está cargada como se muestra en la figura. Si w = 3 kN/m calcule el valor de P que produzca un esfuerzo por flexión máximo de 10 MPa



Resolución:

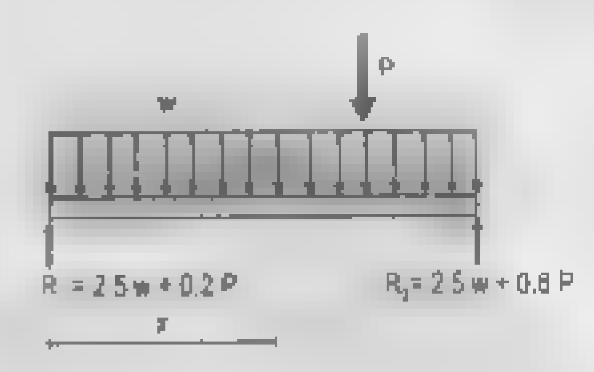
Para calcular el $M_{máx}$ hay dos posibilidades, que se encuentre entre centro de luz o justo debajo de la carga P.

Además sabemos:

$$\sigma_{máx} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6M}{0{,}12(0{,}4)^2} \le 10\times10^6$$

Obtenemos M = 32 000 N.m

Aplicando equilibrio tenemos



$$x_{V=0} = 2{,}5 + P/5w \le 4\text{ m} \qquad ...(1)$$

$$M_{máx} = \frac{(2{,}5w + 0{,}2P)^2}{2w} \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{[2{,}5(3000) + 0{,}2P]^2}{2(3000)} \le 32\,000$$

$$\Rightarrow P \le 31{,}78\text{ kN}$$

Si hacemos P = 31,78 kN ⇒ x = 4,6 > 4 ∴ No

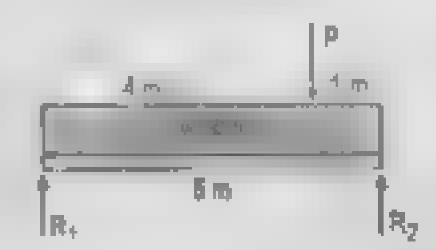
Concluimos que para este caso, el momento máximo se presenta justo debajo de la carga P

$$M_{máx} = R_1(4) - w\frac{(4)^2}{2} = 4(2{,}5\,w + 0{,}2P) - 8w$$

$$= 2w + 0{,}8P = 6000 + 0{,}8P \le 32\,000$$

$$\Rightarrow P \le 32\,500 \quad \therefore P = 32{,}5\text{ kN}$$

Nº 527 Resolver el problema anterior con w = 6 kN/m.



Resolución

Aplicaremos la expresión (2) y luego verificaremos la expresión (1) del problema anterior

$$M_{máx} = \frac{[2{,}5(6000) + 0{,}2P]^2}{2(6000)} \le 32\,000$$

$$\Rightarrow P \le 23\text{ kN}$$

En (1): $x = 2{,}5 + \dfrac{23\,000}{5(6000)} = 3{,}27\text{ m}$

$2{,}5 \le x \le 4$ ∴ Sí $\qquad \therefore \boxed{P = 23\text{ kN}}$

528 Problema ilustrativo

529 Una viga simplemente apoyada en sus extremos, de 10 m de claro, soporta una carga uniforme de 16 kN/m sobre toda su longitud. ¿Cuál es la viga más ligera de perfil W que no excederá un esfuerzo por flexión de 120 MPa? ¿Cuál es el esfuerzo real en la viga seleccionada?

Resolución.

Para una viga simplemente apoyada $M = \frac{wL^2}{8}$

Reemplazando los datos: $M = \frac{16\,000(10)^2}{8} = 200\,000$ N.m

Además $S \geq \frac{M}{\sigma} = \frac{2 \times 10^5}{120 \times 10^6} = 1{,}67 \times 10^{-3}$ m³

Escogemos de la tabla: W610 x 82

masa = 81,9 kg/m = 803 N/m

$S = 1{,}870 \times 10^{-3}$ m³

$M_{real} = (16\,000 + 803)\frac{(10)^2}{8} = 2{,}1 \times 10^5$ N.m $\therefore$ $\boxed{M_{real} = 2{,}1 \times 10^5 \text{ N m}}$

$\sigma_{real} = \frac{M}{S} = \frac{2{,}1 \times 10^5}{1{,}87 \times 10^{-3}} = 113$ MPa $\therefore$ $\boxed{\sigma_{real} = 113 \text{ MPa}}$

530 Repetir el problema anterior si la carga distribuida es de 12 kN/m y la longitud de la viga es 8 m.

Resolución.

Similar al problema anterior

$M = 12\,000\frac{(8)^2}{8} = 96\,000$ N.m

Luego: $S \geq \frac{M}{\sigma} = \frac{96\,000}{120 \times 10^6} = 0{,}80 \times 10^{-3}$ m³ (800 x 10³ mm³)

De la tabla de perfiles escogemos: W460 x 52

masa = 52,0 kg/m (510 N/m)

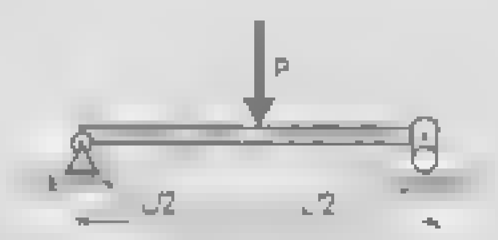
$S = 943 \times 10^3$ mm³

$M_{real} = (12\,000 + 510)\frac{(8)^2}{8} = 100\,008$ N m $\boxed{M_{real} = 100\,008 \text{ N m}}$

$\sigma_{real} = \frac{100\,008}{0{,}943 \times 10^{-3}} = 106$ MPa $\boxed{\sigma_{real} = 106 \text{ MPa}}$

531 Se aplica una carga concentrada de 90 kN en el centro de una viga simplemente apoyada de 8 m de claro. Si el esfuerzo admisible es de 120 MN/m², elegir la sección W más ligera.

Resolución.



El momento para este caso es

$M_{máx} = \frac{PL}{4}$

$M_{máx} = \frac{90 \times 10^3 (8)}{4} = 180$ kN.m

Luego $S \geq \frac{180 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 1{,}5 \times 10^{-3}$ m³ = 1500×10^3 mm³

De la tabla de perfiles escogemos $\boxed{W530 \times 74}$

Datos del perfil

masa = 74,7 kg/m = 733 N/m

$S = 1550 \times 10^3$ mm³

$M_{total} = 180\,000 + \frac{wL^2}{8} = 180\,000 + 733\frac{(8)^2}{8} = 185\,864$ N m

$\sigma_{trabajo} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{185\,864}{1{,}55 \times 10^{-3}} = 120$ MPa

532 Resolver el problema anterior, si la longitud de la viga se cambia a 12 m

Resolución

Similar al problema anterior

$M_{máx} = \frac{PL}{4} = 90 \times 10^3 \frac{(12)}{4} = 270$ kN m

Luego

$S \geq \frac{270 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 2{,}25 \times 10^{-3}$ m³ = 2250×10^3 mm³

De la tabla que tenemos, escogemos. **W610×101**

masa = 101,7 kg/cm² ≡ 1000 N/m

$S = 2530 \times 10^3\ mm^3$

$$M_{total} = 270 \times 10^3 + 1000\frac{(12)^2}{8} = 288 \times 10^3\ N.m$$

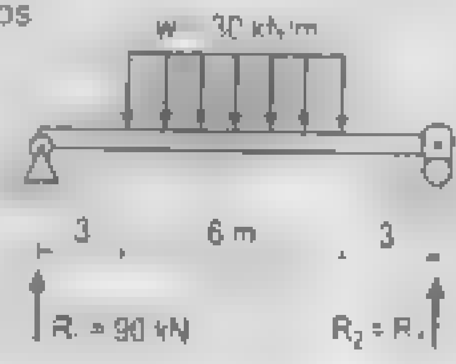
$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{288 \times 10^3}{2,53 \times 10^{-3}} = 114\ MPa$$

Otr[illegible] posibilidad hubiera sido W530 × 101 que tiene S [illegible] 2300 × 10 [illegible] 2250 [illegible] pero en cuanto a esfuerzo hubiera salido: σ [illegible] = 125 MPa y esto [illegible] [illegible]

533 Una viga simplemente apoyada de 12 m de cl[illegible] soporta una carga rep[illegible] [illegible] 30 kN/m [illegible] los 6 m [illegible] [illegible] la sección más [illegible] si el esf[illegible] [illegible] es de 140 MPa [illegible] [illegible]

Resolución:

Del enunciado tenemos



C[illegible] el momento máximo que está en el centro de la [illegible]

$$M_{máx} = 90(6) - 30\frac{(3)^2}{2}$$

$M_{máx} = 405\ kN.m$

$\sigma_{adm} = 140\ MPa$

$$S \geq \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm.}} = \frac{405 \times 10^3}{140 \times 10^6} = 2,893 \times 10^{-3}\ m^3 = 2893 \times 10^3\ mm^3$$

Escogemos un W610 × 125

Datos de perfil: m = 125,1 kg/m = 1227 N/m S = 3220 × 10³ mm³

$$M_{total} = 405 + 1,227 \times \frac{12^2}{8} = 405 + 22 = 427\ kN.m$$

$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{427 \times 10^3}{3,22 \times 10^{-3}} = 133\ MPa \quad \therefore \boxed{\sigma_{real} = 133\ MPa}$$

[illegible] Repetir el problema anterior si la carga uniformemente distribuida se cambia a 80 kN/m

Resolución.

Usando el mismo procedimiento anterior

$$M_{máx.} = 240(6) - 80\frac{(3)^2}{2} = 1080\ kN.m$$

$$S \geq \frac{M_{máx.}}{\sigma_{adm.}} = \frac{1080 \times 10^3}{140 \times 10^6} = 7,71 \times 10^{-3}\ m^3 \quad (7710 \times 10^3\ mm^3)$$

De la tabla escogemos. W920×223

masa = 224,2 kg/m ≡ 2,2 kN/m

$S = 8270 \times 10^3\ mm^3$

$$M_{total} = 1080 + 2,2\frac{(12)^2}{8} = 1080 + 40 = 1120\ kN.m$$

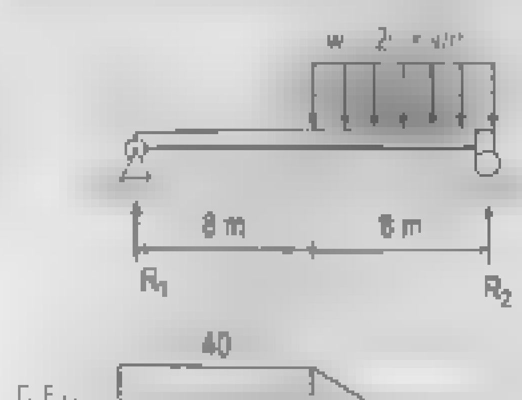
$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{1120 \times 10^3}{8,27 \times 10^{-3}} = 136\ MPa$$

$\sigma_{real} = 136\ MPa < 140\ MPa$ ... Sí $\therefore\ \sigma_{real} = 136\ MPa$

5[illegible] Una viga apoyada en sus extremos de 16 m de claro, soporta una carga uniforme de 20 kN/m en toda su longitud sobre su mitad derecha. Si el esfuerzo admisible es de 120 MN/m² elegir la sección W más económica.

Resolución

Del enunciado tenemos.



Calculamos las reacciones

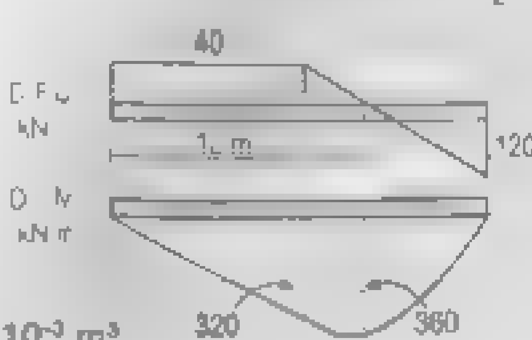
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0 : 16R_2 - 20(8)(12) = 0$$

$$\Rightarrow R_2 = 120\ kN$$

$$+\uparrow \Sigma F = 0 : R_1 + R_2 - 20(8) = 0$$

$$\Rightarrow R_1 = 40\ kN$$

D[illegible]amos los D F C y D M F [illegible] se presenta ca[illegible]



$$M_{máx} = 360\ kN.m \Rightarrow S \geq \frac{360 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 3 \times 10^{-3}\ m^3$$

De tabla escogemos: W690 × 125

masa = 125,6 kg/m ≈ 1232 N/m

$S = 3500 \times 10^3\ mm^3$

Para calcular el momento adicional por peso propio, tenemos

$$M = \left(\frac{wL}{2}\right)x - w\frac{x^2}{2}$$

$$M_{x=10} = \frac{(1232)(16)}{2}(10) - (1232)\frac{(10)^2}{2} = 37\ N.m$$

$$M_{total} = 360 + 37 = 397\ kN.m$$

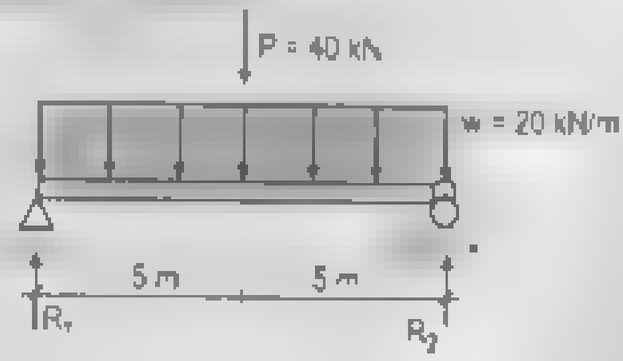
$$\sigma_{real} = \frac{M}{S} = \frac{397 \times 10^3}{3,5 \times 10^{-3}} = 114\ MPa$$

El perfil más económico es: W690 × 125

536 Una viga simplemente apoyada de 10 m de largo soporta una carga de 20 kN/m distribuida uniformemente en toda su longitud y una carga de [illegible] kN [illegible] en su parte media. Si el esfuerzo permisible es de 1[illegible] MPa, determine la viga de forma W más ligera que pueda emplearse.

Resolución

De acuerdo al enunciado tenemos



$\sigma_{adm} = 120\ MPa$

Para esta estructura, el momento máximo vale

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8} + \frac{PL}{4}$$

Reemplazando tenemos

$$M_{máx} = 20\frac{(10)^2}{8} + 40\frac{(10)}{4} = 350\ kN.m$$

$$S \geq \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{350 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 2,9 \times 10^{-3}\ m^3$$

E[illegible]os un W610 × 125

masa = 125,1 kg/m ≈ 1227 N/m

$S = 3220 \times 10^3\ mm^3$

[illegible]lamos el momento adicional por PP

$$M = \frac{wL^2}{8} = 1,227\frac{(10)^2}{8} = 15,33\ kN.m$$

$$M_{total} = 3[illegible] + 15,33 = 365,33\ kN.m$$

$$\sigma_{real} = \frac{M_{total}}{S} = \frac{365,33 \times 10^3}{3,22 \times 10^{-3}} = 114\ MPa$$

El perfil w más ligero es: W610 × 125

Problema ilustrativo

[illegible] viguetas de [illegible] de 50 mm de ancho por 200 mm de altura de sec[illegible], simplemente apoyadas sobre un claro de 4 m, han de soportar un piso [illegible] kN/m². Determinar la distancia entre ejes de las viguetas [illegible] que el esfuerzo máximo sea de 8 MPa. ¿Qué carga total podrían [illegible]rtar si la distancia entre ejes fuera de 0.40 m?

Resolución

[illegible] tenemos

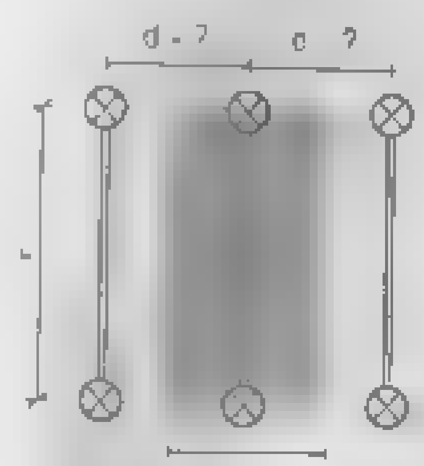
w [illegible] kN/m

M [illegible] [illegible]d(4)[illegible] 10d

Además

$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(10d)10^3}{0,05(0,2)^2} \leq 8 \times 10^6$

$d \leq 0.267\ m$



Ancho trib. d: ?

Si $d = 0{,}4$ m

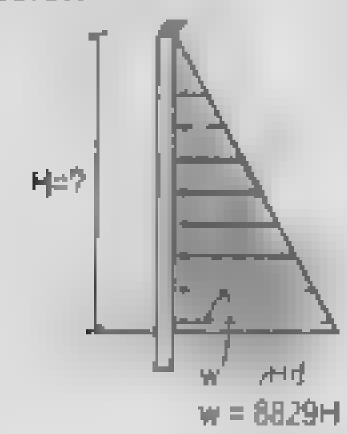
$w = w(0{,}4) = 0{,}4w$ kN/m

$$M_{máx} = \frac{1}{8}(0{,}4\,w)(4)^2 = 0{,}8w \text{ kN/m}$$

$$\sigma = \frac{6(0{,}8w)\times 10^3}{0{,}05(0{,}2)^2} \leq 8\times 10^6 \Rightarrow w \leq 3{,}34 \qquad w = 3{,}34 \text{ kN/m}^2$$

539 Unas vigas de madera de 300 × 300 mm, espaciadas 0,90 m entre ejes están hincadas en el terreno y actuan como vigas en voladizo, formando la estructura resistente de una ataguía para contención de agua cuya densidad es de 1000 kg/m³. Calcular la altura de seguridad de agua detrás de [illegible] si el esfuerzo admisible es de 8 MN/m²

Resolución



Esquema de carga por la presión del agua.

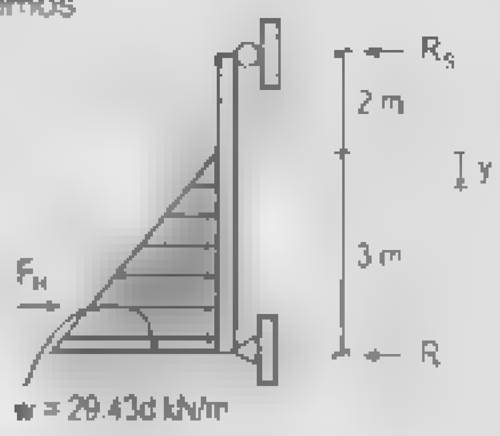
$$M_{máx} = \underbrace{\frac{1}{2}(bwH)}_{\text{fuerza hidro}}\frac{H}{3} = \frac{1}{6}wH^2 \Rightarrow M_{máx} = \frac{1}{6}(8829H)(H^2) = 1471\,H^3$$

$$\sigma_{máx} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(1471H^3)}{[illegible]} \leq 8\times 10^6 \Rightarrow H \leq 2{,}9 \text{ m} \therefore H = 2{,}9 \text{ m}$$

540. Unas vigas de madera de 200 mm de ancho y 300 mm de altura, con 5 m de longitud, apoyadas libremente en sus extremos inferior y superior, sostienen un dique o presa de 3 m de altura, la densidad del agua es de 1000 kg/[illegible]. Determinar (a) el espaciamiento de los maderos de manera que el esfuerzo máximo sea de 8 MPa, y (b) el espaciamiento, si $\sigma_{máx} = 12$ MPa y el agua alcanza su máxima altura de 5 m

Resolución

Para la parte (a) tenemos



Calculamos las reacciones

$$F_H = \frac{1}{2}wh = \frac{1}{2}(29{,}43d)(3) \Rightarrow F_H = 44{,}145d$$

$$R = F\frac{(1)}{5} = 8{,}83d \text{ kN}$$

$$V = R - \frac{29{,}43d}{3}\cdot\frac{y^2}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{6R}{29{,}43d} = 1{,}8 \text{ m}$$

$$\Rightarrow M_{máx} = R_s(3{,}34) - \left(\frac{29{,}43d}{3}\right)\left(\frac{1{,}34}{6}\right)^3 = 25{,}56\,d \text{ kN.m}$$

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(25{,}56d\times 10^3)}{0{,}2(0{,}3)^2} = 8\times 10^6 \qquad [d = 0{,}939 \text{ m}]$$

Para la parte (b) tenemos: podemos asumir un d = 1 m, luego relacionarlo

$$M_{máx} = \frac{\sqrt{3}}{27}wH^2 = \frac{\sqrt{3}}{27}(49{,}05)(5)^2$$

$$= 78{,}66 \text{ kN m}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{6(78{,}66\times 10^3)}{0{,}2(0{,}3)^2}$$

$$\sigma_{máx} = 26{,}22 \text{ MPa}$$

$R_1 = \frac{wH}{6}$, H, w = 49,05, $R_2 = \frac{wH}{3}$

Luego relacionamos los esfuerzos. $d = \frac{12}{26{,}22} = 0{,}46$ m

541 Las vigas de piso de cierto edificio de 6 m de longitud están simplemente apoyadas en sus extremos y están sometidas a una carga de 4 kN/m². Si las vigas tienen secciones W250 x 45, determine el espaciamiento adecuado usando un esfuerzo por flexión admisible de 120 MPa

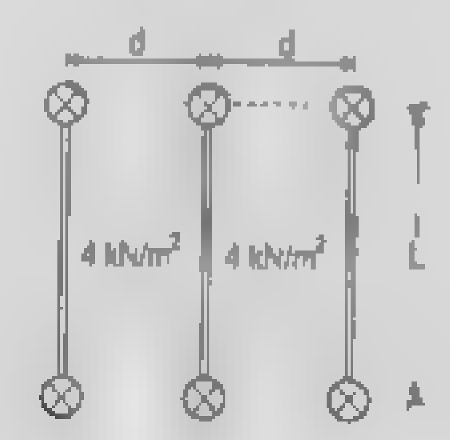
Resolución.

Datos para el perfil W250 x 45.

$m = 44{,}9$ kg/m

$S = 534 \times 10^3\ mm^3 = 534 \times 10^{-6} m^3$

Del esquema para el problema



Carga por el piso:

$w_1 = 4d$ kN/m

Carga por el peso de la viga

$w_2 = (44{,}9)(9{,}81)$ N/m $= 0{,}44$ kN/m

La carga total es. $w = w_1 + w_2$

El momento flector máximo para la viga es:

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8}, \text{ donde } L = 6 \text{ m}$$

Así $M_{máx} = (4{,}5\ w)$

Como el esfuerzo máximo admisible es.

$$\sigma = 120 \text{ MPa} = \frac{M_{máx}}{S} = \frac{4{,}5\ w}{534 \times 10^{-6} m^3}$$

Donde

$$120 \times 10^3 \frac{kN}{m^2} = (4{,}5)\frac{(4d + 0{,}44)}{534 \times 10^{-6}}\frac{kN}{m^3} \Rightarrow \boxed{d = 3{,}45 \text{ m}}$$

542 Seleccione las secciones W más ligeras que puedan emplearse para las vigas y trabes del problema 537 si el esfuerzo admisible es de 120 MPa. Desprecie el peso propio de los miembros

Resolución.

Tomando en cuenta los diagramas de cargas de estos elementos, calculamos los momentos máximos.

Viga B-1

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8} = 10\frac{(4)^2}{8}$$

$M_{máx} = 20$ kN.m

$$S \geq \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{20 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 0{,}167 \times 10^{-3}\ m^3$$

$S \geq 167 \times 10^3\ mm^3$

De la tabla escogemos: $\boxed{W250 \times 18}$

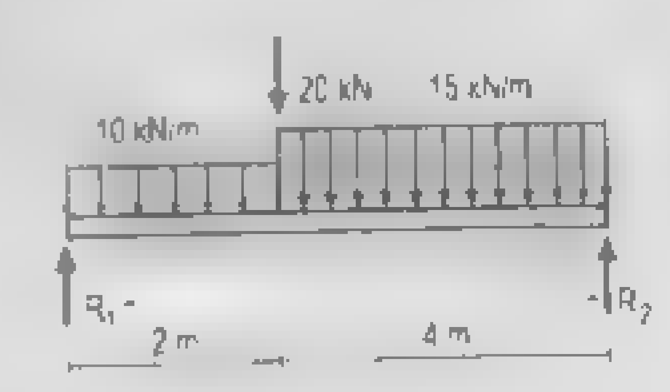
Viga B-2

Cálculo de R

$\circlearrowleft \Sigma M = 0$

$6R_2 - 60(4) - 20(2) - 20(1) = 0$

$\Rightarrow R_2 = 50$ kN



Posición para corte cero.

$V = 15x - 50 = 0$

$\Rightarrow x = 3{,}33$ m

$$M_{máx} = 3{,}33R_2 - 15 \times \frac{3{,}33^2}{2} \Rightarrow M_{máx} = 83{,}33 \text{ kN.m}$$

$$S \geq \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{83{,}33 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 0{,}694 \times 10^{-3}\ m^3$$

De la tabla escogemos: $\boxed{W410 \times 46}$

- Trabe C-1

$$M_{máx} = \frac{PL}{3} = \frac{20 \cdot 6}{3}$$

$M_{max} = 40$ kN m

$S \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}}$ 40 10^3 / 120 10^6 0,333 x 10 m

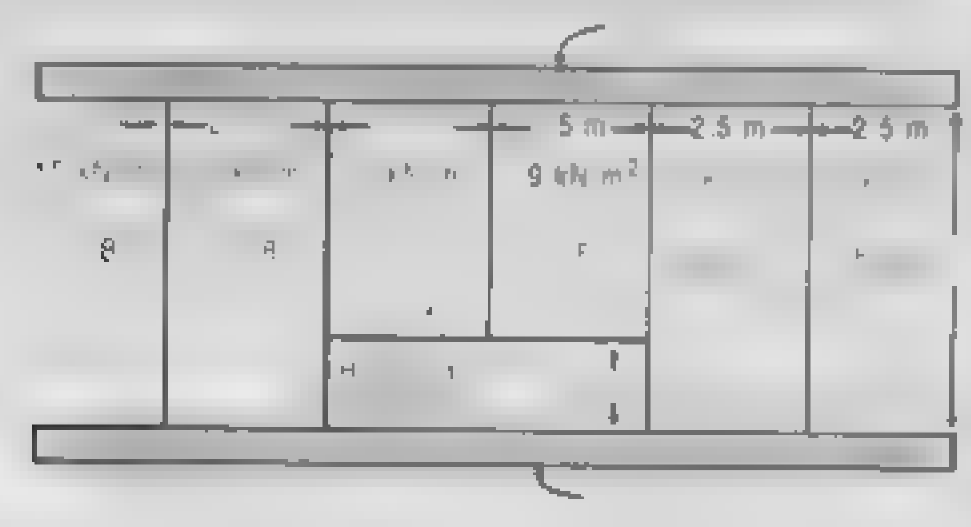
De la tabla escogemos W310 28

• Trabe C 2

$M_{max} = \frac{PL}{3}$ 60 $\frac{6}{3}$ 120 kN m ⇒ S $\frac{M}{\sigma}$ 1 x 10

De la tabla escogemos: W410×60

543 En la figura se muestra una parte de la planta de piso de un edificio ... la carga que actúa sobre cada ... (carga ...) y carga ... Se ... ne los perfiles W adecuados mas ligeros si el esfuerzo por flexión adm... es de 120 MPa y las vigas están correctamente arriostradas.



Resolucion

Se hara un metrado según el esquema de cargas para ... M

• Para B 1)

w 9×2,5 = 22,5 kN m

$M_{max} = \frac{1}{8} wL^2$ $\frac{1}{8}$(22,5)(5

$M_{max} = 70,3$ kN m

Luego:

$S > \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{70,3 \times 10^3}{120 \times 10^6} \Rightarrow S > 0,586 \times 10$ m 586 × 10 mm

De la tabla de perfiles escogemos. W410×39

Tiene $S = 634 \times 10^3$ mm³ > 586×10^3 mm³ ∴ S

Para (B – 2)

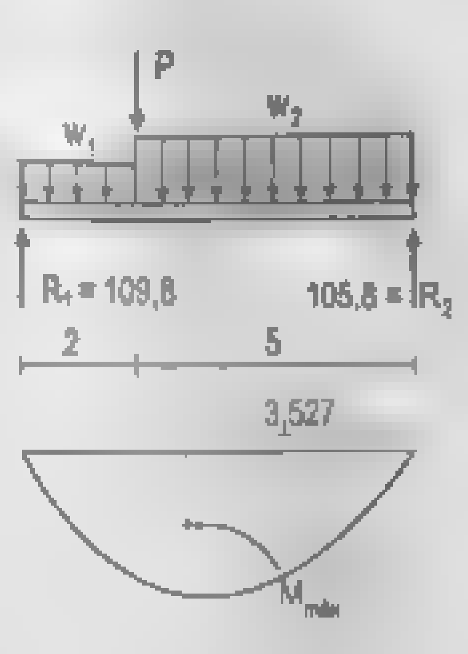
Tenemos:

$w_1 = 15(2\,5/2) = 18,75$ kN/m

$w_2 = 15(2\,5/2) + 9\,(2\,5/2)$

$\Rightarrow w_2 = 30$ kN/m

$P = 9 \times 2,5 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = 28,125$



Del D M F obtenemos

M_{max} 86,66 kN m

$S \frac{M}{\sigma} \frac{186,66 \times 10^3}{120 \times 10^6}$

S 1,555 x 10 m 1555 x 10 mm

De la tabla de perfiles escogemos. W460×82

Tiene $S = 1610 \times 10^3$ mm³ > 1555×10^3 mm³ ∴ Si

viga (B 3) w 15 × 2,5 37,5 kN m

$M = \frac{wL^2}{8}$ 37,5 $\frac{7^2}{8}$ 230 kN m

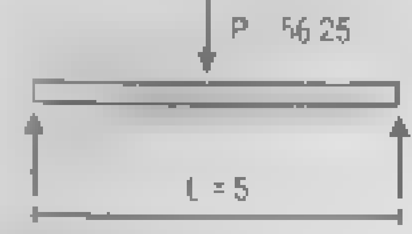
$S \frac{M}{\sigma} = \frac{230 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 1,917 \times 10^{-3}$ m³

De la tabla de perfiles escogemos: W610×92

Tiene $S = 2140 \times 10^3$ mm³ > 1917×10^3 mm³ . Si

• Trabe C 1)

$M = \frac{PL}{4} = \frac{56,25 \cdot 5}{4}$ 70,3 kN m



$S = \frac{70,3 \times 10^3}{120 \times 10^6}$ 0,59 x 10 m³ De la tabla de perfiles escogemos

W410 39

544 Repita el problema anterior si la carga de [illegible] de 9 kN/m² a 12 kN/m²

Resolución

El procedimiento es similar al problema anterior

- Viga B 1

$M_{máx} = \frac{1}{8}wL^2$

$M = \frac{1}{8}$ [illegible] 93,75

$S \geq \frac{M}{\sigma}$ [illegible]

S [illegible] 0,781 × 10 [illegible] 781 × 10 [illegible]

De la tabla de perfiles [illegible]

con S [illegible] 781 × 10 [illegible]

- Viga (B 2)

$w_1 = 24\ (2{,}5/2) = 30 \Rightarrow w_1 = 30$ kN/m

$w_2 = 24\ (2{,}5/2) + 12\ (2{,}5/2) \Rightarrow w_2 = 45$ kN/m

P [illegible] 12 [illegible] $\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$ [illegible] kN M [illegible]

$$S \geq \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{298{,}48\times10^3}{120\times10^6} = 2{,}49\times10^{-3}\ m^3$$

De la tabla de perfiles escogemos. W610×101

con $S = 2{,}53\times10^{-3} > 2{,}49\times10^{-3}$ ∴ Si

- Viga (B-3)

$w = 24 \times 2{,}5 = 60$ kN/m

$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{60\ (7)^2}{8} = 367{,}5$ [illegible] $S \geq \frac{M}{\sigma}$ [illegible]

De la tabla de perfiles escogemos [illegible]

con $S = 3{,}22\times10^{-3} > 3{,}06\times10^{3}$ ∴ S

- Trabe (C-1).

$P = 12 \times 2{,}5 \times 5/2 = 75$ kN

$M = \frac{PL}{4} = 75\frac{(5)}{4}$ [illegible] 93,75

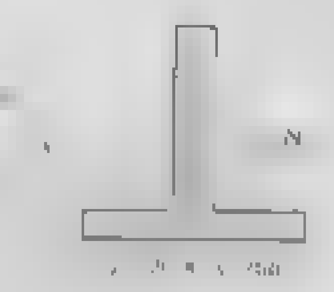
$$S \geq \frac{M}{\sigma} = \frac{93{,}75\times10^3}{120\times10^6} = 0{,}781\times10^{-3}\ m^3$$

De la tabla de perfiles escogemos [illegible]

con S [illegible] 781 × 10 [illegible]

[illegible] Problemas [illegible]

[illegible] viga simplemente apoyada, de 4 m de longitud [illegible] la sección indicada en la figura. La carga repar- [illegible] w N [illegible] Calcular w si $\sigma_t \leq 30$ MN/m² y $\sigma_c \leq 70$ MN/m²



Resolución.

w en N

[illegible] $M_{máx}$ [illegible] 2w

Un momento positivo genera compresión en la fibra superior y tracción en la fibra inferior

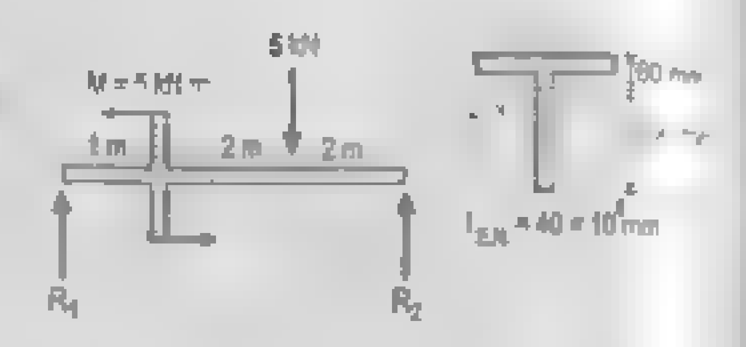
$$\sigma_c = \frac{M_{máx}\,y_c}{I} = \frac{2w(0{,}16)}{2\times10^{-5}} \leq 70\times10^6 \Rightarrow w \leq 4375\ N/m$$

$$\sigma_t = \frac{M_{máx}\,y}{I} = \frac{2w(0{,}08)}{2\times10^{-5}} \leq 30\times10^6 \Rightarrow w \leq 3750\ N/m$$

[illegible]

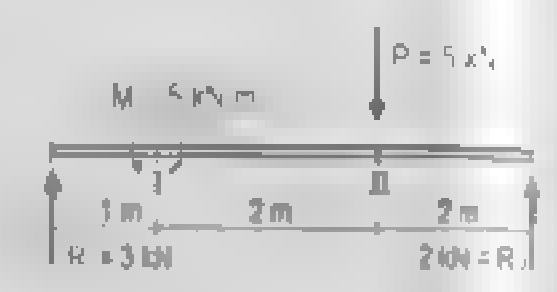
$\frac{\sigma}{\sigma} = \frac{y}{y} = \frac{0{,}16}{0{,}08} = 2{,}00$ $\sigma_c = 60{,}0$ MPa, $\sigma_t = 30{,}0$ MPa

549. Determinar los esfuerzos máximos de tracción y compresión en la viga de la figura. La sección es una T, con las dimensiones y propiedades que se indican en la figura.



Resolución

Dibujamos el diagrama de momentos a partir del diagrama de cargas:

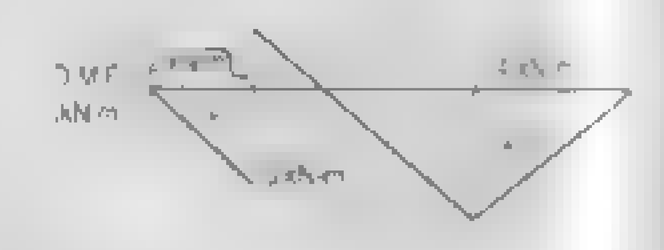


Cálculo de R_1 y R_2 :

$\Sigma M_1 = 0$: $5(R_2) + 5 - 3(5) = 0$

$R_2 = 2$ kN

$R_1 = 3$ kN



En la sección I tenemos momento positivo, esto origina compresión en la fibra superior y tracción en la fibra inferior

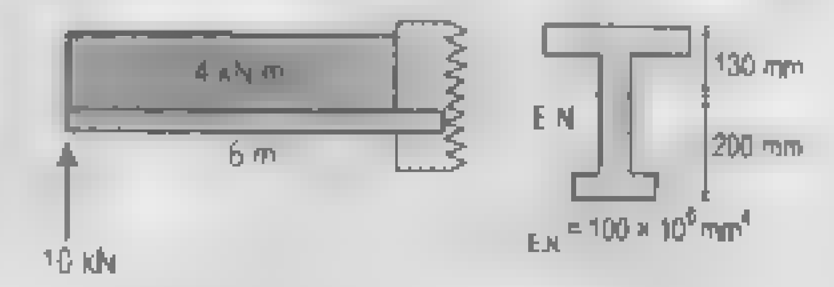
$$\sigma = \frac{(4\times10^3)(0{,}06)}{4\times10^{-5}} = 6\ \text{MPa} \qquad \sigma = \frac{(4\times10^3)(0{,}2)}{4\times10^{-5}} = 20\ \text{MPa}$$

En la sección II tenemos momento negativo, esto genera tracción en la fibra superior y compresión en la fibra inferior

$$\sigma = \frac{(2\times10^3)(0{,}06)}{4\times10^{-5}} = 3\ \text{MPa} \qquad \sigma = \frac{(2\times10^3)(0{,}2)}{4\times10^{-5}} = 10\ \text{MPa}$$

$\boxed{\sigma_t = 20\ \text{MPa}}$ $\boxed{\sigma_c = 10\ \text{MPa}}$

550. Calcule el valor máximo del esfuerzo por flexión, a tensión o a compresión, para la viga en voladizo mostrada en la figura.



Resolución

Para calcular el valor máximo del esfuerzo por flexión, dibujamos el diagrama de momento flexionante.

Posición (x) de máximo momento positivo

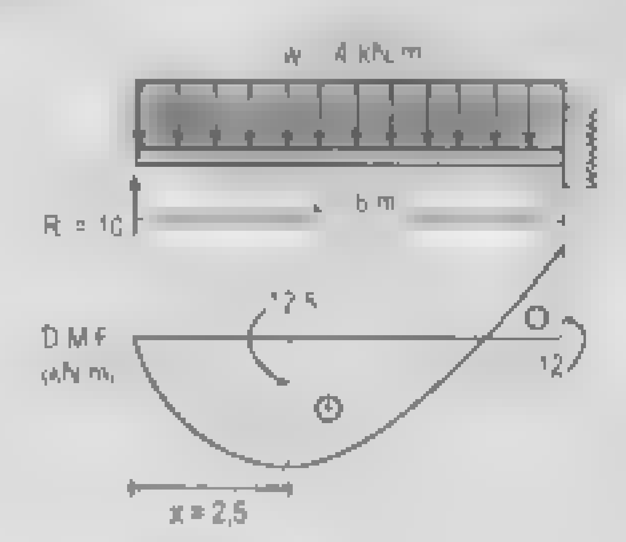
$10 - 4(x) = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$

$M^{(+)}_{máx} = 10\,(2{,}5) - 4\dfrac{(2{,}5)^2}{2}$

$\Rightarrow M^{(+)}_{máx} = 12{,}5$ kN m

$M^{(-)}_{máx} = 10(6) - 4\dfrac{6^2}{2}$

$\Rightarrow M^{(-)}_{máx} = -12$ kNm



- Para el M^{+} tenemos compresión en la fibra superior

$$\sigma_c = \frac{M^{+}_{máx}\,y_c}{I} = \frac{(12{,}5\times10^3)(0{,}13)}{10^{-4}} = 16{,}25\ \text{MPa}$$

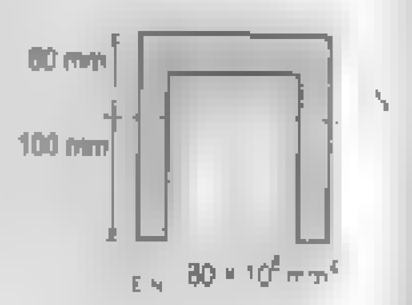
$$\sigma_t = \frac{M^{+}_{máx}\,y_t}{I} = \frac{(12{,}5\times10^3)(0{,}2)}{10^{-4}} = 25\ \text{MPa}$$

- Para el $M^{-}_{máx}$ tenemos tracción en la fibra superior

$$\sigma_t = \frac{M_{máx}\,y_t}{I} = \frac{(12\times10^3)(0{,}13)}{10^{-4}} = 15{,}6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{M_{máx}\,y_c}{I} = \frac{(12\times10^3)(0{,}2)}{10^{-4}} = 24\ \text{MPa} \quad \therefore \boxed{\sigma_c = 24\ \text{MPa}} \ \boxed{\sigma_t = 25\ \text{MPa}}$$

551 En la figura se muestra la sección de una viga cargada de manera tal que su momento flexionante alcanza los valores extremos de + 1,5P N.m y – 2,2 P N.m, siendo P la carga aplicada en newtons. Calcule el valor máximo que puede adquirir P si el esfuerzo de trabajo es de 30 MPa a tensión y de 70 MPa a compresión



Resolución.

Tenemos los siguientes momentos

$M^{+}_{máx} = 1{,}5P$ N.m $P_{máx} = ?$ $\sigma_t = 30$, $\sigma_c = 70$

$M_{máx} = 2{,}2P$ N.m

Para el momento positivo tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior

Además $\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y_c}{y_t} = \frac{0{,}06}{0{,}10} = 0{,}6$

- Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 18$ ... Si

  Si $\sigma_c = 70 \Rightarrow \sigma_t = 117 > 30$ ... No

$$\sigma_c = \frac{M^{+}_{máx}\, y_c}{I} = \frac{1{,}5P(0{,}06)}{8\times10^{-5}} \le 18\times10^{6}$$

$$\sigma_t = \frac{M_{máx}\, y_t}{I} = \frac{1{,}5P(0{,}10)}{8\times10^{-5}} \le 30\times10^{6} \Rightarrow P \le 16\ 000\ N$$

Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la fibra inferior, además:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0{,}06}{0{,}1} = 0{,}6$$

Si $\sigma_c = 70 \Rightarrow \sigma_t = 42 > 30$ ...No

Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 50 < 70$ ... Si

$$\sigma = \frac{M_{máx}\, y}{I} = \frac{2{,}2P(0{,}06)}{8\times10^{-5}} \le 30\times10^{6}$$

$P \le 18\ 182$ N $\Rightarrow$ $P_{máx} = 16$ kN

552 Resuelva el problema anterior, suponiendo ahora que los momentos extremos son + 3,2P N.m y – 5,8P N.m

Resolución:

Resolviendo de manera similar al problema anterior

$M^{+}_{máx} = 3{,}2P$ N.m $\Rightarrow$ $M_{máx} = 5{,}8P$ N.m

Para el momento positivo, tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y_c}{y_t} = \frac{0{,}06}{0{,}1} = 0{,}6$$

Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 18$ ... Si

$$\sigma_c = \frac{M^{+}_{máx}\, y_c}{I} = \frac{3{,}2P(0{,}06)}{8\times10^{-5}} \le 18\times10^{6} \Rightarrow P \le 7500\ N$$

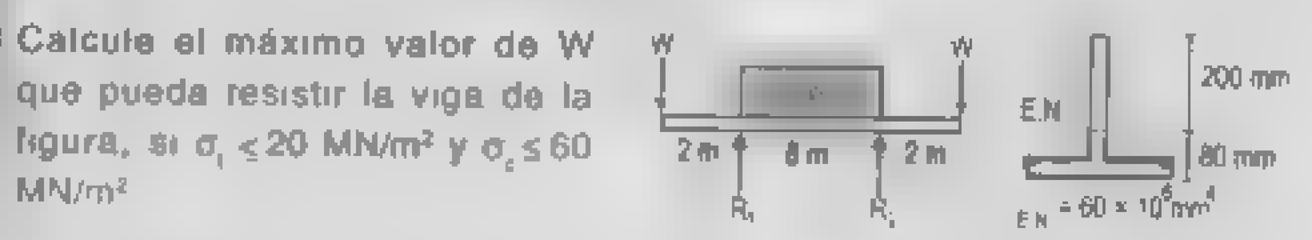
Para el momento negativo tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la inferior

Además $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0{,}06}{0{,}1} = 0{,}6$

Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 50 < 70$ ... Si $\sigma = \frac{M_{máx}\, y}{I} = \frac{5{,}8P(0{,}06)}{8\times10^{-5}} \le 30\times10^{6}$

$\Rightarrow P \le 6896{,}5$ $P_{máx} = 6{,}9$ kN

553 Calcule el máximo valor de W que pueda resistir la viga de la figura, si $\sigma_t \le 20$ MN/m² y $\sigma_c \le 60$ MN/m²

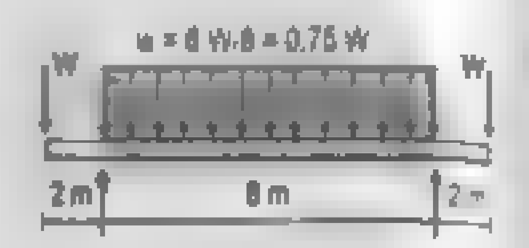


Resolución:

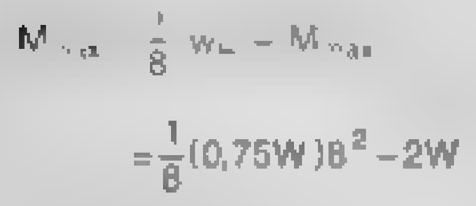
Del enunciado tenemos el diagrama de cargas, dibujamos el D.M.F. para obtener el máximo momento

Del enunciado tenemos el diagrama de cargas, dibujamos el D.M.F. para obtener el máximo momento

$\sigma_t \leq 20\ MN/m^2$
$\sigma_c \leq 60\ MN/m^2$

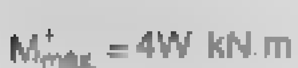


$M_{máx}^- = 2W\ kN.m$



$M_{máx}^+ = \frac{1}{8} wL^2 - M_{máx}^-$

$= \frac{1}{8}(0,75W)8^2 - 2W$



$M_{máx}^+ = 4W\ kN.m$

I. Para el momento positivo, tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior.
Además:

$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y_c}{y_t} = \frac{0,2}{0,08} = 2,5$

Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 50 < 60$ ... Sí

Si $\sigma_c = 60 \Rightarrow \sigma_t = 24 > 20$ ... No

$\sigma_c = \frac{M_{máx}^+ y_c}{I} = \frac{(4W \times 10^3)(0,2)}{6 \times 10^{-5}} \leq 50 \times 10^6 \Rightarrow W \leq 3,75\ kN$

II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior, además

$\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0,2}{0,08} = 2,5$

Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 8 < 60$ ... Sí

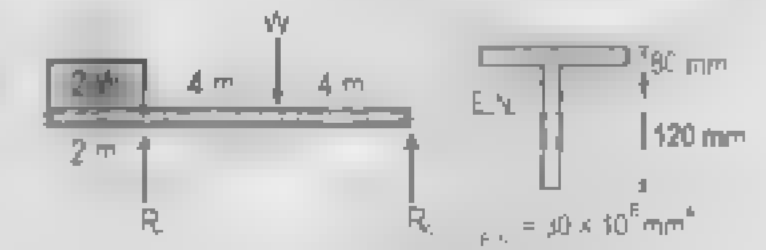
Luego

$\sigma_t = \frac{M_{máx}^- y_t}{I} = \frac{(2W \times 10^3)(0,2)}{6 \times 10^{-5}} \leq 20 \times 10^6$

$\Rightarrow W \leq 3,0\ kN$

$\boxed{W = 3,0\ kN}$

5.34 ¿Cuál es el valor de W que pueda aplicarse a la viga mostrada en la figura si $\sigma_t \leq 60$ MPa y $\sigma_c \leq 100$ MPa?



Resolución

Dibujamos el diagrama de momento flexionante para obtener los momentos máximos

Cálculo de R_2

$\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0:\ 8(R_2) - 4(W) + 2W(1) = 0$

$\Rightarrow R_2 = 0,25\ W$

$M_{máx}^+ = 4R_2 = W$

$M_{máx}^- = 1(2W) = 2W$

w = 2 W/2 = W; W; R; R_2; 2 m; 4 m; 4 m

D.M.F. (kN.m)

Para el momento positivo tenemos

$\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0,08}{0,12} = \frac{2}{3}$

Si $\sigma_t = 60 \Rightarrow \sigma_c = 40 < 100$ ... Sí

$\sigma_c = \frac{M_{máx}^+ y_c}{I} = \frac{(W \times 10^3)(0,08)}{3 \times 10^{-6}} \leq 40 \times 10^6$

$\Rightarrow W \leq 15\ kN$

II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la inferior

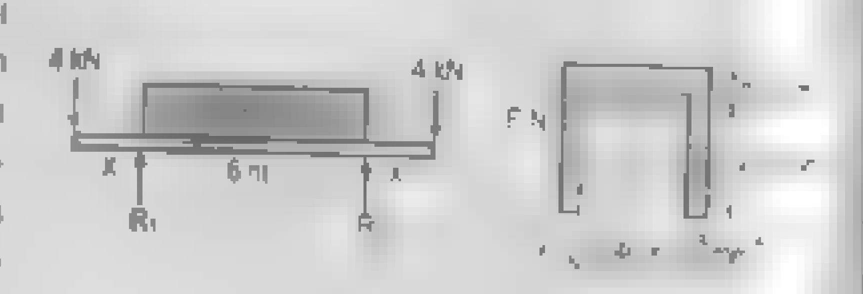
Además $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0,08}{0,12} = \frac{2}{3}$

Si $\sigma_c = 100 \Rightarrow \sigma_t = 66,67 > 60$ ... No
Si $\sigma_t = 60 \Rightarrow \sigma_c = 90 < 100$ ... Sí

$$\frac{(\ldots)\times 10^{3}\,(0{,}08)}{\ldots\times 10^{-5}} \ldots 60\times 10^{6}$$

$W \ldots$ kN $\qquad W = 11{,}25$ kN

55\. ... por ta las cargas de la figura. Si los esfuerzos admisibles son de 20 y 80 MN/m² a tensión y a compresión, respectivamente, calcular los límites de longitud entre los que pueden variar los voladizos.



Resolución:

Dibujamos el D.M.F. para obtener $M^{+/-}_{máx}$

$M_{máx} = 4x$

$M'_{máx} = 12 - 4x$

I. Para el momento positivo, tenemos compresión en la fibra superior y tracción en la inferior. Además:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_t} < \frac{y_c}{y_t} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4$$

Si ... σ ... $8 < 80$ $\qquad$ Sí

Si ... σ ... $20 > 20$ $\qquad$ No

$$\sigma = \frac{M^{+}_{máx}\,y_c}{I} = \frac{(12-4x)\times 10^{3}\,(0{,}08)}{4\times 10^{-5}} = 8\times 10^{6} \Rightarrow x = 2\text{ m}$$

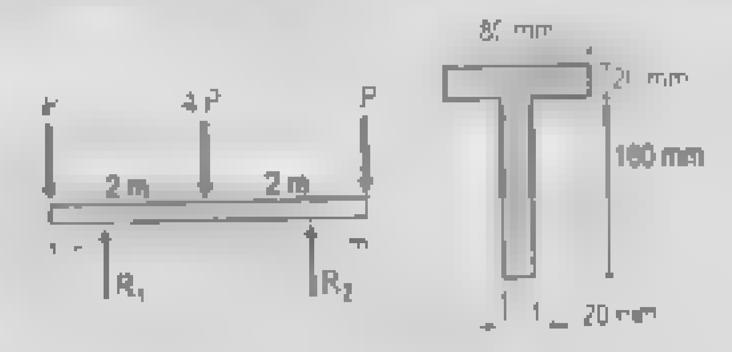
II. Para el momento negativo tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la inferior.

Además ... $= 0{,}4$

... 80

$$\sigma = \frac{M\,y}{I} = \frac{4x\ldots}{4\times 10^{-5}} = 20\times 10^{6} \Rightarrow x = 2{,}5 \qquad x \ldots$$

... T ... las tres fuerzas concentradas que se indican ... neutra está a 70 mm de la parte inferior de ... 15,52 × 10⁶ mm⁴. Con estos datos, determinar el valor ... P ... que los esfuerzos sean ... 30 MPa y ... 70 MPa.



Resolución

30 20 30

20

160

I. Primero comprobaremos que

$\bar{x} = 70$ mm, $\quad I = 15{,}52\times 10^{6}$ mm⁴

Hacemos e s guiente cuadro

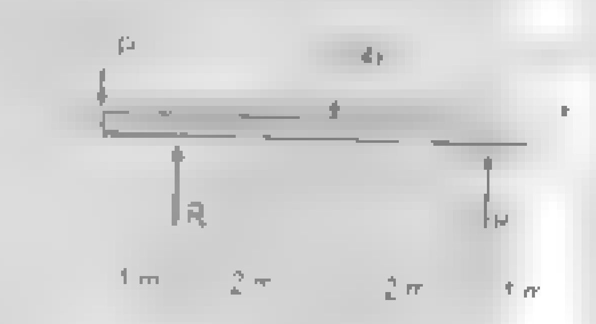
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	3600	90	324 000	9 720 000	1 440 000	2 16 x 10⁶
	600	10	6000	20 000	2 160 000	11 16 x 10⁵
						2 18 x 10⁶
	+					15,52 x 10⁶ mm

$\bar{x} = \frac{336\ 000}{4200} = 70$ mm   I = 15 52 x 10⁶ mm⁴

NOTA En el e... ...do mencion... ...e... ...tra esta a 70 mm de la ...rior ... deber ... de a parte superior ... presencia de las alas en la parte superior

I D...amos el D M F para obtener el $M^+_{máx}$ y $M_{máx}$

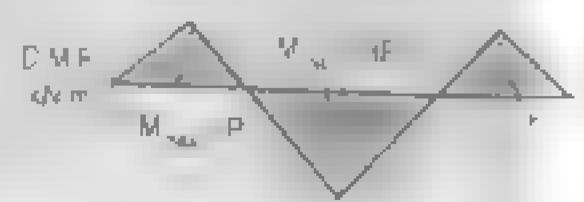
Calculamos R_1 y R_2



$R_1 = R_2 = \frac{6P}{2} = 3P$

$M_{máx} = -(1)(P) = -P$

$M^+_{máx} = -(3)P + 2(3P) = 3P$



II Para el momento pos t vo tenem s compres n en a f b a s per... tracción en la inferior

Además $\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y_c}{y_t} = \frac{0.07}{0.11} = \frac{7}{11}$

Si $\sigma_c = 70 \Rightarrow \sigma_t = 110 > 30$ No

Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 19.1$ MPa < 70 Si

Luego

$$\sigma_c = \frac{M^+_{máx} y_c}{I} = \frac{(3P\times10^3)(0.07)}{1552\times10^{-5}} \le 19.1\times10^6 \Rightarrow P \le 1.41\ kN$$

V Para el momento negativo tenemos tracción en la fibra superior y compresión en la inferior

Además: $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0.07}{0.11} = \frac{7}{11}$

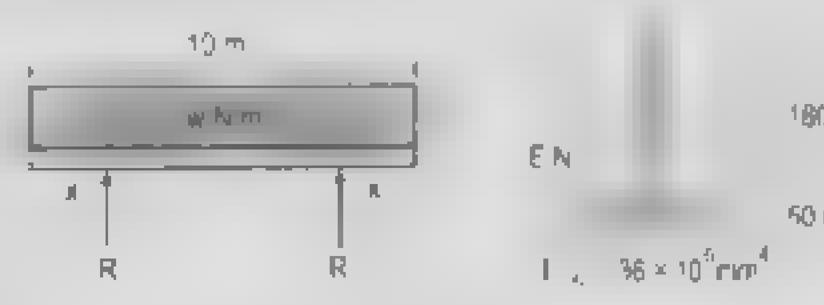
Si $\sigma_t = 30 \Rightarrow \sigma_c = 47.1$ MPa < 70 ... Si

Si $\sigma_c = 70 \Rightarrow \sigma_t = 44.5 > 30$ ... No

$$\therefore\ \sigma_t = \frac{M_{máx}\, y_t}{I} = \frac{(P\times10^3)(0.07)}{15.52\times10^{-6}} \le 30\times10^6$$

$\Rightarrow P \le 6.65$ kN   ∴ $P = 1.41$ kN

5.7 Una viga de fundición de 10 m de longitud está apoyada como indica la figura y soporta una carga uniformemente repartida de w N/m incluido su propio peso. Los esfuerzos admisibles son $\sigma_t \le 20$ MN/m² y $\sigma_c \le 80$ MN/m². Determinar el máximo valor de w si x = 1 m

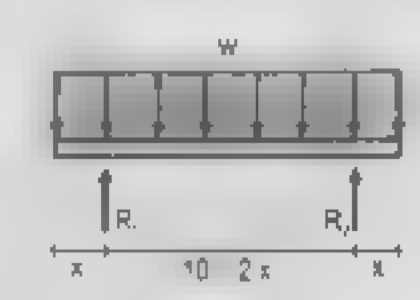


Resolucion

Dibujamos el D M F para obtener $M_{máx}$ y $M_{máx}$

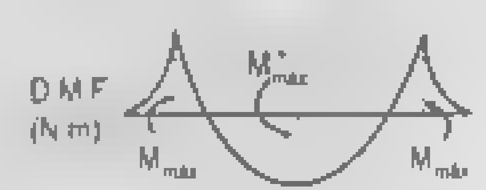
$M_{máx} = w\frac{x^2}{2} = \frac{wx^2}{2}$

Para x = 1 $M_{máx} = \frac{w}{2}$



$M^+_{máx} = \frac{wL^2}{8} - M_{máx}$

$M^+_{máx} = \frac{w(10-2x)^2}{8} - \frac{wx^2}{2}$



$M^+_{máx} = w(12.5 - 5x)$

Para x = 1 $\Rightarrow$ $M^+_{máx} = 7.5w$

I. Para el momento positivo, hay compresión en la fibra superior y tracción en la inferior

Además, $\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{y}{y_t} = \frac{0.18}{0.05} = 3.6$

Si $\sigma = 20 \Rightarrow \sigma = 72 < 80$ ... Si

Si $\sigma = 80 \Rightarrow \sigma = 22.2 > 20$ ... No

$\sigma = \frac{M^{+}_{máx}\, y_c}{I} = \frac{(7.5w)(0{,}18)}{3{,}6\times10^{-5}} \leq 72\times10^{6} \Rightarrow w \leq 1920$ N/m

II. Para el momento negativo, tenemos tracción en la parte superior y compresión en la inferior

Además: $\frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{y_t}{y_c} = \frac{0.18}{0.05} = 3.6$

Verificamos esfuerzos.

Si $\sigma_c = 80 \Rightarrow \sigma_t = 288 > 30$ ... No

Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma_c = 5.56 < 70$ ... Si

$\sigma_t = \frac{M_{máx}\, y_t}{I} = \frac{(w/2)(0{,}18)}{3{,}6\times10^{-5}} \leq 20\times10^{6} \Rightarrow w \leq 8000$ N/m

Escogemos el menor valor: $w = 1.92$ kN/m

558 En el problema anterior determinar los valores de x y w de manera que esta última sea máxima.

Resolución:

Usamos la expresión de momentos determinados en el problema anterior:

$M^{+}_{máx} = w(12.5 - 5x)$

$M_{máx} = 0.5wx^2$

y los momentos que ocasionan los esfuerzos máximos

I. Para el momento positivo tenemos: Si $\sigma_t = 20 \Rightarrow \sigma = 72$

Luego $\sigma = \frac{M^{+}_{máx}\, y}{I} = \frac{M^{+}_{máx}(0{,}18)}{3{,}6\times10^{-5}} \leq 72\times10^{6} \Rightarrow M^{+}_{máx} \leq 14\,400$

Para el momento negativo tenemos: $\sigma = 20 \Rightarrow \sigma_c = 5.56$

$\sigma_t = \frac{M_{máx}\, y_t}{I} = \frac{M_{máx}(0{,}18)}{3{,}6\times10^{-5}} \leq 20\times10^{6} \Rightarrow M_{máx} \leq 4000$

Igualamos momentos

$M^{+}_{máx} = w(12{,}5 - 5x) = 14\,400$ ... (I)

$M_{máx} = 0.5wx^2 = 4000$ ... (II)

De (I) y (II) tenemos $x^2 + \frac{25}{9}x - \frac{125}{18} = 0$, cuyas raíces son

$x_1 = 1{,}59 \Rightarrow x_2 = -4{,}37$

Tomamos el positivo $x = 1{,}59$ m

Reemplazando en (I): $w = \frac{14\,400}{12{,}5 - 5(1{,}59)}$ ⇒ $w = 3164$ N/m = 3,1 kN/m

559 Una viga está formada por seis planchas de 100 mm de ancho por 20 mm de espesor colocadas libremente una sobre otra formando un conjunto de 100 mm de ancho por 120 mm de altura. (a) Comparar la resistencia de dicho conjunto con la de una viga de una sola pieza y de las mismas dimensiones. (b) Calcular la relación de resistencias si la viga estuviera formada por doce planchas de 100 mm de ancho por 10 mm de espesor

Resolución.

a)

t = 20 mm

6t = 120 mm   h = 120

b = 100 mm   b = 100

(I)   (II)

La resistencia de cada lámina independiente es.

$\sigma_I = \frac{6M}{bt^2} = \frac{6(M_I/6)}{0.1(0.02)^2} = 2{,}5\times10^{4}M_I$

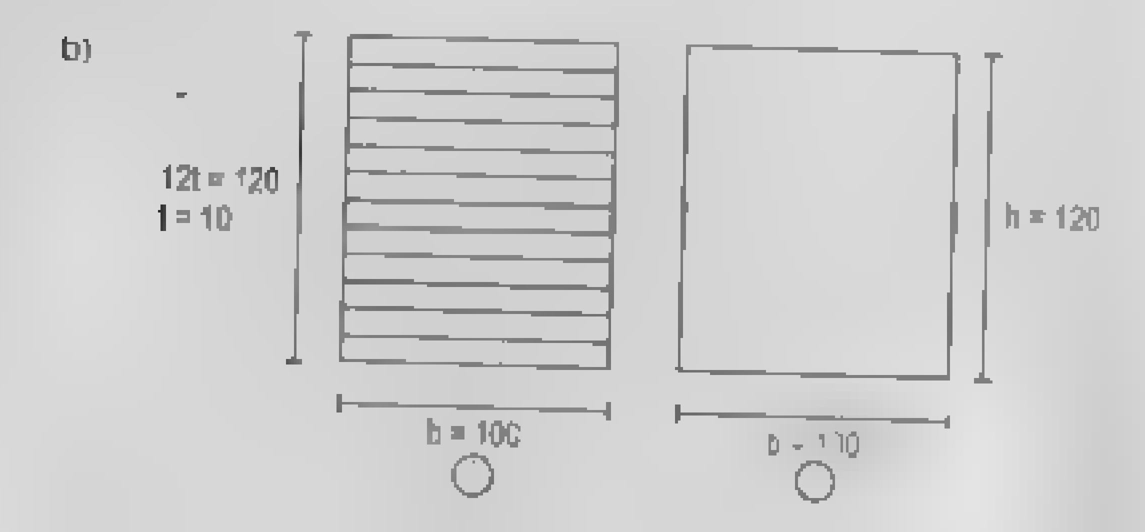
La resistencia de la viga completa.

$$\sigma_{II} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6M}{0.1(0.12)^2} = \frac{1.25}{3} \times 10^4 M$$

$$\sigma_I = \sigma_{II} \Rightarrow 2.5 \times 10^4 M_I = \frac{1.25}{3} \times 10^4 M$$

$$\frac{M_I}{M} = \frac{1}{6} \quad \therefore \quad \boxed{\text{La relación es de } 1 \text{ a } 6}$$

b)



Analizando para cada lámina

$$\sigma_I = \frac{6M}{bt^2} = \frac{6(M_I/12)}{0.1(0.01)^2} = 5 \times 10^4 M_I$$

Para la viga de una sola pieza.

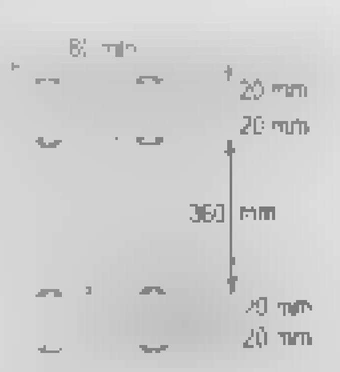
$$\sigma_{II} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6M_{II}}{0.1(0.12)^2} = \frac{1.25}{3} \times 10^4 M_{II}$$

Igualando los esfuerzos. $\sigma_I = \sigma_{II}$

$$5 \times 10^4 M_I = \frac{1.25}{3} \times 10^4 M_{II} \Rightarrow \frac{M_I}{M_{II}} = \frac{1}{12}$$

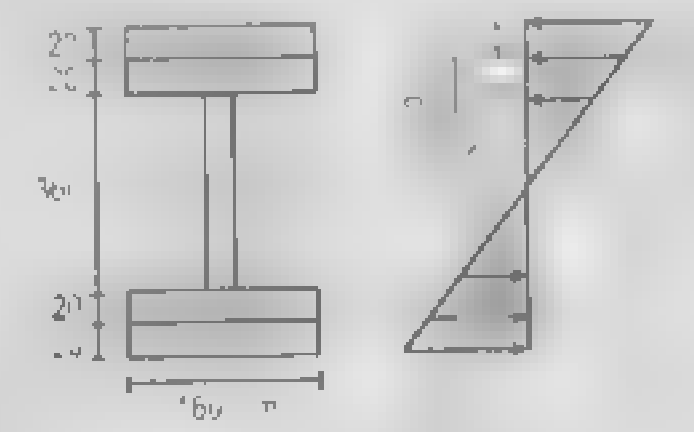
$\boxed{\text{La relación es de } 1 \text{ a } 12}$

...a viga de sección I de la figura, se refuerza remachando ...s placas de 160 × 20 mm a los patines superior e infe... Si el esfuerzo máximo es de 110 MPa, calcular la ...rza total de compresión o tensión (a) en cada refuerzo, y (b) en cada patín. Desprecia el efecto de debilitación de ...s orificios de los remaches



Resolución:

...emos un esquema de esfuerzos.



... lamos los esfuerzos en (I), (II) y (III)

$$\sigma_I = 110 \text{ MPa}, \quad \sigma \quad \frac{200}{\ } \sigma = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_{III} = \frac{180}{220}\sigma \quad 90 \text{ MPa}$$

a) La fuerza total en cada refuerzo está dada por el esfuerzo medio por el área

$$\sigma \quad \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \quad \frac{110 + 100}{2} = 105 \text{ MPa}$$

$\text{Area} = (0{,}16)(0.02) = 3{,}2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

$T_R \quad (\sigma_M)(\text{Área}) = 105 \times 10^6 (3{,}2 \times 10^{-3}) \quad \therefore \quad \boxed{T_R = 336 \text{ kN} \quad C_R}$

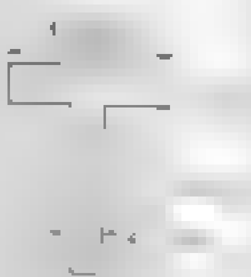
b) La fuerza en cada patín, está dada por el esfuerzo medio en el patín por el área del patín:

$$\sigma \qquad \frac{\ }{2} \qquad \frac{100 \quad 90}{2} \quad 95 \text{ MPa}$$

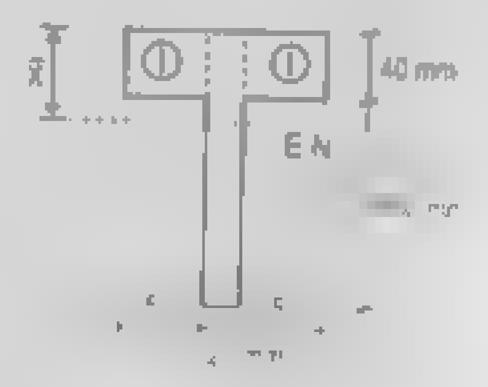
$\text{Area} = (0{,}16)(0.02) = 3{,}2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

$T_P = (\sigma_M)(\text{Área}) = (95 \times 10^6)(3{,}2 \times 10^{-3}) \qquad \boxed{T_P = 304 \text{ kN} = C_P}$

561 Una sección en T tiene las dimensiones de la figura. Demostrar que la línea neutra está a 60 mm del borde superior y que el momento de inercia con respecto a ella es I_{LN} = 26.67 × 10⁶ mm⁴. Si el esfuerzo de tensión en la parte inferior del patín es de 10 MN/m², determinar: (a) la fuerza total de tensión en el patín. (b) la fuerza total de compresión en la sección. (c) el momento de la fuerza total de compresión con respecto al E.N. (d) el momento de la fuerza total de tensión respecto del E.N. (e) comparar la suma de (c) y (d) con el momento total aplicado según se deduce de la fórmula de la flexión.



Resolución:
Para demostrar la posición de la línea neutra y el momento de inercia, hacemos

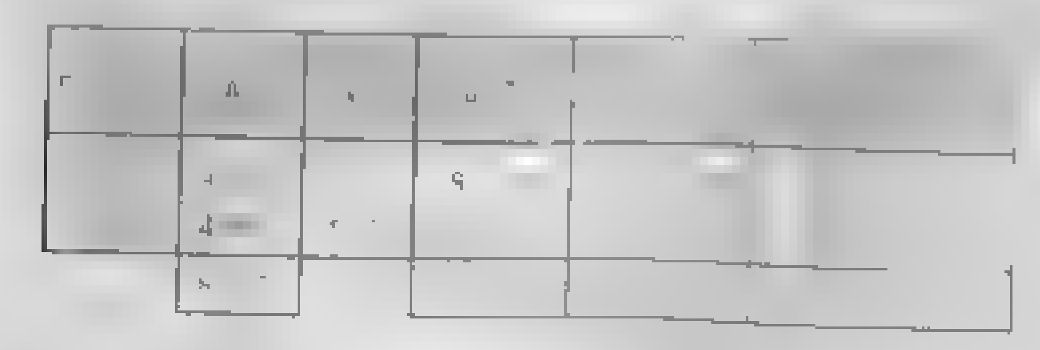


Partimos la sección en porciones

Además para un rectángulo de base b y altura h

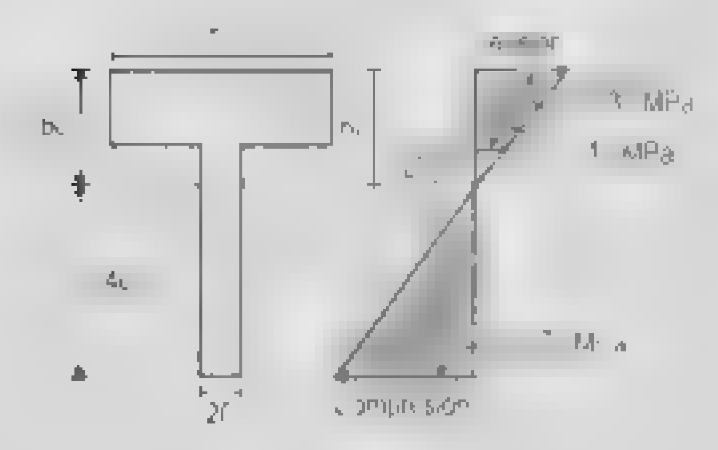
$I = \frac{1}{12} b$ [illegible]

Luego aplicaremos Steiner



$\bar{x} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{48 \times 10^4}{8 \times 10^3} = 60$ mm

$I = \Sigma I_i + A_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 = 26.67 \times 10^6$ mm⁴



Sabemos que
σ_{ii} = 10 MPa, $\sigma_i = \frac{60}{20}(10) = 30$; $\sigma_{iii} = \frac{140}{20}(10) = 70$

a) La fuerza total en el patín es: $T_p = \sigma_M$ (Área)

$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_{ii}) = \frac{1}{2}(10 + 30) = 20$ MPa

Área = (0,12)(0,04) = 4,8 × 10⁻³ ⇒ $T_p = (20 \times 10^6)(4{,}8 \times 10^{-3}) = 96$ kN

T_p = 96 kN

b) La fuerza total de compresión es: C = σ_M Área

$\sigma_M = \frac{1}{2}(0 + \sigma_{iii}) = \frac{\sigma_{iii}}{2} = \frac{70}{2} = 35$ MPa

Área = (0,02)(0,14) = 2,8 × 10⁻³ ⇒ C = (35 × 10⁶) (2,8 × 10⁻³) = 98 kN

∴ C = 98 kN

c) El momento de la fuerza de compresión [illegible]

M [illegible] C [illegible] 98 [illegible] 0,14 M_C = 9,15 kN m

d) El momento de la fuerza total de tensión está dado por
$M_T = M_1 + M_2 + M_3$
$M_1 = T_1 d_1 = (\sigma_i/2)(0{,}02)(0{,}02)\frac{2}{3}(0{,}02)$

M_1 = 80/3 N m
$M_2 = T_2 d_2 = (\sigma_{ii})(0{,}12)(0{,}04)(0{,}02 + 0{,}02)$
M_2 = 1920 N m

M_3 [illegible] 2 [illegible] 0,12 [illegible] 0,04 [illegible] 0,02 [illegible] $\frac{2}{3}$ 0,04

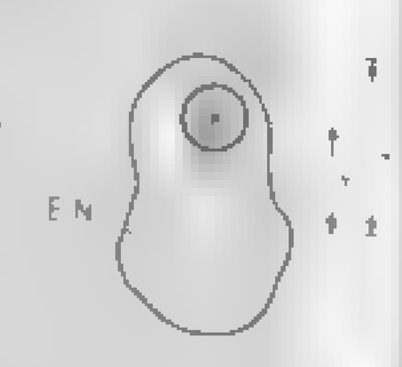
M_3 = 2240 N.m M_T = 4,19 kN m

e) $M = M_T + M_c = 9{,}15 + 4{,}19 = 13{,}34$ kN m

Además. $\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow M = \sigma\frac{I}{y}$

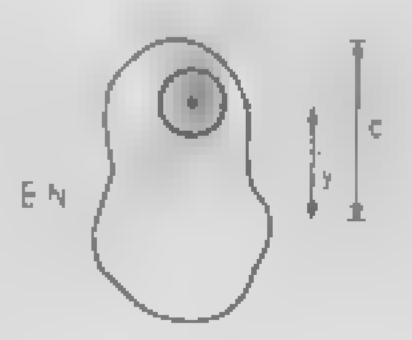
$$M = \frac{30 \times 10^{6}(2{,}667 \times 10^{-6})}{0{,}06} = 13{,}335 \Rightarrow M = 13{,}34 \text{ kN m}$$

562 En una viga de sección cualquiera en la que el esfuerzo máximo es σ, demostrar que la fuerza total sobre un elemento de área A', como el sombreado en la figura, viene dada por $F = (\sigma/c)A'\bar{y}'$, siendo $\bar{y}'$ la ordenada del centro de gravedad del área sombreada. Demostrar también que el momento de esta fuerza con respecto al E.N. es $M' = (\sigma/c)I'$, en donde I' es el momento de inercia del área A' con respecto a la línea o eje neutro.



Resolución.

Tenemos lo siguiente



Demostrar que

$F = (\sigma/c)A'\bar{y}'$ ...(I)

$M' = \frac{\sigma}{c}I'$ ...(II)

Para (I)

Sabemos que: $\int_A dF = \int_A \sigma' dA \Rightarrow F = \int_A \sigma' dA$

Además, $\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{y}{c} \Rightarrow \sigma' = \sigma\frac{y}{c} = \frac{\sigma}{c}y$

$$\Rightarrow F = \int_A \left(\frac{\sigma}{c}y'\right)dA = (\sigma/c)\int_A y' dA$$

$F = (\sigma/c)\bar{y}'A'$ ... Si

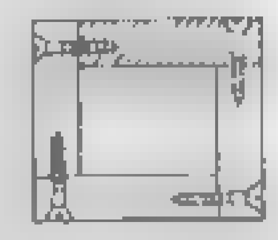
Para (II)

Sabemos que $dM = y'dF = y'\sigma' dA = y'\frac{\sigma}{c}y' dA$

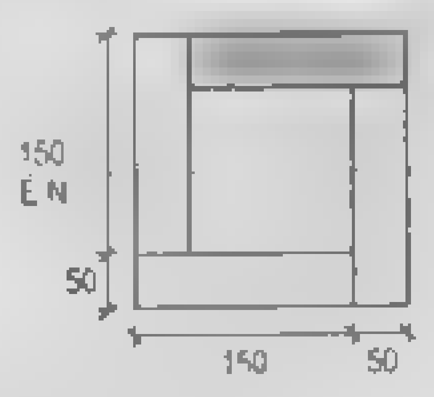
$$\int_M dM = \int_A (\sigma/c)(y')^2 dA = \frac{\sigma}{c}\int_A (y')^2 dA$$

$M' = \frac{\sigma}{c}I'$ donde $I' = \int_A (y')^2 dA$

563 Una viga de tipo caja está formada por cuatro tablas de 50 × 150 mm de sección, atornilladas firmemente entre sí como indica la figura. Si el máximo esfuerzo normal que se produce es de 8 MPa, determinar la fuerza total que actúa sobre la porción rayada de la sección y el momento de esta fuerza respecto del E.N. *Indicación:* Emplear los resultados del problema anterior.



Resolución



Aplicamos las ecuaciones anteriores.

$F = (8 \times 10^{6}/0{,}1)(7{,}5 \times 10^{-3})(0{,}075) = 45\,000$

$\boxed{F = 45 \text{ kN}}$

Además

$I' = \frac{1}{12}(0{,}15)(0{,}05)^3 + 7{,}5 \times 10^{-3}(0{,}075)^2$

$I' = 43{,}75 \times 10^{-6}$ m^4

$M = (8 \times 10^{6}/0{,}1)(43{,}75 \times 10^{-6}) = 3500$ N.m

$\boxed{M = 3{,}5 \text{ kN m}}$

564 Repetir el problema anterior usando una de las tablas verticales en lugar de la rayada

Resolución:

Aplicamos de manera similar

$\sigma = 8$ MPa $c = 0{,}1$ m $A = 7{,}5 \times 10^{-3}$

$\bar{y}' = 25$ mm $= 0.025$ m

$\Rightarrow F = (8 \times 10^6/0{,}1)(7{,}5 \times 10^{-3})(0.025) = 15\,000$ N

$\Rightarrow F = 15$ kN

$I' = \frac{1}{12}(0{,}05)(0{,}15)^3 + 7.5 \times 10^{-3}(0.025)^2 = 18{,}75 \times 10^{-6}$

$\Rightarrow M = (8 \times 10^6/0{,}1)(18{,}75 \times 10^{-6}) = 1500$ N.m

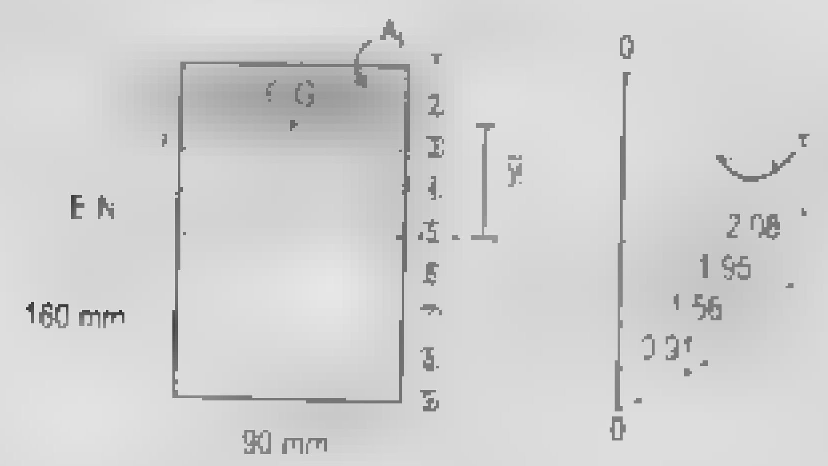
$\Rightarrow M = 1.5$ kN m

565 y 566. Problemas ilustrativos

567 Una viga de madera de 90 mm de ancho y 160 mm de altura está sometida a una fuerza cortante vertical de 20 kN. Determinar el esfuerzo cortante en puntos tomados de 20 en 20 mm a lo alto de la viga a partir de su borde superior.

Resolución

Dibujamos la sección transversal



Datos: V = 20 kN

Para calcular el esfuerzo cortante en cada nivel, tenemos:

$\tau = \frac{V}{Ib}Q = \frac{V}{Ib}(A\,\bar{y})$

Donde: V: fuerza cortante en la sección

$I = \frac{1}{12}bh^3$, momento de inercia

b: ancho de la sección en la zona donde se evalúa el esfuerzo

A_i: área que está por encima o debajo del nivel donde se evalúa el esfuerzo

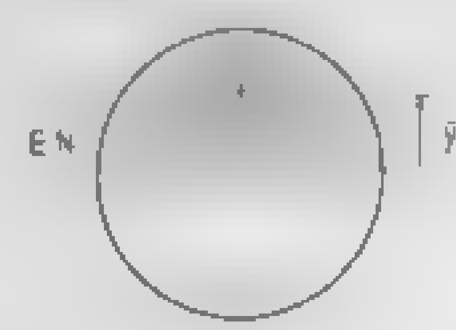
y_i: posición de C.G. del área (A) con respecto al E.N

N°	V (N)	I (m⁴)	b (m)	A (m²)	y (m)	τ (MPa)
1	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	0	0,08	0
2	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	$1{,}8 \times 10^{-3}$	0,07	0,91
3	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	3,6	0,06	1,56
4	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	5,4	0,05	1,95
5	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	7,2	0,04	2,08
6	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	9,0	0,03	1,95
7	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	10,8	0,02	1,56
8	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	12,6	0,01	0,91
9	20×10^3	$30{,}72 \times 10^{-6}$	0,09	14,4	0	0

568 Demostrar que el esfuerzo cortante en la línea neutra de una sección circular es $\tau = \frac{4}{3}(V/\pi r^2)$ suponiendo que se distribuye uniformemente en toda su longitud

Resolución

Sabemos que $\tau = \frac{V}{Ib}A\,\bar{y}$



$I = \frac{\pi r^4}{4}$

$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

$b = 2r$

$A = \pi r^2/2$

Reemplazando

$\tau = \frac{V}{\frac{\pi r^4}{4}(2r)}\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{4V}{3\pi r^2}$

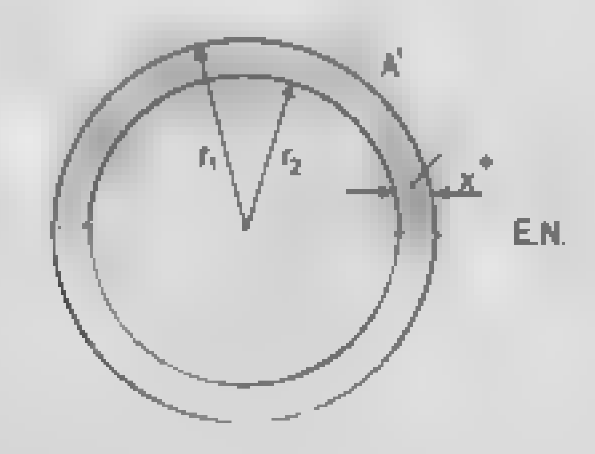
$$\boxed{\tau = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi r^2}}$$

569 Demostrar que el esfuerzo cortante máximo en una viga de sección tubular de paredes delgadas y de sección A es $\tau = 2V/A$

Resolución:

Para una sección tubular tenemos

$$\tau = \frac{V}{Ib} A \bar{y}$$



El esfuerzo cortante máximo estará en E.N.
Tenemos los siguientes valores

$$I = \frac{\pi}{4}(r_1^4 - r_2^4)$$

$$A = \frac{\pi}{2}(r_1^2 - r_2^2)$$

$$b = 2(r_1 - r_2)$$

$$\bar{y} = \frac{4}{3\pi}\frac{(r_1^3 - r_2^3)}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

Como $\tau = \dfrac{A\bar{y}V}{Ib}$

Así

$$\tau = \frac{\frac{\pi}{2}(r_1^2 - r_2^2)\,\frac{4}{3\pi}\frac{(r_1^3 - r_2^3)}{r_1^2 - r_2^2}\,V}{\frac{\pi}{4}(r_1^4 - r_2^4)\,2(r_1 - r_2)}$$

Simplificando

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{(r_1^2 + r_2^2)(r_1^2 - r_2^2)}V$$

Como $t = r_1 - r_2$ tenemos

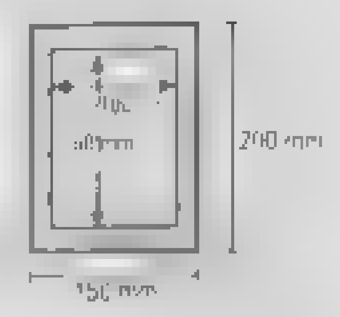
$$\tau = \frac{4}{3A}\left(\frac{3r_1^2 - 3r_1 t + t^2}{2r_1^2 - 2r_1 t + t^2}\right)V$$

además t es pequeño, podemos afirmar que $t^2 \approx 0$

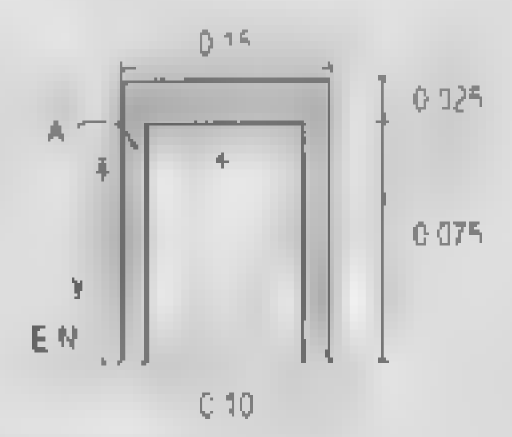
$$\tau = \frac{4}{3A}\left(\frac{3r_1^2 - 3r_1 t}{2r_1^2 - 2r_1 t}\right)V$$

$$\tau = \frac{2V}{A}$$

570 Una viga simplemente apoyada de 4 m de claro tiene la sección indicada en la figura. Determinar la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a todo lo largo de la viga, si el esfuerzo está limitado a 1,2 MPa.



Resolución



Para una viga simplemente apoyada

$V = wL/2 = 2w$ N

Además $\tau = \dfrac{V}{Ib}Q$

Donde

$$I = \frac{1}{12}(0.15 \times 0{,}2^3 - 0{,}1 \times 0{,}15^3) = 71\,875 \times 10^{-8}$$

$$b = 0.15 - 0{,}10 = 0\,05\ m$$

Para calcular Q:

$Q = A\,\bar{y}$

$A = (0\,15)(0{,}1) - (0.1)(0\,075)$

$A' = 7\,5 \times 10^{-3}\ m^2$

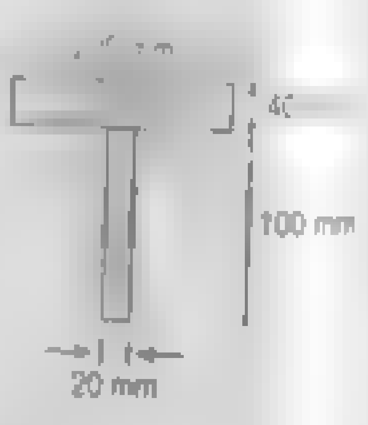
$$\bar{y} = \frac{(0{,}15)(0{,}1)(0{,}05) - (0{,}1)(0{,}075)(0{,}0375)}{7{,}5 \times 10^{-3}} \Rightarrow \bar{y} = 0{,}0625$$

$$Q = (7{,}5 \times 10^{-3})\,(0\,0625) = 468\,75 \times 10^{-6}\ m^3$$

$$\tau_{máx} = \frac{2w}{(71\,875 \times 10^{-8})(0{,}05)}(468{,}75 \times 10^{-6}) \le 1{,}2 \times 10^{6}$$

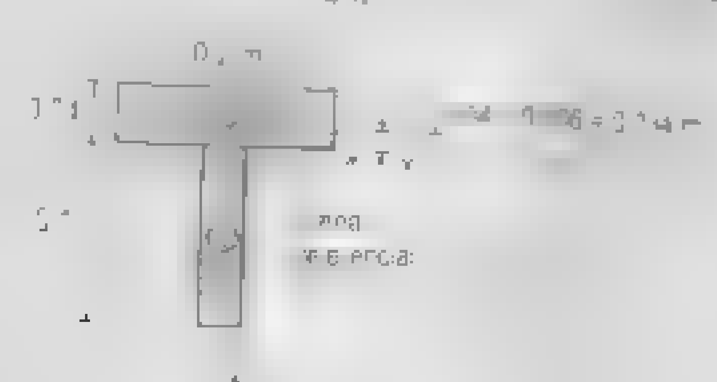
$\Rightarrow$ $w \le 4600$ N/m $\therefore$ $\boxed{w = 4\,6\ kN/m}$

5. [illegible] dera. La viga está sometida a una fuerza cortante máxima de 60 kN. Demuestre que la línea neutra está localizada 34 mm abajo del borde superior y que $I_{E.N} = 10.57 \times 10^6\ mm^4$. Usando estos valores, determine el esfuerzo cortante (a) en el eje neutro y (b) en la unión entre las dos piezas.



Resolución:

Para determinar la línea neutra y $I_{E.N}$, colocamos una referencia en la unión



$\bar{y}$ 0,006 m

[illegible] $\times 10$ [illegible]

			$(A_i)(\bar{y})$	I_i	[illegible]
				67×10^{-6} 67×10^{-6}	$1\,568\times10^{-6}$ $6{,}272\times10^{-6}$
					$7\,84\times10$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\,\bar{y}}{\Sigma(A)} = \frac{[illegible]\ 10^{-6}}{10\times10^{-3}} = 0{,}006\ m$$

$$I = \Sigma I + \Sigma A(\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

$$I = 10\,574 \times 10^{-6}$$

Calculamos el esfuerzo en el eje neutro $\tau = \frac{V}{Ib}Q$

Tenemos

$b = 0\,2$ m

$Q = A\,\bar{y}$

$A' = (0{,}2)\,(0.034) = 6{,}8 \times 10^{-3}$ m

$\bar{y}' = 0{,}034/2 = 0{,}017$ m

$$\tau = \frac{60\times10^{3}}{(10.57\times10^{-6})(0{,}2)}(6\,8 \times 10^{-3})(0.017) = 3{,}28$$

$\tau = 3\,28$ MPa

Para el esfuerzo en la unión

$b = 0{,}2$ m ó 0,02 m (justo debajo)

$A = (0\,2)(0.04) = 8 \times 10^{-3}\ m^2$

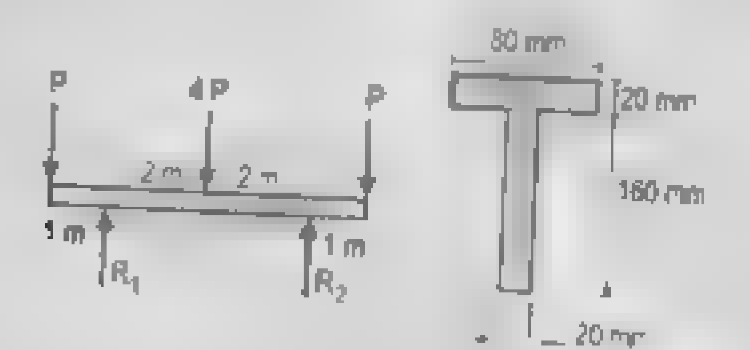
$\bar{y} = 0{,}04/2 - 0\,006 = 0{,}014$ m

$$\tau = \frac{60\times10^{3}}{(10\,57\times10^{-6})(0{,}2)}(8\times10^{-3})(0.014) \Rightarrow \tau = 3\,18\ MPa$$

Para $b = 0.02$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = 31\,8\ MPa}$

$A' = (0\,2)(0.04) = 8 \times 10^{-3}\ m^2$

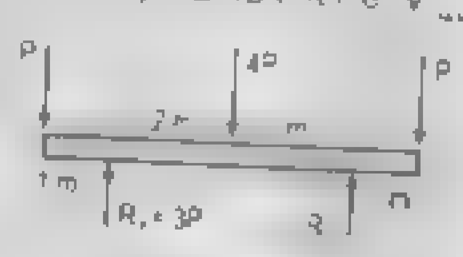
572 En la figura si P = 5 kN calcular el esfuerzo cortante en puntos a distancias de 20 en 20 mm desde el borde superior de la sección de máxima V. La línea neutra está a 70 mm del borde superior e $I_{LN} = 15{,}52 \times 10^6$ mm^4



Resolución.

Del esquema de cargas determinamos el D.F.C. para obtener el $V_{máx}$

$I = 15.52 \times 10^6$ mm^4

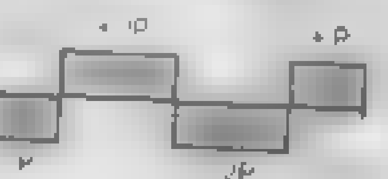


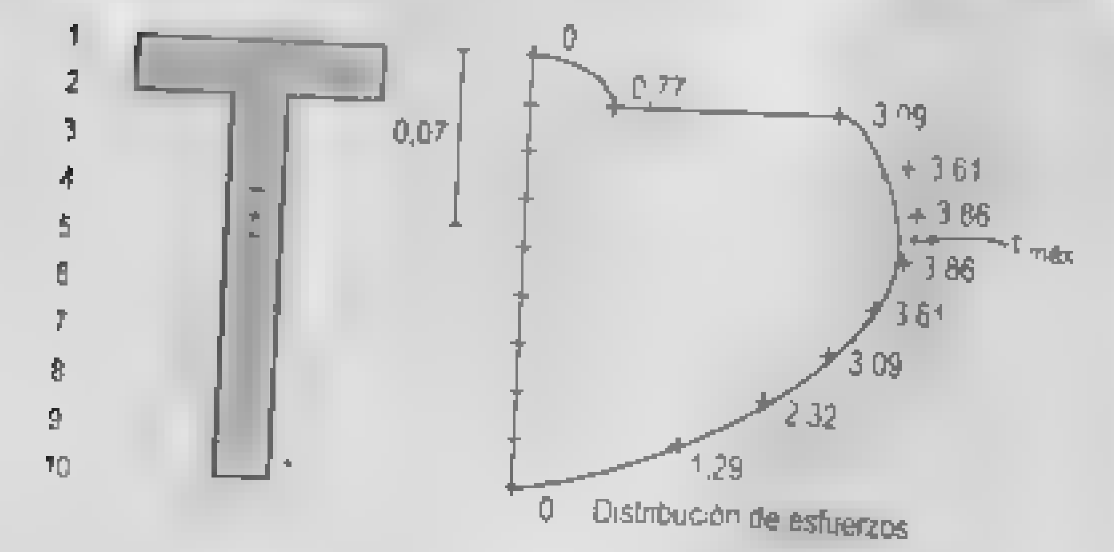
Obtenemos

$V_{máx} = 2P$

$= 10$ kN

Luego: $\tau = \dfrac{V}{Ib}\bar{y}A'$





Para el nivel (1) (superior):

A = 0

y = 0.07 $\quad \tau = 0$

b = 0.08 ó b' = 0.02

Para el nivel (2):

$A = 0.08\,(0.02) = 1.6 \times 10^{-3}$ m^2

$y = 0.07 - 0.02/2 = 0{,}06$ m

$b = 0.08$

$$\tau = \frac{10\times10^3}{(15.52\times10^{-6})(0.08)}(1{,}6\times10^{-3})(0{,}06) = \boxed{0.77 \text{ MPa}}$$

$$\tau' = \frac{10\times10^3}{(15{,}52\times10^{-6})(0{,}02)}(1{,}6\times10^{-3})(0{,}06) = \boxed{3{,}09 \text{ MPa}}$$

Para el nivel (3):

b = 0.02 m

$A'' = (0{,}02)(0{,}14)$

$\Rightarrow A'' = 2{,}8 \times 10^{-3}$

$\bar{y}'' = 0{,}11 - 0{,}07$

$\Rightarrow \bar{y}'' = 0.04$

$A' = (0{,}08)(0.02) + (0.02)(0.02)$

$\Rightarrow A' = 2.0 \times 10^{-3}$ m^2

$$\bar{y}' = \frac{1}{2.0\times10^{-3}}(0{,}08\times0{,}02\times0{,}06 + 0{,}02\times0{,}02\times0{,}04) = 0{,}056$$

$$\tau = \frac{V}{Ib}A'\bar{y}' = \frac{V}{Ib}A''\bar{y}''$$

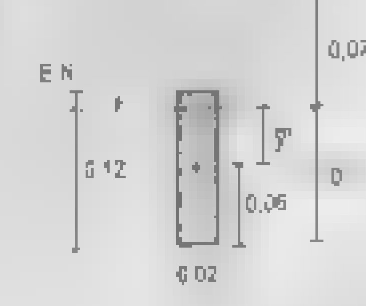
$$\tau' = \frac{10\times10^3}{(15.52\times10^{-6})(0.02)}(2{,}0\times10^{-3})\,(0{,}056) = \boxed{3.61 \text{ MPa}}$$

$$\tau'' = \frac{10\times10^3}{(15.52\times10^{-6})(0.02)}(2{,}8\times10^{-3})\,(0{,}04) = \boxed{3.61 \text{ MPa}}$$

NOTA: El resultado es el mismo si tomamos el área por encima o debajo del nivel de análisis.

Para los siguientes niveles conviene tomar las áreas que están por debajo

Para el nivel (4):



$A = (0{,}02)(0{,}12) = 2{,}4 \times 10^{-3}$ m^2

$\bar{y} = 0{,}11 - 0.06 = 0{,}05$

$b = 0{,}02$

$$t \; [illegible] \; \frac{10\times10^{3}}{(15[illegible]\times10^{-6})(0.02)}(2{,}4\times10^{[illegible]})(0{,}0[illegible])$$

$\therefore$ $|\tau$ [illegible] 3 86 MPa

Para el nivel (5):

A = (0 02)(0 10) [illegible] 2 0 × 10 [illegible] m

$\bar{y}$ [illegible] 0 11 [illegible] 0 05 [illegible] 0 06 m

$$\tau = \frac{10\;10}{(15{,}62\times10^{-6})(0.02)}(2{,}0\times10^{-3})\,(0{,}06)$$

τ = 3 86 MPa

Para el nivel (6).

A' = (0,02)(0.08) = 1,6 × 10⁻³

$\bar{y}'$ = 0,11 – 0,04 = 0 07 m

$$\tau \; [illegible] \; \frac{10\times10^{3}}{15{,}52\;\;10\;[illegible]}(0{,}02)(1{,}6\times10^{-3})\,(0\;07)$$

τ [illegible] 3 61 MPa

Para el nivel (7):

A = (0,02)(0 06) = 1,2 × 10⁻³

$\bar{y}'$ = 0,11 – 0,03 = 0 08 m

b = 0 02 m

$$\tau \; [illegible] \; \frac{10\times10^{3}}{15{,}52\;\;10\;\;\;0\;02}(1\;2\times10\;[illegible]\;0\;08)$$

τ = 3 09 MPa

Para el nivel (8)

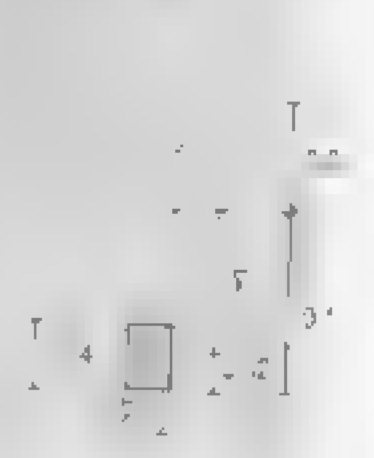
A' = (0,02)(0,04) = 0 8 × 10⁻³

$\bar{y}'$ = 0 11 – 0 02 = 0 09 m

b = 0.02 m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15{,}52\times10^{-6})(0{,}02)}(0{,}8\times10^{-3})\,(0{,}09)$$

$|\tau$ = 2.32 MPa



Para el nivel (9)

A [illegible] 0,02)(0 02) = 0 4 × 10⁻³

$\bar{y}'$ = 0,11 – 0.01 = 0 10 m

b = 0 02 m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15{,}52\times10^{-6})(0{,}02)}(0{,}4\times10^{-3})(0.10)$$

τ = 1 29 MPa

Para el nivel (10)

T[illegible]mos A' = 0 ⇒ $|\tau = 0$

Para calcular el esfuerzo máximo ubicado en la L. N., tomamos el área que e[illegible]á por debajo de ella

A = (0.02)(0 11) = 2,2 × 10⁻³

y' = 0,11/2 = 0,055 m

b = 0,02 m

$$\tau = \frac{10\times10^{3}}{(15\;52\times10^{-6})(0\;02)}(2{,}2\times10^{-3})\,(0{,}055)$$

$\tau = 3\;9\text{ MPa} = \tau_{máx}$

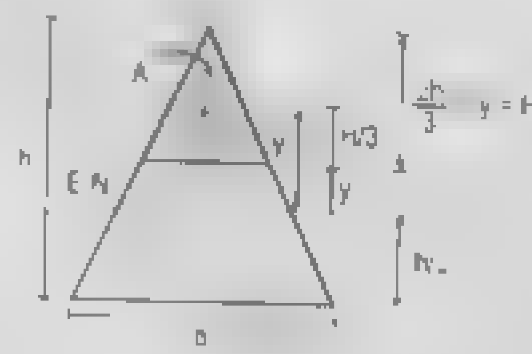
Cuadro Resumen

[illegible]	A' [illegible]	y' [illegible]	b [illegible]	τ MPa
1	0		[illegible]8	
[illegible]	1 6	0 06	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible] 8	0 04	0 02	3 61
[illegible]	2 4	0 [illegible]	0 02	3 86
5	[illegible] 0	0 06	0 02	3 86
6	1 6	0 0[illegible]	0 02	3 [illegible]
[illegible]	1 2	0 08	0 02	[illegible]
[illegible]	0 8	0 09	0 02	2 32
9	0 4	0 10	0 02	1.29
[illegible]	0		0.02	0

573 La sección recta de una viga de madera es un triángulo isósceles con el vértice hacia arriba, de altura h y base b. Si V es el esfuerzo cortante vertical, demostrar también que $\tau_{max} = 3V/bh$ y que tiene lugar en el punto medio de la altura.

Resolución:

Tenemos la siguiente sección



Sabemos $\tau = \frac{V}{It} A\bar{y}$

$$A = \frac{BH}{2} = \frac{b}{2h}\left(\frac{2h}{3} - y\right)^2 \qquad B = \frac{b}{h}H \qquad \bar{y}' = y + \frac{H}{3} = y + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)$$

$$t = B = \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right) \qquad I = \frac{bh^3}{36} \qquad A = \frac{1}{2}\frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right)^2$$

Reemplazando

$$\tau = \frac{V}{\frac{bh^3}{36}\frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - y\right)}\,\frac{b}{2h}\left(\frac{2h}{3} - y\right)^2\left[y + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)\right]$$

$$\tau = \frac{18V}{bh^3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)\left[y + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)\right]$$

$$\tau = \frac{6V}{bh^3}\left[\frac{4h^2}{9} + 2\frac{h}{3}y - 2y^2\right] \qquad \ldots (I)$$

Para calcular el τ_{max}, aplicamos el criterio de la primera derivada

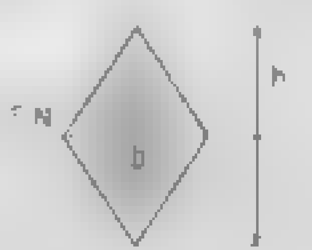
$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{2h}{3} - 4y\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{h}{6}$$

Si sumamos $\frac{h}{3} + \frac{h}{6} = \frac{h}{2}$

Si reemplazamos $y = h/6$ en (I)

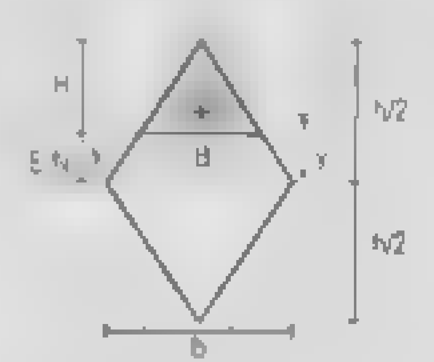
$$\tau_{max} = \frac{6V}{bh^3}\left[\frac{4h^2}{9} + 2\frac{h}{3}\frac{h}{6} - 2\left(\frac{h}{6}\right)^2\right] \qquad \tau_{max} = \frac{3V}{bh}$$

574 En la viga cuya sección muestra la figura, demostrar que el máximo esfuerzo cortante horizontal tiene lugar en un punto a una distancia h/8 por encima o por debajo del E.N.



Resolución.

Seguimos una secuencia similar al problema anterior



Por semejanza

$$B = \frac{b}{h/2}y = \frac{2b}{h}y, \quad H = \frac{h}{2} - y$$

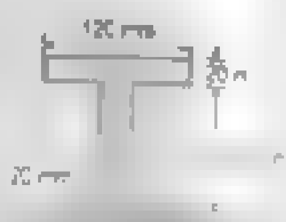
$$A = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\left(\frac{2b}{h}y\right)\left(\frac{h}{2} - y\right); \quad \bar{y}' = y + \frac{H}{3} = y + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

$$t = B = \frac{2b}{h}y; \quad I = 2I_B^A = 2\left[\frac{b(h/2)^3}{12}\right] = \frac{bh^3}{48}$$

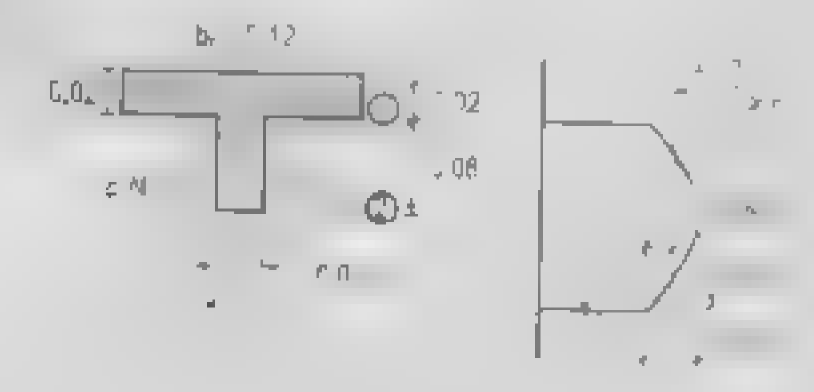
$$\tau = \frac{V}{\frac{bh^3}{48}\,\frac{2b}{h}y}\,\frac{b}{h}y\left(\frac{h}{2} - y\right)\left[y + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{12V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} + \frac{hy}{2} - 2y^2\right) \Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \frac{12V}{bh^3}\left(\frac{h}{2} - 4y\right) = 0 \qquad \boxed{y = \frac{h}{8}}$$

575 Determinar el máximo y el mínimo valor del esfuerzo cortante en el patín de la viga que tiene la sección indicada en la figura si V = 100 kN. Calcular también el tanto por ciento de fuerza cortante que absorbe el patín.



Resolución.



Calculamos los esfuerzos en (1) y (2)

$$I = \frac{1}{12}[(0{,}12)(0{,}2)^3 - (0{,}1)(0{,}16)^3] = 45{,}867 \times 10^{-6}\ m^4$$

Para el nivel (1):

$A' = (0{,}12)(0{,}02) = 2{,}4 \times 10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = 0{,}08 + 0{,}02/2 = 0{,}09\ m$

$t = 0{,}02$

$$\tau = \frac{V}{It}A\bar{y} = \frac{100\times10^3}{(45{,}867\times10^{-6})(0{,}02)}(2{,}4\times10^{-3})(0{,}09)$$

$\tau_{(1)} = 23{,}5\ MPa$

Para el nivel (2):

$A' = (0{,}12)(0{,}02) + (0{,}02)(0{,}08) = 4{,}0 \times 10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = (1/4{,}0 \times 10^{-3})(0{,}12 \times 0{,}02 \times 0{,}09 + 0{,}02 \times 0{,}08 \times 0{,}04) = 0{,}07\ m$

$$\tau_{(2)} = \frac{100\times10^3}{(45{,}867\times10^{-6})(0{,}02)}(4{,}0 \times 10^{-3})(0{,}07) = 30{,}5\ MPa$$

$\tau_{(2)} = 30{,}5\ MPa$

Calculamos el esfuerzo promedio que actúa en el alma

$\tau_{prom} = \tau_{(1)}$ [illegible] $28{,}17$

$\tau_{prom} = 28{,}17\ MPa$

La cortante tomada por el alma es

$V_{alma} = \tau_{prom}(A_{alma}) = 28{,}17\ (0{,}02)(0{,}16) = 90{,}2$

[illegible] ; $\%\ V_{alma} = 90{,}2\ \%$

[illegible] el patín de la viga de la figura del problema anterior tuviera 200 mm en lugar de 160 mm, ¿qué fuerza cortante absorbería?

Resolución

[illegible]zando el esquema anterior

[illegible] $[(0{,}12)(0{,}24)^3 - (0{,}1)(0{,}2)^3] = 71{,}573 \times 10^{-6}\ m^4$

Para el nivel (1)

$A' = (0{,}12)(0{,}02) = 2{,}4 \times 10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = 0{,}1 + 0{,}02/2 = 0{,}11\ m$

$t = 0{,}02$

$$\frac{100\times10^3}{(71{,}573\times10^{-6})(0{,}02)}(2{,}4 \times 10^{-3})(0{,}11) = 18{,}44\ MPa$$

Para el nivel (2)

$A' = (0{,}12)(0{,}02) + (0{,}02)(0{,}1) = 4{,}4 \times 10^{-3}\ m^2$

$$\frac{1}{4{,}4\times10^{-3}}(0{,}12 \times 0{,}02 \times 0{,}11 + 0{,}02 \times 0{,}1 \times 0{,}05) = 0{,}0827\ m$$

$$\frac{100\times10^3}{[illegible]}(4{,}4 \times 10^{-3})(0{,}0827) = 25{,}43\ MPa$$

Ahora calculamos el esfuerzo promedio que actúa en el alma

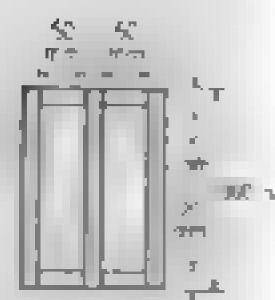
[illegible] $18{,}44 + \frac{2}{3}(25{,}43 - 18{,}44)$

$\Rightarrow\ \tau_{prom} = 23{,}1\ MPa$

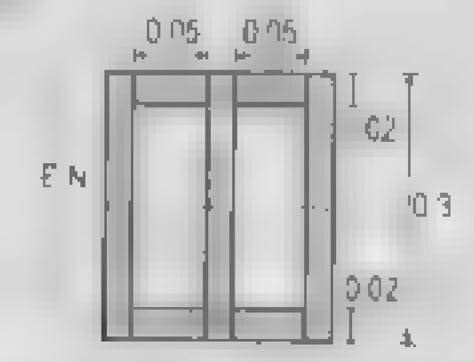
$V_{alma} = (A_{alma})(\tau_{prom}) = (0{,}02 \times 0{,}2)(23{,}1)$

$\Rightarrow V_{alma} = 92{,}4$ kN $\Rightarrow$ % $V_{alma} = 92{,}4\%$

5 Una viga compuesta está formada por láminas de 6 mm separadas por bloques como indica la figura. ¿Qué fuerza cortante producirá un esfuerzo máximo de 1,4 MPa?



Resolución



Este problema podemos resolverlo de dos maneras: una aproximada y otra exacta

I. Primero calculamos $I_{EN} = ?$

$$I = 3\left[\frac{1}{12}(0{,}006)(0{,}3)^3\right] + 4\left[\frac{1}{12}(0{,}05)(0{,}02)^3 + (0{,}05)(0{,}02)(0{,}14)^2\right]$$

$\Rightarrow I = 119{,}03 \times 10^{-6}\ m^4$; $A' = 3(0{,}006)(0{,}15) + 2(0{,}05)(0{,}02)$

$\Rightarrow A' = 4{,}7 \times 10^{-3}\ m^2$; $b = 3(0{,}006) = 0{,}018$ m

$$\bar{y}' = \frac{1}{(4{,}7\times 10^{-3})}[3(0{,}006)(0{,}15)(0{,}075) + 2(0{,}05)(0{,}02)(0{,}14)]$$

$\Rightarrow \bar{y}' = 0{,}103$ m (103 mm)

Luego $Q = A'\bar{y}' = 4{,}8 \times 10^{-4}\ m^3$

$$\tau = \frac{V}{Ib}Q = \frac{V}{(119{,}03\times 10^{-6})(0{,}018)}(4{,}8 \times 10^{-4}) \le 1{,}4 \times 10^6$$

$\Rightarrow V \le 6249$ N $\Rightarrow V_{máx} = 6{,}3$ kN

II. En forma aproximada tenemos:

$$\tau_{prom} = \frac{V}{A_{alma}} = \frac{V}{3(0{,}006)(0{,}26)} \le 1{,}4 \times 10^6$$

$\Rightarrow V \le 6552 \Rightarrow V_{máx} = 6{,}5$ kN $\boxed{V_{máx} = 6{,}5\ kN}$

578 y 579. Problemas ilustrativos.

580 Una viga de sección rectangular $b \times h$ simplemente apoyada sobre un claro L soporta en el centro una carga concentrada P. Expresar $\tau_{máx}$ en función σ_f.

Resolución.

Para un tramo simple con carga en su centro tenemos:

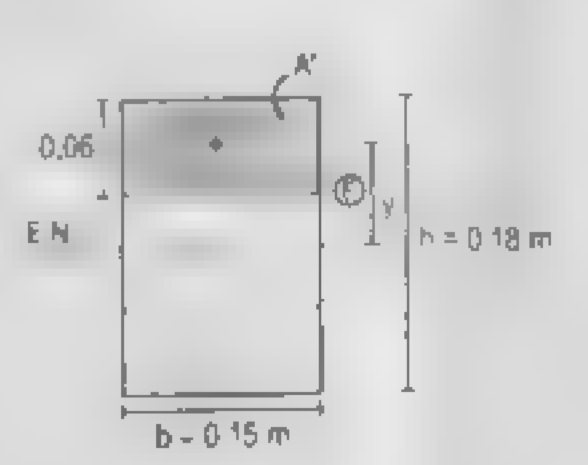
$$\left.\begin{array}{l} V = P/2 \\ M = PL/4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\frac{M}{L} = V \quad \ldots(I)$$

Además $\sigma = \dfrac{6M}{bh^2}$; $\tau_{máx} = \dfrac{3}{2}\dfrac{V}{bh}$

En (I): $\dfrac{2}{L}\left(\dfrac{\sigma_f bh^2}{6}\right) = \tau_{máx}\left(\dfrac{2}{3}bh\right)$ $\tau_{máx} = \sigma_f h/2L$

581 Una viga está formada por tres tablas de sección 150 × 60 mm, encoladas entre sí para formar una sección de 150 mm de ancho por 180 mm de altura. Si el cortante admisible en las juntas es de 600 kPa, el cortante admisible en la madera es 900 kPa y el normal permisible también en la madera vale 8 MPa, determinar la carga máxima uniformemente distribuida que puede resistir la viga sobre un claro de 2 m.

Resolución:



Del enunciado tenemos:

$\tau_E \le 600$ kPa ; $\tau_{máx} \le 900$ kPa; $\sigma_{máx} \le 8$ MPa

I. Para una viga simple con carga uniforme

$$M_{máx} = \frac{1}{8}wL \quad \wedge \quad V_{máx} = \frac{wL}{2}$$

Para $L = 2$ m $\Rightarrow$ $M_{máx} = w/2$ $\wedge$ $V_{máx} = w$

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0{,}15)(0{,}18)^3 = 72{,}9 \times 10^{-6}\ m^4$$

II. Calculamos el esfuerzo en el nivel (E).

$A' = (0{,}15)(0{,}06) = 9 \times 10^{-3}\ m^2$
$\bar{y}' = 0{,}18/2 - 0{,}06/2 = 0{,}06$ m
$b = 0{,}15$ m
$Q = A'\bar{y}' = (9 \times 10^{-3})(0{,}06) = 5{,}4 \times 10^{-4}\ m^3$

Sabemos

$$\tau_E = \frac{V}{Ib}Q = \frac{w}{(72{,}9 \times 10^{-6})(0{,}15)}5{,}4 \times 10^{-4} \le 600 \times 10^3$$

$\Rightarrow w \le 12\ 150$ N/m

III. Para verificar el esfuerzo cortante máximo

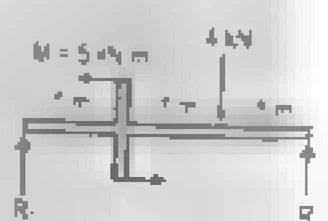
$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3}{2}\frac{w}{(0{,}15)(0{,}18)} \le 900 \times 10^3 \Rightarrow w \le 16\ 200\ N/m$$

IV. Verificamos los esfuerzos normales por flexión en la madera

$$\sigma_f = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(w/2)}{(0{,}15)(0{,}18)^2} \le 8 \times 10^6 \Rightarrow w \le 12\ 960\ N/m$$

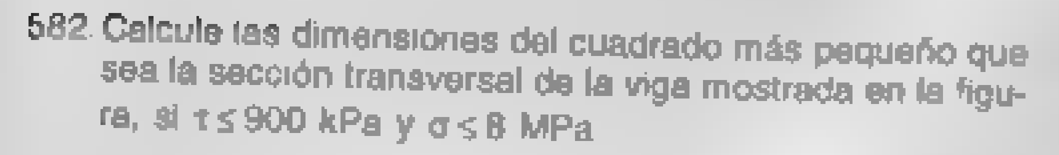
La carga máxima es $\boxed{w = 12{,}15\ kN/m}$

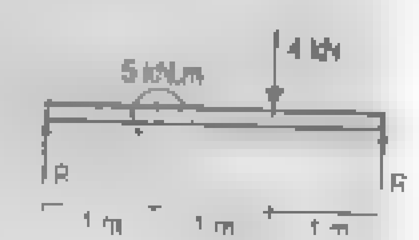
582. Calcule las dimensiones del cuadrado más pequeño que sea la sección transversal de la viga mostrada en la figura, si $\tau \le 900$ kPa y $\sigma \le 8$ MPa



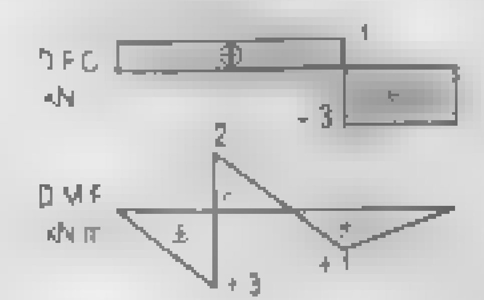
Resolución:

I. Dibujamos el D.F.C. y D.M.F. (verificar)
Para determinar el $V_{máx}$ y $M_{máx}$





Calculamos R_1 y R_2



$\Sigma M = 0$: $3R_2 - 2(4) + 5 = 0$
$R_2 = 1$ kN = (1000 N)
$R_1 = 3$ kN = (3000 N)
$V_{máx} = 3000$ N
$M_{máx} = 3000$ N.m

II. Para el esfuerzo cortante ($\tau \le 900$ kPa) para una sección cuadrada de lado a

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{a^2} = \frac{3}{2}\frac{3000}{a^2} \le 900 \times 10^3$$

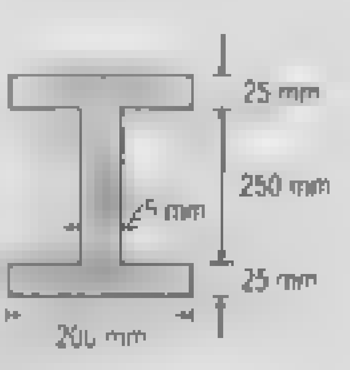
a ≥ 0,071 m

III. El esfuerzo normal por flexión está limitado a: ($\sigma \le 8$ MPa)

$$\sigma = \frac{6M}{a^3} = \frac{6(3000)}{a^3} \le 8 \times 10^6$$

$a \ge 0{,}131$ m $\quad \therefore \quad \boxed{a_{mín} = 0{,}131\ m}$

583. Una viga simplemente apoyada de claro L y carga concentrada P en el centro, tiene una sección como la indicada en la figura. Determinar la relación entre $\sigma_{máx}$ y $\tau_{máx}$.

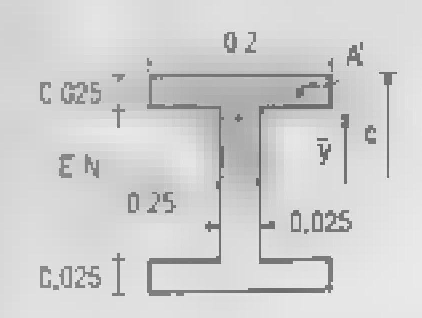


Resolución:

I. De acuerdo al enunciado tendremos los siguientes valores de $V_{máx}$ y $M_{máx}$

$$V_{máx} = \frac{P}{2}; \quad M_{máx} = \frac{PL}{4}$$

II. Evaluamos los esfuerzos cortante y normal
Para toda la sección:



$$I = \frac{1}{12}(0{,}2)(0{,}3)^3 - \frac{1}{12}(0{,}175)(0{,}25)^3$$

$\Rightarrow I = 222{,}135 \times 10^{-6}\ m^4$

Para la sección achurada

$A' = 0{,}2\,(0{,}15) - (0{,}175)\,(0{,}125)$

$\Rightarrow A' = 8{,}125 \times 10^{-3}\ m^2$

$$y' = \frac{1}{8{,}125 \times 10^{-3}}\left[(0{,}2)(0{,}15)(0{,}075) - (0{,}175)(0{,}125)(0{,}0625)\right]$$

$\Rightarrow \bar{y} = 0{,}1087\ m$

$\Rightarrow Q = A'\bar{y} = 8{,}83 \times 10^{-4}\ m^3$

$b = 0{,}025\ m \qquad c = 0{,}15\ m$

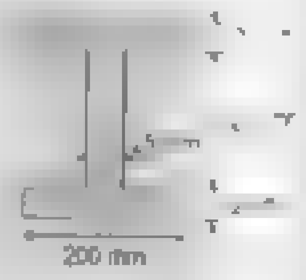
$$\sigma = \frac{Mc}{I} \qquad \frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = \frac{\frac{Mc}{I}}{\frac{V}{Ib}Q} = \frac{Mcb}{VQ}$$

$$\tau_{máx} = \frac{V}{Ib}Q$$

Reemplazando

$$\frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = \frac{(PL/4)(0{,}15)(0{,}025)}{P/2\,(8{,}83 \times 10^{-4})} = 2{,}123\,L \qquad \therefore \boxed{\frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = 2{,}123\,L}$$

584 Una viga compuesta, de madera, de la misma sección que la del problema anterior, se utiliza para soportar una carga P en un punto de un claro de 8 m. Determinar P y su posición de manera que causen simultáneamente $\sigma_{máx} = 8$ MPa y $\tau_{máx} = 1{,}2$ MPa.



Resolución

$$V = P\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$M = Px\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = \frac{8}{1{,}2} = \frac{20}{3}$$

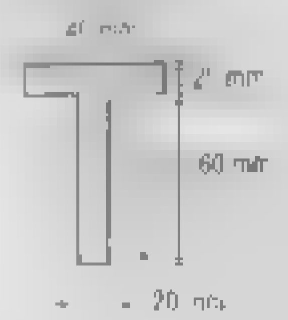
$$\frac{\sigma_{máx}}{\tau_{máx}} = \frac{Mcb}{VQ} = \frac{Px(1 - x/8)(0{,}15)(0{,}025)}{P(1 - x/8)(8{,}83 \times 10^{-4})} = \frac{20}{3} \qquad x = 1{,}57\ m$$

Reemplazando en V: $V = 0{,}8P$

$$\tau_{máx} = \frac{0{,}8P}{(22{,}2135 \times 10^{-6})(0{,}025)}(8{,}83 \times 10^{-4}) \le 1{,}2 \times 10^6$$

$P \le 9434$ N $\quad \therefore \quad \boxed{P_{máx} = 9{,}4\ kN}$

585 Una viga simplemente apoyada de L m de longitud soporta una carga uniformemente distribuida de 16 kN/m a todo su largo y tiene la sección mostrada en la figura. Calcule el valor de L que ocasione un máximo esfuerzo por flexión de 40 MPa. En estas condiciones, ¿cuánto vale el máximo esfuerzo cortante?



Resolución

I. Primero calculamos I y Q de la sección.

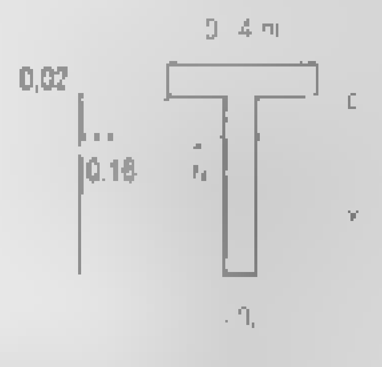
Ubicación de la línea neutra.

$A = (0{,}14)(0{,}18) - (0{,}12)(0{,}16)$

$\Rightarrow A = 6 \times 10^{-3}\ m^2$

$$\bar{y} = \frac{(0{,}14)(0{,}18)(0{,}09) - (0{,}12)(0{,}16)(0{,}08)}{6 \times 10^{-3}}$$

$\bar{y} = 0{,}122\ m$



Calculamos I: $I = \frac{1}{3}(0{,}14)(0{,}18)^3 - \frac{1}{3}(0{,}12)(0{,}16)^3 - 6 \times 10^{-3}(0{,}122)^2$

$\Rightarrow I = 19{,}016 \times 10^{-6}\ m^4$

Calculamos Q: $Q = A'\bar{y}$

$A' = (0{,}02)(0{,}122) = 2{,}44 \times 10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = 0{,}122/2 = 0{,}061\ m$

$\Rightarrow Q = 148{,}84 \times 10^{-6}\ m^3$

II. Por flexión

Para una viga simple el momento máximo es

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8} = \frac{16\,000\,L^2}{8} = 2000\,L^2; \quad c = 0{,}122$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(2000\,L^2)(0{,}122)}{19{,}061 \times 10^{-6}} \le 40 \times 10^6 \Rightarrow L \le 1{,}77\ m \quad \therefore \boxed{L = 1{,}77\ m}$$

III Por cortante

* Para este caso se tomó el área que está por debajo de la L.N. (zona achurada)

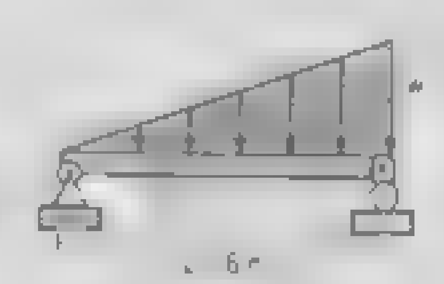
$$\Rightarrow \tau = \frac{14\,160}{(19.061\times 10^{-6})(0.02)}(148.84\times 10^{-6}) = 5.5$$

$\tau = 5.5$ MPa

aumenta uniformemente de cero en un extremo a w N/m en el otro. La sección

y $\tau \le 800$ kPa

Resolución:



I Del enunciado tenemos lo siguiente

$V_{máx} = wL/3 = 2w$

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{9\sqrt{3}} \quad 2.3w$$

Además de problema 577 tenemos: $I = 119\times 10^{-6}$ m^4

Por flexión: $\sigma = Mc/I$, $c = 0.15$ m $\quad Q = 4.8\times 10^{-4}$ m^3

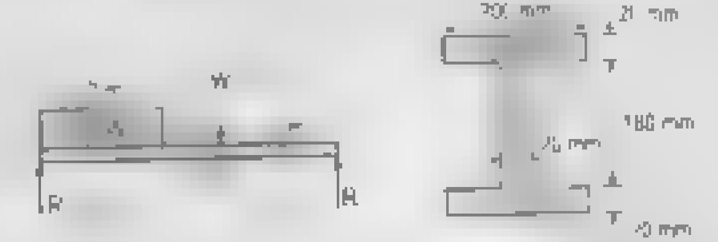
$$\sigma = \frac{(2.3\,w)(0.15)}{119\times 10^{-6}} \le 10\times 10^6 \Rightarrow w \le 3.45 \text{ kN/m}$$

Por cortante: $\tau = VQ/Ib$; $b = 0.018$ m

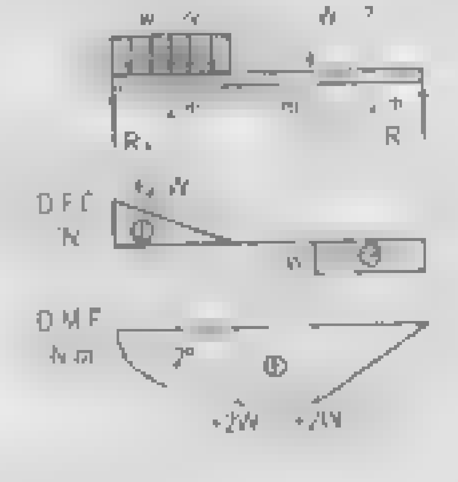
$$\tau = \frac{(2w)(4.8\times 10^{-4})}{(119\times 10^{-6})(0.018)} \le 0.8\times 10^6$$

$\Rightarrow w \le 1.785$ kN/m $\quad \therefore$ $w = 1.785$ kN/m

sostiene una carga concentrada W y una ... de valor total 2W. Determine el valor máximo de W ... MPa ... 1.4 MPa



Resolución.



Dibujamos el D.M.C. y D.M.F. (verificar) para determinar $V_{máx}$ y $M_{máx}$

Calculamos R_1 y R_2

$\Sigma M = 0$

$5(R_2) - (3)(W) - 1(2W) = 0$

$R_1 = 2W$ kN

II Para la sección calculamos I y Q

$$I = \frac{1}{12}(0.2)(0.22)^3 - \frac{1}{12}(0.18)(0.18)^3$$

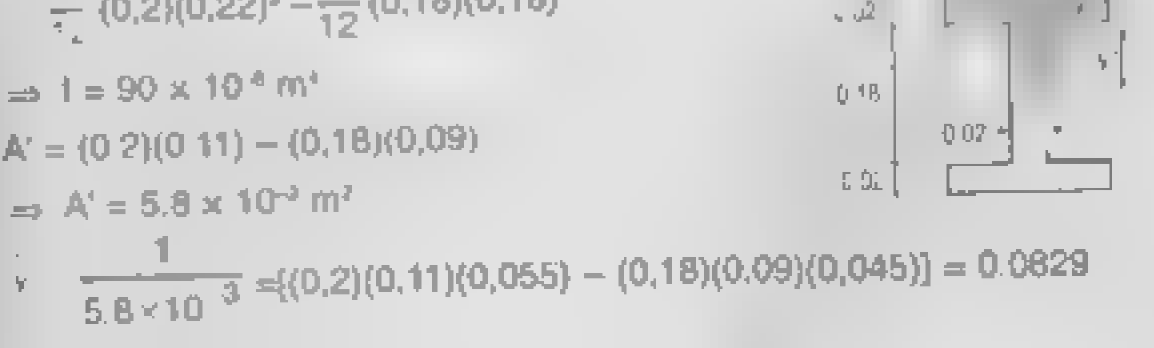
$\Rightarrow I = 90\times 10^{-6}$ m^4

$A' = (0.2)(0.11) - (0.18)(0.09)$

$\Rightarrow A' = 5.8\times 10^{-3}$ m^2

$$\bar{y}' = \frac{1}{5.8\times 10^{-3}}[(0.2)(0.11)(0.055) - (0.18)(0.09)(0.045)] = 0.0829$$

$Q = A'\bar{y}' = 481\times 10^{-6}$ m^3



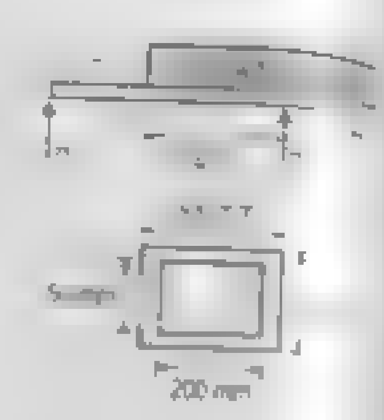
III Verificando los esfuerzos

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{(2W)(0.11)}{90\times 10^{-6}} \le 10\times 10^6 \Rightarrow W \le 4.09$$

$$\tau_{máx} = \frac{V}{Ib}Q = \frac{(2W)(481\times 10^{-6})}{(90\times 10^{-6})(0.02)} \le 1.4\times 10^6$$

$\Rightarrow W \le 2.62 \quad \therefore W = 2.62$ kN

588. La carga distribuida mostrada en la figura está sostenida por una viga en caja cuyas dimensiones se muestran en la misma figura. Determine el valor máximo de w que no produzca un esfuerzo normal por flexión mayor que 14 MN/m² ni esfuerzo tangencial mayor que 1,2 MN/m²



Resolución:

I. Dibujamos el D.F.C. y D.M.F (verificar) para determinar $V_{máx}$ y $M_{máx}$

Calculemos R_1 y R_2:

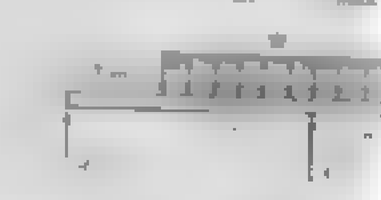
$\sum M = 0$: $3(R_2) - 2,5(3w) = 0$

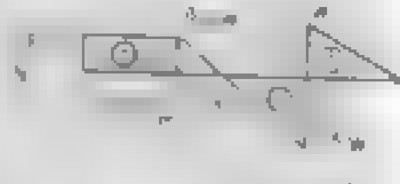
$\Rightarrow R_2 = 2,5w$

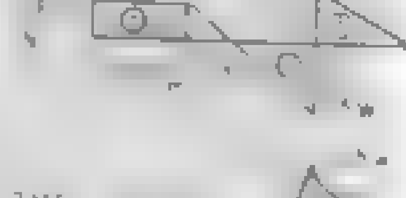
$\Rightarrow R_1 = 0,5w$

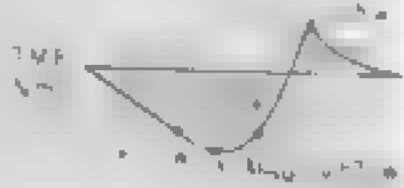
$V = 1,5w$

$M_{máx} = 0,625w$









II. Para la sección transversal tenemos

$I = \frac{1}{12}(0,3)(0,25)^3 - \frac{1}{12}(0,2)(0,15)^3$

$\Rightarrow I = 334,4 \times 10^{-6}\ m^4$

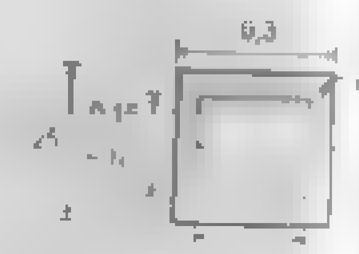
$A' = (0,3)(0,125) - (0,2)(0,075)$

$\Rightarrow A' = 22,5 \times 10^{-3}\ m^2$

$\bar{y}' = \frac{1}{22,5 \times 10^{-3}}[(0,3)(0,125)^2/2 - (0,2)(0,075)^2/2]$

$\Rightarrow \bar{y}' = 0,079\ m$

$Q = A'\ \bar{y}' = 17,8 \times 10^{-4}\ m^3$



III. Evaluando los esfuerzos máximos

Por flexión $\sigma = Mc/I \leq \sigma_{adm} = 14$ MPa

$$\sigma = \frac{(0,625w)(0,125)}{334,4 \times 10^{-6}} \leq 14 \times 10^6$$

$w \leq 59.924$ N/m

Por cortante: $\tau = VQ/Ib \leq \tau_{adm} = 1,2$

$$\tau = \frac{(1,5w)(17,8 \times 10^{-4})}{334,4 \times 10^{-6}\ (0,1)} \leq 1,2 \times 10^6$$

$w \leq 15.029$ N/m $\quad \therefore$ $\boxed{w = 15\ kN/m}$

589. Un perfil de canal soporta dos cargas concentradas W y una carga repartida total de 18W, distribuida como indica la figura. Verificar que el E.N. esté situado a 50 mm de la base y que $I_{E.N.} = 15,96 \times 10^6\ mm^4$. Luego use estos valores para determinar el máximo valor de W que no exceda el esfuerzo normal de 30 MPa a tensión y 70 MPa a compresión, ni el cortante de 20 MPa (esfuerzos admisibles)

Resolución

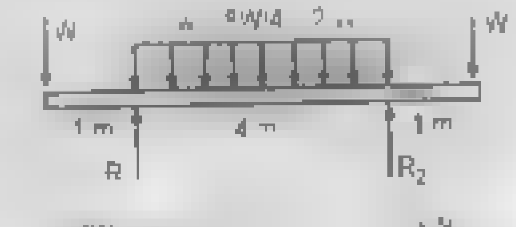
I. Determinamos el $V_{máx}$, $M^{+}_{máx}$ y $M_{máx}$ de los diagramas de flexión y cortante

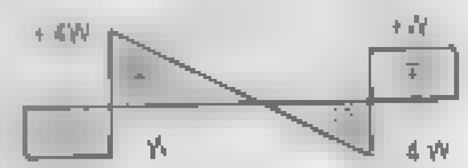
$R_1 = R_2 = \frac{10W}{2} = 5W$

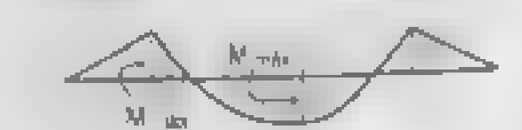
$V_{máx} = 4W$

$M_{máx} = -W$

$M^{+}_{máx} = +3W$







II Analizamos los esfuerzos máximos.

Por cortante

$$\tau = \frac{4W\lfloor(0,04)(0,09)^2/2}{15,96\times10^{-6}\ \ 0,04} < 20\times10^{\cdot}$$

Por flexión:

Momento positivo:

$$\sigma_c = \frac{3W\ 0,0\cdot}{5,96\ \ 10^{-6}}\ \ 70\ \ 0^6 \Rightarrow W\ \ 4,14\ kN$$

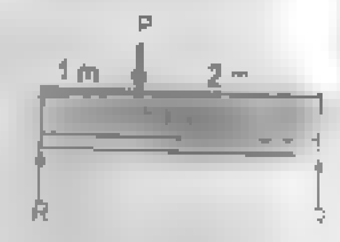
$$\sigma_t = \frac{3W(0,05)}{(15,96\ \ 10^{-6})} \leq 30\times10^6 \Rightarrow w \leq 3,19\ kN$$

Momento negativo:

$$\sigma = \frac{W\ 0,05}{15,96\ \ 10^{-6}} \leq 70\times10^6 \Rightarrow w \leq 22,34\ kN$$

$$\sigma = \frac{W\ 0,09}{15,96\ \ 10^{-6}}\ \ 30\ \ 10^6\ \ \ W\ \ 5,32\ kN\ \ \ \ W\ \ \ 1\ kN$$

590 Una viga de sección rectangular de 150 mm de ancho por 250 mm de altura, soporta una carga uniformemente distribuida de 8 kN/m y una concentrada P como se muestra en la figura. Determine el máximo valor de P si σ ≥ 10 MPa y τ ≤ 1,2 MPa



Resolución:

I Del análisis tenemos el valor de $V_{máx}$

$$V_{máx} = \frac{wL}{2} + \frac{Pb}{L} = \frac{8000(3)}{2} + \frac{P(2)}{3} = 12\,000 + 2P/3$$

$$M_{máx} = R_1(1) - w\frac{(1)^2}{2} = 12\,000 + 2\frac{P}{3} - 4000 = 8000 + \frac{2P}{3}$$

$$M'_{máx} = R_2(1,5) - w\frac{(1,5)^2}{2} = 18\,900 + \frac{P'}{2} - 9000 = 9000 + \frac{P'}{2}$$

II Veamos los esfuerzos: b = 0,15 m h = 0,25 m

Por cortante: $\tau = \frac{3\ V}{2\ bh}$

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{12\,000\ \ 2P\ 3}{(0,15)(0,25)}\ \ 1,2\times10^6 \Rightarrow P < 27\,000\ N$$

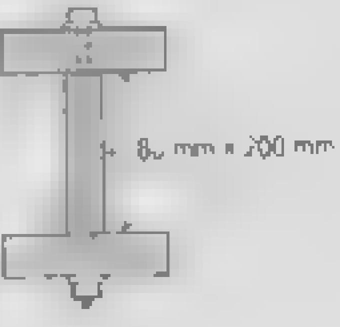
Por flexión: σ = 6M/bh

$$\sigma = \frac{6\ 8000\ \ 2P\ 3}{(0,15)\ \ ,25}\ \ 10\ \ 10^6 \Rightarrow P\ \ 11\,437\ N$$

También P 13 250 N P 11,4 kN

31 P ... positivo

592 Se construye una viga de sección I con tres tablones de 80 x 200 mm dispuestos como indica la figura, y hechos solidarios mediante pernos pasantes. Si cada uno puede resistir una fuerza cortante de 8 kN determinar su espaciamiento cuando la viga se carga de manera que se produzca un esfuerzo cortante máximo de 1,2 MPa



Resolución:

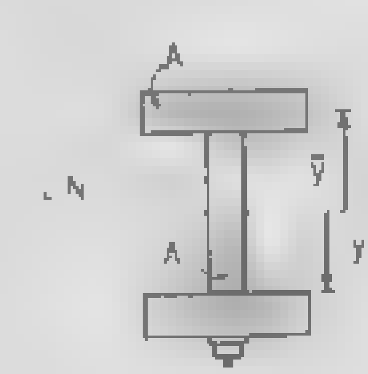
Calculamos Q e I

A' = 0,08 x 0,2 = 0,016 m²

$\bar{y}' = 0,1 + 0,04 = 0,14$ m

$Q = A\bar{y}' = (0,016)(0,14)$

$\Rightarrow Q = 224\times10^{-5}$ m³



$$I = \frac{1}{12}(0,2)(0,36)\ \ \frac{1}{12}(0,12\ \ 0,2$$

$\Rightarrow I = 69,76\times10^{-5}$ m⁴

I Calculamos V τ = VQ/It

A = (0,2)(0,18) – (0,12)(0,1) = 0,024 m²

$$\bar{y} = \frac{(0,2)(0,18)(0,09)\ \ (0,12)(0,1)(0,05)}{0,024} = 0,11\ m$$

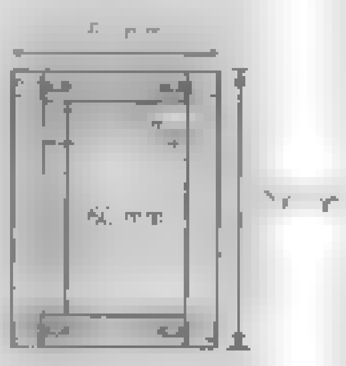
$Q' = A\bar{y} = (0{,}024)(0{,}11) = 264 \times 10^{-5}\ m^3$

$$\tau = \frac{V(264\times10^{-5})}{(69{,}76\times10^{-6})(0{,}08)} = 1{,}2\times10^{6}\ ,\ V = 25{,}37\ kN$$

III. Calculamos $e = \frac{RI}{VQ}$, R = 8 kN

$$e = \frac{8(69{,}76\times10^{-6})}{(25{,}37)(224\times10^{-5})} = 0{,}0982\ m \qquad \therefore\ \boxed{e = 98{,}2\ mm}$$

593. Una viga en caja construida como se indica en la figura, se asegura mediante tornillos espaciados a 100 mm. La viga simplemente apoyada soporta una carga concentrada P en el tercio de un claro de 3 m. Determinar el valor máximo de P de manera que no sobrepase el esfuerzo cortante de 800 kPa en la viga, ni la fuerza cortante de 1 200 N en los tornillos. ¿Cuál será entonces el esfuerzo normal máximo en la viga?



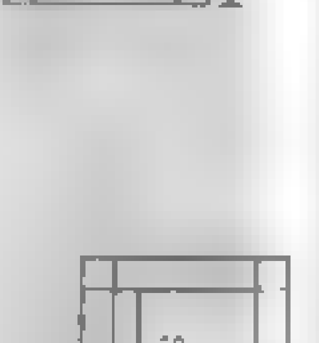
Resolución.

El cortante es V = 2P/3

I. Esfuerzo cortante

$A = (0{,}16)(0{,}1) - (0{,}12)(0{,}08)$

$= 0{,}0064\ m^2$



$$\bar{y} = \frac{(0{,}16)(0{,}1)(0{,}05) - (0{,}12)(0{,}08)(0{,}04)}{0{,}0064}$$

$\Rightarrow \bar{y} = 0{,}065\ m$

$Q = A\bar{y} = (0{,}0064)(0{,}065) = 416 \times 10^{-6}\ m^3$

$I = \frac{1}{12}(0{,}16)(0{,}2)^3 - \frac{1}{12}(0{,}12)(0{,}16)^3 = 65{,}7 \times 10^{-6}\ m^4$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{\frac{2P}{3}(416\times10^{-6})}{(65{,}7\times10^{-6})(0{,}04)} \le 800\times10^{3}$$

$P \le 7{,}58$ kN

II. Fuerza cortante en los tornillos:

$e = 100\ mm = 0{,}1\ m$

$Q = (0{,}12)(0{,}02)(0{,}09) = 216 \times 10^{-6}\ m^3$

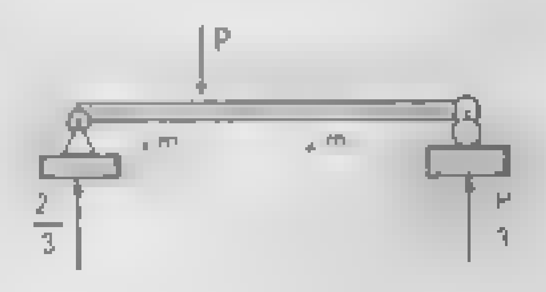
$R = 1200(2) = 2400\ N$

$$R = \frac{eVQ}{I} = \frac{0{,}1(2P/3)(216\times10^{-6})}{65{,}7\times10^{-6}} \le 2400$$

$P = 10{,}95$ kN $\qquad$ $\underline{P = 7{,}58\ kN}$

III. Esfuerzo normal

$\sigma = \frac{Mc}{I}$



$M = 2P/3$

M = 5 [illegible] N·m

$\sigma = \frac{5[illegible](0{,}1)}{65{,}7\times10^{-6}} = 7{,}69\ MPa$

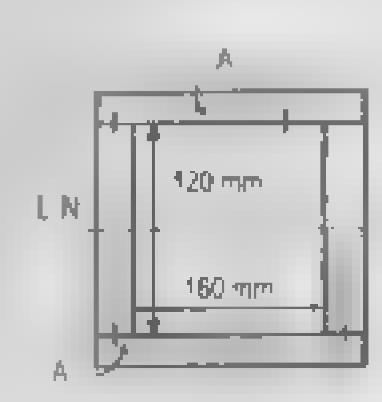
$\therefore\ \boxed{\sigma = 7{,}69\ MPa}$

[illegible] Sobre una viga simplemente apoyada de 4m de claro se aplica una carga [illegible] uniformemente de w N/m. La sección de la viga es la de la figura del problema anterior, pero girada un cuarto de vuelta. Determinar el valor máximo de w si $\sigma \le 10$ MPa, $\tau \le 800$ kPa y los tornillos tienen una resistencia al cortante de 800 N y una separación de 50 mm.

Resolución.

[illegible]amos: Q, I e Q'

$A' = (0{,}2)(0{,}08) - (0{,}16)(0{,}06) = 0{,}0064\ m^2$



$$\bar{y}' = \frac{0{,}2(0{,}08)(0{,}04) - (0{,}16)(0{,}06)(0{,}03)}{0{,}0064}$$

$\Rightarrow \bar{y}' = 0{,}055\ m$

$Q' = A'\bar{y}' = (0{,}0064)(0{,}055) = 352 \times 10^{-6}\ m^3$

$Q = (0{,}2)(0{,}02)(0{,}07) = 280 \times 10^{-6}\ m^3$

$I = \frac{1}{12}(0{,}2)(0{,}16)^3 - \frac{1}{12}(0{,}16)(0{,}12)^3 = 45{,}23 \times 10^{-6}\ m^4$

I. Analizando por flexión: $\sigma_f = \frac{Mc}{I}$

Para una viga simplemente apoyada y con carga w uniforme en tod aro

$M \; \frac{1}{8}wL = \frac{1}{8}w(4) \quad 2w$

$c \quad 0{,}08$ m

$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{2w(0.08)}{45.23\times10^{-6}} \leq 10\times10^{6}$

$w \leq 2.83$ kN/m

II. Analizando por cortante $\cdot \frac{VQ}{It}$

$V = wL/2 = 2w$, $t = 2(0{,}02) = 0{,}04$

$\tau \quad \frac{2w \quad 1 \quad 6}{45 \quad 1 \quad 6} \leq 800 \times 10^{3} \Rightarrow w < 2.05$ kN/m

III. Analizando los tornillos. $R = \frac{eVQ}{I}$

$e = 50$ mm $= 0{,}05$ m, $V = 2w$

$R \quad \frac{w \quad 280 \quad 10^{-6}}{45.23 \quad 1} \leq 2(800)$

$w \leq 2.58$ kN/m $\qquad w \quad 2.05$ kN/m

595. Una viga de 6 m de claro soporta una carga P a la mitad del mismo. La viga está formada por cuatro tablas de 50 x 150 mm atornilladas como indica la figura. Si el esfuerzo máximo σ ha de ser 9 MN/m², calcular la separación de tornillos si cada uno resiste 800 N

Resolución:

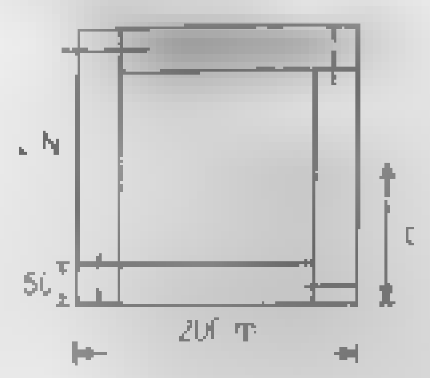
Del enunciado tenemos

$M_{máx.} = PL/4 = 3P/2$

$V_{máx.} = P/2$

Además de la sección transversal

$\frac{1}{12} \; 0 \quad - \frac{1}{12}(0{,}1)^4 = 125 \times 10^{-6}$ m⁴



Para la parte sombreada

$Q = (0{,}15)(0{,}05)(0{,}075)$

$= 562.5 \times 10^{-6}$ m³

Evaluamos por flexión.

$\sigma \quad \frac{Mc}{I} = \frac{(3P/2)(0{,}1)}{125\times10^{-6}} \leq 9 \times 10^{6}$

$P \quad N$

Calculamos el espaciamiento del tornillo:

Tomamos $P = 7500$ N

$V = P/2 = 3750$

$R = 2(800) = 1600$ N

$e \quad \frac{RI}{VQ} = \frac{1600(125\times10^{-6})}{(3750)(562.5\times10^{-6})} \quad 0.0948 \qquad e = 94.8$ mm

Si consideramos los resultados del problema 562 por flexión tenemos una fuerza actuando en la zona sombreada

$F = (\sigma/c)\underbrace{A\,\bar{y}}_{Q} = (\sigma/c)Q$

$\Rightarrow F \quad 9 \times 10^{6}/0.1)(562.5 \times 10^{-6})$

$\Rightarrow F \quad 50\,625$ N

Esta fuerza debe ser sostenida por los tornillos

$R \quad eF \qquad e = \frac{R}{F} \quad \frac{1600}{\quad 625} = 0.0316$

$e \quad 31.6$

$e \quad 31.6$ mm

596 Tres tablones de 100 x 150 mm, dispuestos como se indica en la figura y asegurados mediante pernos pasantes espaciados a 0,4 m forman una viga compuesta, simplemente apoyada, de 6 m de claro con una carga concentrada P en su centro. Si P produce un $\sigma_{máx}$ = 12 MPa, determinar el diámetro de los pernos suponiendo que la fuerza cortante entre los tablones se trasmite solamente por fricción. Los pernos se pueden someter a un esfuerzo de 140 MPa a tensión y el coeficiente de rozamiento entre las piezas es de 0 40

Resolución:

$M = PL/4 = 3P/2$
$V = P/2$

Para toda la sección

$$\frac{1}{12}(0.15)(0.3)^3 = 337.5 \times 10^{-6}$$

Para la parte sombreada

$$Q = (0,15)(0,1)(0,1) = 1500 \times 10^{-6}$$

Calculamos P por flexión

$$\frac{Mc}{I} = \frac{(3P/2)(0.15)}{337.5 \times 10^{-6}} \le 12 \times 10^6 \Rightarrow P \le 18\,000\text{ N}$$

Evaluando por cortante

$V = P/2 = 9000$ N

$$F = \frac{VQ}{I}e = \frac{9000(1500 \times 10^{-6})}{337.5 \times 10^{-6}}(0,4) = 16\,000\text{ N}$$

Esta fuerza tiene que ser resistida por la fricción

$f = \mu N$ Donde. μ = coef. fricción
N = normal = tensión

$$N = \frac{f}{\mu} = \frac{F}{\mu} = \frac{16\,000}{0.4} = 40\,000\text{ N}$$

Además. $N = F_s A_p = F_s(\pi d^2/4) = 140 \times 10^6 \frac{\pi}{4} d^2$

$\Rightarrow d = 0.019$ m = 19 mm

Si consideramos la fuerza actuante en la zona sombreada.

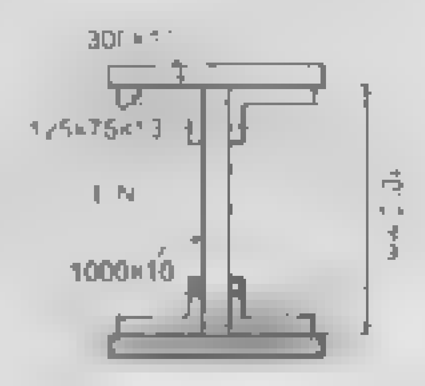
$F' = (\sigma/c)\,Q = (12 \times 10^6 / 0,15)(1500 \times 10^{-6})$

$\Rightarrow F' = 20\,000$ N

$$N = \frac{F'}{\mu} = \frac{20\,000}{0.4} = 50\,000\text{ N}$$

Luego: d = 0 021 m = 21 mm d 19 mm

597 Se construye una viga compuesta, con ángulos de 125 x 75 x 13 mm remachados a una placa de 1000 x 10 mm por sus lados cortos, formando una sección de altura total 1020 mm como indica la figura. Dos placas, cada una de 300 x 10 mm, se remachan a los ángulos para aumentar la sección de los patines, de manera que la altura total alcanza el valor de 1040 mm. El momento de inercia de la sección completa con respecto al E N es de 4770 x 10^6 mm^4. Utilizando los mismos esfuerzos admisibles del problema ilustrativo 591, determinar el espaciamiento entre los remaches de 22 mm de diámetro que han de unir los ángulos de alma en una sección en la cual V = 450 kN



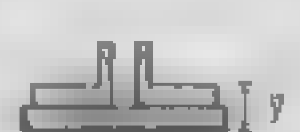
$I = 4770 \times 10^{-6}$ m^4
V = 4 50 kN
d = 22 mm

Resolucion

Calculamos Q: $Q = A'\bar{y}'$

Angulo: A = 2430 mm^2
x = 18 9 mm
Plancha. A = 3000 mm^2

$$\bar{y} = \frac{0.003(0.005) + 2(0.00243)(0.0289)}{0.003 + 2(0.00243)} = 0.0197$$



$\bar{y}' = 1,04/2 - 0.0197 = 0,5$ m
$A' = 0.003 + 2(0,00243) = 0.00786$
$\Rightarrow Q = 3930 \times 10^{-6}$ m^3

La resistencia del remache a doble cortante

$R = (A_R\,\tau)(2) = \frac{\pi}{4}(0,022)^2(100 \times 10^6)(2)$
R = 76 kN

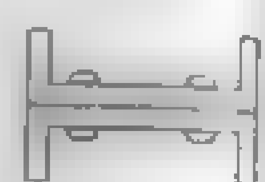
La resistencia al aplastamiento.

$R_b = (dt)\sigma_b = (0.022)(0,01)(280 \times 10^6)$
$R_b = 61,6$ kN

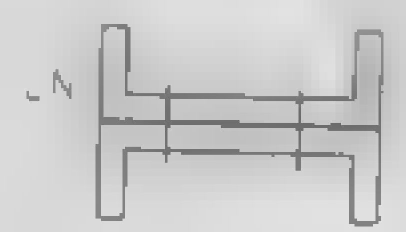
Tomamos el menor valor: $R = 61,6$ kN

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{(61,6\times10^3)(4770\times10^{-6})}{(450\times10^3)(3930\times10^{-6})} = 0,166 \qquad e = 166 \text{ mm}$$

598 Dos perfiles C380 x 60 se unen como indica la figura, mediante pares de remaches de 19 mm de diámetro, espaciados 200 mm a lo largo de la viga. Calcular la fuerza cortante máxima V que podrá soportar esta sin que se excedan los esfuerzos dados en el problema 591



Resolución:



Para el perfil C380 x 60

$A = 7571$ mm
$x = 19,7$ mm
$I_y = 3,94 \times 10^6$ mm^4

Calculamos Q y I_{EN}

$Q = (0,00757)(0,0197) = 149 \times 10^{-6}$ m^3
$I = 2(I_y + Ax^2)$ por Steiner
$= 2(3,94 \times 10^{-6} + 0,00757 \times 0,0197^2) = 13,75 \times 10^{-6}$ m^4

La resistencia del remache a cortante simple

$R = (A.\tau)(2) = \frac{\pi}{4}(0.019)^2(100 \times 10^6)(2) = 56,7$ kN

y la resistencia al aplastamiento contra el alma:

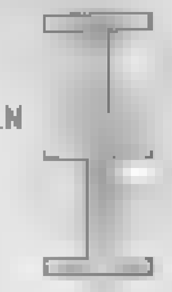
t: espesor del alma = 13.2 mm

$R_b = (dt)\,\sigma_b = (0,019)(0,0132)(220 \times 10^6) = 55.2$ kN

Tomamos el menor valor de resistencia $R = 55,2$ kN

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{(55,2\times10^3)(13,75\times10^{-6})}{V(149\times10^{-6})} = 0,2 \qquad V = 25,5 \text{ kN}$$

599 Se forma una viga uniendo dos I de ala ancha W250 x 73 en la forma indicada en la figura. Se emplea para soportar una carga de 30 kN/m incluido el peso propio, sobre un claro de 8 m. Determinar el esfuerzo máximo por flexión y el espaciamiento de los remaches, que tienen una resistencia al cortante de 26 kN



Resolución.

I. El momento flexionante y la fuerza cortante es
$M = wL^2/8 = (30\,000)(8)^2/8 = 240$ kN m
$V = wL/2 = (30\,000)(8)/2 = 120$ kN

II. Para la sección calculamos Q e I

Para el perfil W250 x 73

$A = 9280$ mm^2
$y = 253/2 = 126,5$ mm
$I_x = 113 \times 10^6$ mm^4
$t_f = 14,2$ mm

$Q = (0,009280)(0,1265) = 1174 \times 10^{-6}$ m^3
$I = 2(I_x + Ay^2)$
$\therefore I = 523 \times 10^{-6}$ m^4

III. Calculamos el esfuerzo máximo por flexión.

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{(240\times10^3)(0.253)}{523\times10^{-6}} = 116 \text{ MPa}$$

$\therefore \boxed{\sigma_{máx} = 116 \text{ MPa}}$

IV. Calculamos el espaciamiento:
$R = 2(26) = 52$ kN

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{(52\times10^3)(523\times10^{-6})}{(120\times10^3)(1174\times10^{-6})} = 0.193$$

$\therefore \boxed{e = 193 \text{ mm}}$

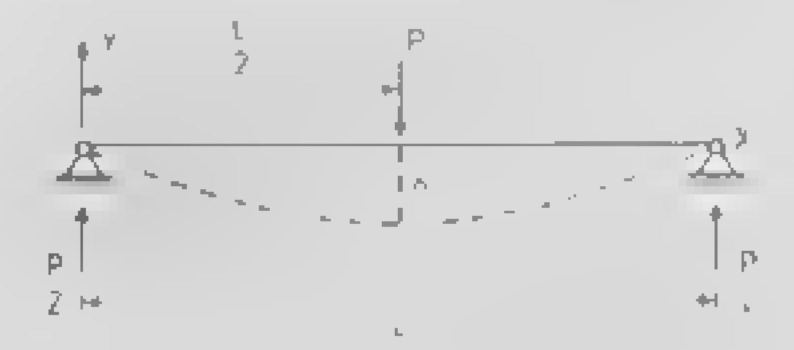
CAPÍTULO 6

DEFORMACIÓN EN VIGAS

602; 603, 604 problemas ilustrativos

Determinar la deflexión máxima en una viga simplemente apoyada, de longitud L, con una carga concentrada P en el centro de su claro

Resolución



En función de la ecuación general de momentos, la ecuación

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{P}{2}\right)x - (P)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle \qquad \ldots(a)$$

Integrando (a): $$EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{P}{4}\right)x^2 - \left(\frac{P}{2}\right)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2 + C_1 \qquad \ldots(b)$$

Integrando (b): $$EIy = \left(\frac{P}{12}\right)x^3 - \left(\frac{P}{6}\right)\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad (c)$$

Para determinar C_2, podemos ver que $x = 0$, $y = 0$ por lo tanto $C_2 = 0$
La otra condición de apoyo es $x = L$, $y = 0$ resulta

[illegible]

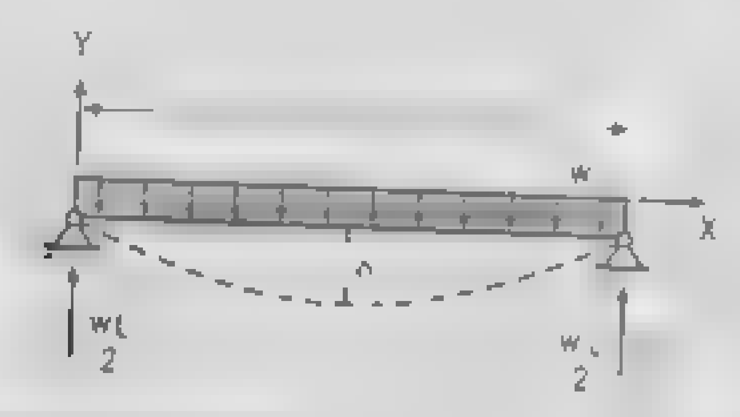
Debido a la simetría, la deflexión máxima sucede en el centro de luz, es decir, cuando $x = L/2$

$$EIy_{max} = \frac{P}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{P}{6}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right)^3 - \frac{PL^2}{16}\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$y_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$, pero $\delta = -y$, por lo tanto: $$\boxed{\delta = \frac{PL^3}{48EI}}$$

606 Determinar la deflexión máxima en una viga simplemente apoyada de longitud L que soporta una carga uniformemente distribuida de w N/m a lo largo de su longitud.

Resolución:



Calculando la ecuación general de momentos y luego integrándola para calcular la pendiente y deflexión, tenemos:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \left(\frac{w}{2}\right)x^2 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{wL}{2}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{w}{2}\frac{x^3}{3} + C$$

$$EIy = \frac{wL}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{w}{2}\frac{x^4}{12} + C_1x + C_2$$

La primera condición de apoyo es $x = 0$, $y = 0$, de donde tenemos que $C_2 = 0$

La segunda condición de apoyo es $x = L$, $y = 0$

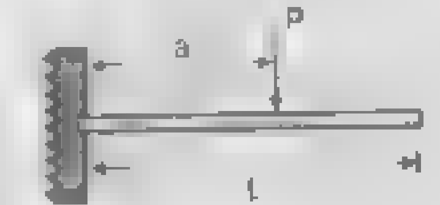
$$0 = \frac{wL}{2}\frac{L^3}{6} - \frac{w}{2}\left(\frac{L^4}{12}\right) + C_1(L) \Rightarrow C_1 = -\frac{wL^3}{24}$$

La deflexión máxima se da en el centro de luz de la viga, por lo tanto:

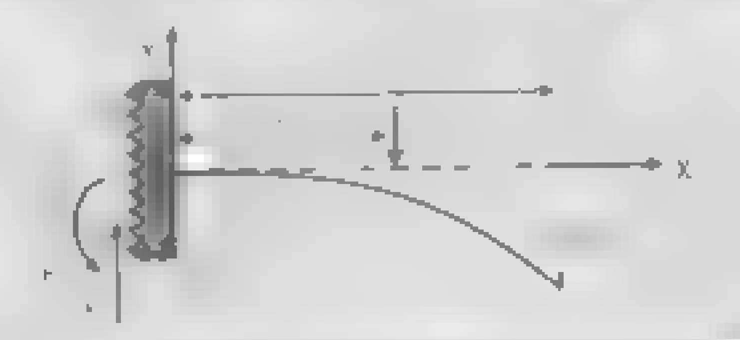
$$EIy = \frac{wL}{12}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{w}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^4 - \left(\frac{wL^3}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$EIy = -\frac{5wL^4}{384}$$ ... pero $\delta = -y$, por lo tanto: $\delta = \frac{5wL^4}{384EI}$ m

607 Determinar el máximo valor de EIy en la ménsula de la figura cargada ... generada con ... empotramiento.



Resolución:



La ecuación general de momentos ... veces para calcular la pendiente y deflexión de la viga:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = (P)x - (Pa) - (P)(x - a) \quad ...(1)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = (P)\frac{x^2}{2} - (Pa)x - (P)\frac{(x-a)^2}{2} + C_1 \quad ...(2)$$

Debido a que la viga se encuentra empotrada en el extremo inicial, $x = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0$, con lo cual $C_1 = 0$

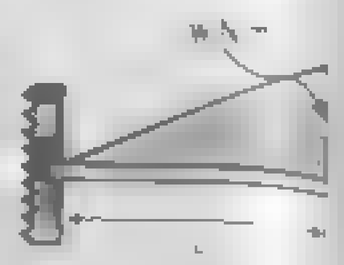
$$EIy = \left(\frac{P}{6}\right)(x^3) - \left(\frac{Pa}{2}\right)(x^2) - \left(\frac{P}{6}\right)(x - a)^3 + C_2 \quad ...(3)$$

Por condiciones de apoyo $x = 0$, $y = 0$, de donde obtenemos que $C_2 = 0$

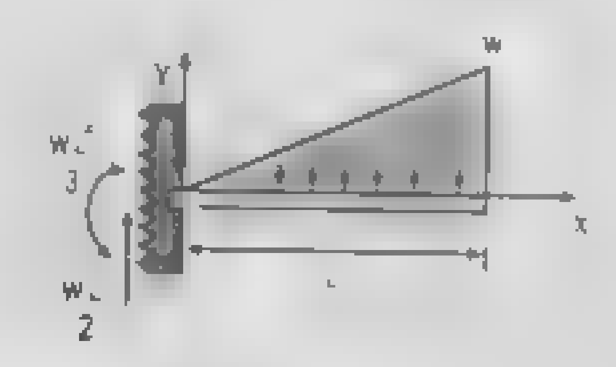
El EIy_{max} sucede en el extremo libre de la ménsula, por lo tanto debemos evaluar la expresión (3) en $x = L$.

$$EIy = \frac{PL^3}{6} - \frac{PaL^2}{2} - \left(\frac{P}{6}\right)(L - a)^3$$

608 Obtener la ecuación de la elástica de la ménsula de la figura sometida a una carga triangular que varía desde cero en el empotramiento hasta w N/m en el extremo libre.



Resolución



Del equilibrio tenemos la ecuación de momentos general a partir de [illegible] calculamos las ecuaciones de deflexión y pendiente

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = \frac{wL}{2}x - \frac{wL^2}{3} - \frac{w}{6L}x^3$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{wL^2}{3}x - \frac{w}{6L}\left(\frac{x^4}{4}\right) + C_1$$

De la condición del problema en el extremo empotrado $\frac{dy}{dx} = 0$, por lo tanto

$C_1 = 0$

$$EIy = \frac{wL}{2}\left(\frac{x^3}{6}\right) - \frac{wL^2}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{w}{6L}\left(\frac{x^5}{20}\right) + C_2$$

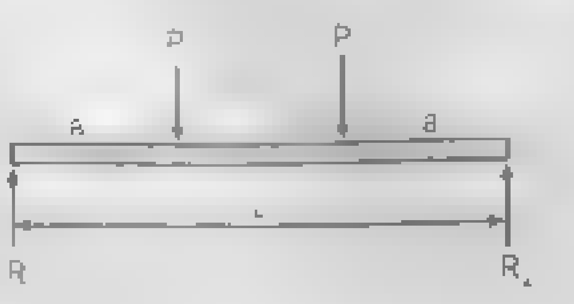
Cuando x = 0 en el empotramiento también se cumple que y = 0, por lo tanto $C_2 = 0$

$$EIy = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{wL^2}{6}x^2 - \frac{w}{120L}x^5$$

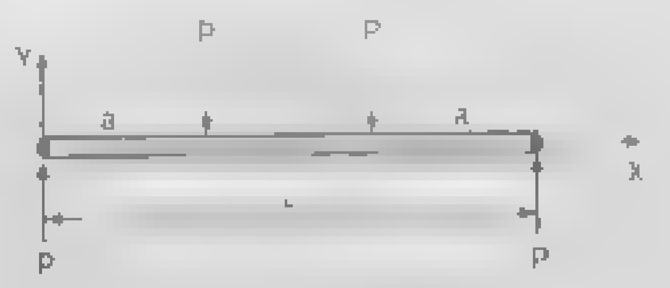
De donde

$$y = \frac{w}{20EI}\left[\frac{Lx^3}{3} - [illegible] L^2x^2 - \frac{x^5}{20L}\right]$$

[illegible] Como se indica en la figura, una viga simplemente apoyada soporta dos cargas concentradas simétricamente [illegible]. Calcular la deflexión máxima δ y comparar el resultado con la flecha en el centro, del caso 7 de la tabla 6-2. Contrastar el resultado obtenido poniendo a = L/2 y [illegible] con la resolución del problema 605



Resolución



De equilibrio, la ec. general de momentos resulta

$$M = (P)x - (P)\langle x - a\rangle - P\langle x - L + a\rangle$$

Integrando dos veces dicha ecuación tenemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Px - P\langle x - a\rangle - P\langle x - L + a\rangle$$

$$EI\frac{dy}{dx} = (P)\left(\frac{x^2}{2}\right) - (P)\frac{\langle x - a\rangle^2}{2} - (P)\frac{\langle x - L + a\rangle^2}{2} + C_1$$

$$EIy = P\left(\frac{x^3}{6}\right) - (P)\frac{\langle x - a\rangle^3}{6} - (P)\frac{\langle x - L + a\rangle^3}{6} + C_1x + C_2$$

En la presente viga tenemos dos condiciones de borde

x = 0, y = 0, de donde de obtiene que $C_2 = 0$

x = L, y = 0

$$0 = \frac{P}{6}[illegible]$$

De donde obtenemos $C_1 = \frac{P}{6}[illegible]$

Entonces $EIy = \frac{P}{6}[illegible]$ ...(1)

Por la simetría de la viga, la deflexión máxima sucede en el eje de simetría

$(x = \frac{L}{2})$. Reemplazando en (1)

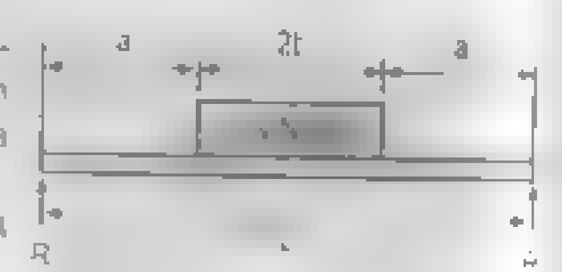
E y ... $\frac{P}{6}$ ... $\frac{L}{2}$ ... $\frac{1}{2}$ ... a ... $\frac{L}{2}$

E y ... $\frac{P}{24}$ ... 4a ...

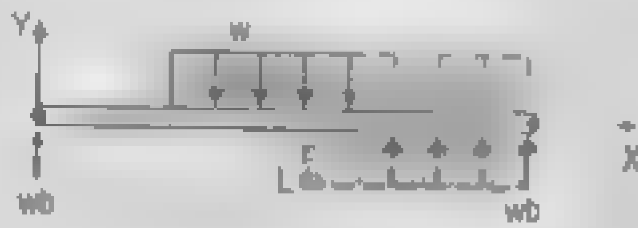
Como $\delta = -y$, entonces: ...

• Observación: ... son ... vos

610 La viga apoyada de la figura soporta una carga uniforme w, simétricamente distribuida, en una porción de su longitud. Determinar la deflexión máxima y confrontar el resultado poniendo a = 0, con la solución del problema 606.



Resolución:



La ecuación general de momentos resulta del gráfico adjunto

$$M = (wb)x - w\frac{(x-a)^2}{2} + w\frac{(x-a-2b)^2}{2} \qquad ...(1)$$

Calculemos la ec. de pendiente y deflexión a partir de (1).

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$EI\frac{dy}{dx} = (wb)\frac{x^2}{2} - \left(\frac{w}{2}\right)\frac{(x-a)^3}{3} + \left(\frac{w}{2}\right)\frac{(x-a-2b)^3}{3} + C_1$$

$$EIy = \left(\frac{wb}{6}\right)x^3 - \left(\frac{w}{24}\right)(x-a)^4 + \left(\frac{w}{24}\right)(x-a-2b)^4 + C_1x + C_2$$

De las condiciones de borde

$x = 0$, $L = 0$; entonces $C_2 = 0$

De $x = L$, $y = 0$; obtenemos C_1

$$0 = \left(\frac{wb}{6}\right)L^3 - \left(\frac{w}{24}\right)(L-a)^4 + \left(\frac{w}{24}\right)(L-a-2b)^4 + C_1L$$

C ... $\frac{L}{8}$ ...

La deflexión máxima sucede cuando $x = L/2$ debido a la simetría de la viga

$$EIy = \left(\frac{wb}{6}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{w}{24}\right)\left[\left(\frac{L}{2}-a\right)^4\right] + C_1\left(\frac{L}{2}\right)$$

De donde

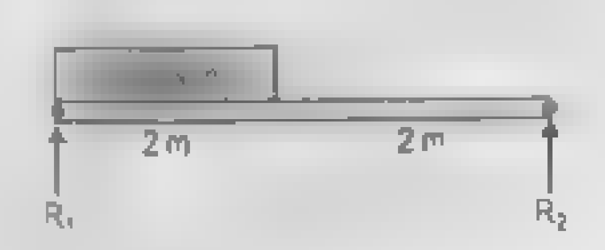
$$EIy = \frac{w}{24}\left[\frac{3L^4}{16} - L^3a - a^4 - bL^3\right]\text{, como } \delta = -y\text{, entonces}$$

$$\delta = \frac{w}{24EI}\left[L^3a + a^4 + bL^3 - \frac{3L^4}{16}\right] \qquad ...(2)$$

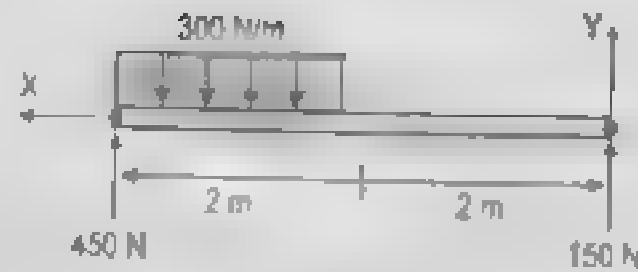
Si a = 0, entonces 2b = L ...

Reemplazamos en (2) ...

611 Calcular el valor de EIδ en el centro del claro en la viga representada en la figura. Si E = 10 GN/m², determinar el valor de I necesario para que la deflexión en el centro no sobrepase 1/360 del claro. *Indicación:* considerar el origen de x en el apoyo derecho siendo x positiva hacia la izquierda.



Resolución.



Considerando el sistema coordenado mostrado en la figura, tenemos que

$E\frac{d^2y}{dx^2}$ [illegible] $150x - 150(x$ [illegible]

$EI\frac{dy}{dx} = 150\frac{x^2}{2} - 150\frac{(x-2)^3}{3} + C_1$

$EIy = 25x^3 - \frac{25}{2}(x-2)^4$ [illegible]

Usando las condiciones de borde

$x = 0$, $y = 0$, de donde $C_2 = 0$

$x = 4$, $y = 0$

$0 = 1600$ [illegible]

Luego.

$EIy = 25x^3 - \frac{25}{2}(x-2)^4 - 350x$ ...(1)

Del problema tenemos

$E = 10\ GN/m^2$, $\delta\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{1}{360}\right)(4) = \frac{1}{90}$ m

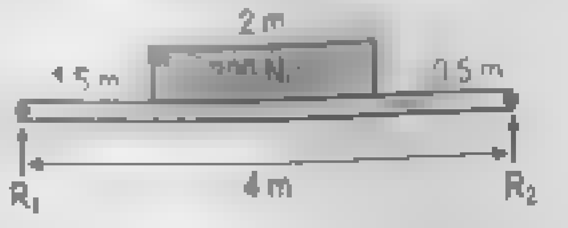
$EIy_{(2)} = 25x2^3 - \frac{25}{2}(2-2)^4 - (350)(2$ [illegible]

EIy [illegible] 500 , entonces $\boxed{EI\,\delta_{(2)} = 500\ N.m^3}$ ...(2)

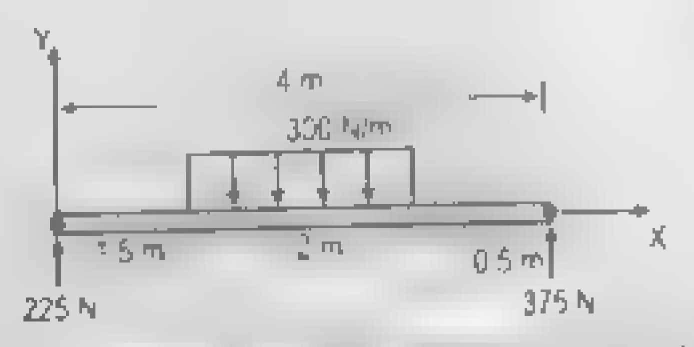
De (2)

$I = \frac{500}{\delta E} = \frac{500}{\frac{1}{90}\ 10^{\ldots}}$ [illegible] $1{,}000 \times 10$ [illegible] $\times 10$ mm^4

[illegible] el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga cargada como se indica en la figura



Resolución



A partir de la ec. de momentos genera calculamos la ec. de la pendiente y deflexión

$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 225x - 150(x-1{,}5)^2 + 150(x-3{,}5)^2$

$EI\frac{dy}{dx} = \frac{225x^2}{2} - \frac{150}{3}(x-1{,}5)^3 + \frac{150}{3}(x-3{,}5)^3 + C_1$

$EIy = \frac{225x^3}{6} - \frac{150}{12}(x-1{,}5)^4 + \frac{150}{12}(x-3{,}5)^4 + C_1x + C_2$

De las condiciones de borde

$x = 0$, $y = 0$, por lo tanto $C_2 = 0$

$x = 4$ m , $y = 0$, de donde

$0 = \frac{225}{6}(4)^3 - \frac{150}{12}(4-1{,}5)^4 + \frac{150}{12}(4-3{,}5)^4 + C_1(4)$; $C_1 = -478{,}13$ N.m

Por lo tanto

$EIy = \frac{225x^3}{6} - \frac{150}{12}(x-1{,}5)^4 + \frac{150}{12}(x-3{,}5)^4 - 478{,}13x$

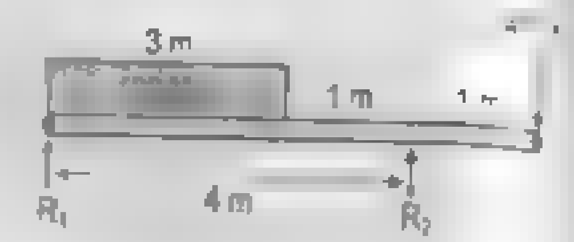
En el centro de luz $x = 2$ m

$EIy = \frac{225}{6}(2)^3 - \frac{150}{12}(0{,}5)^4 - 478{,}13(2)$

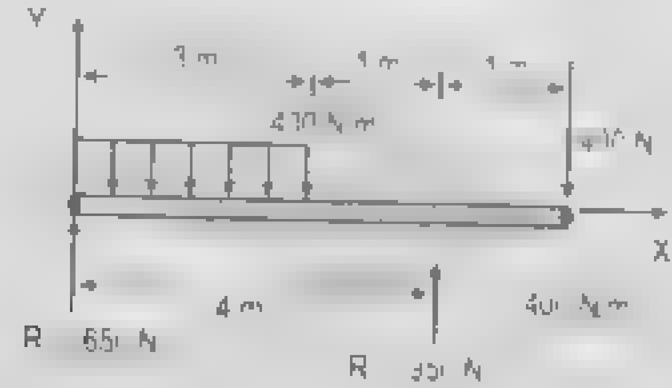
$EIy_{(2)} = -657{,}04\ N.m^3$; pero como $\delta = -y$, entonces

$\boxed{EI\,\delta = 657{,}04\ N.m^3}$

613 Calcular el valor de EIy en el extremo derecho de la viga como indica la figura.



Resolución:



De la figura encontramos la ec. general de momentos

$$M = 650x - 200x^2 + 200\ (x-3)^2 + 950\ (x-4) \quad \ldots (1)$$

A partir [illegible] integraciones sucesivas

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 650x - 200x^2 + 200(x-3) + 950(x-4)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 325x^2 - \frac{200}{3}x + \frac{200}{3}(x-3)^3 + 475\ (x-4)^2 + C_1$$

$$EIy = \frac{325}{3}x^3 - \frac{200x^4}{12} + \frac{200}{12}(x-3)^4 + \frac{475}{3}(x-4)^3 + C_1x + C_2$$

De las condiciones de borde

$x = 0$, $y = 0$, por lo tanto $C_2 = 0$

De $x = 4$, $y = 0$ tenemos

$$0 = \frac{325}{3}(4^3) - \frac{200}{12}(4^4) + \left(\frac{200}{12}\right)(1^4) + 0 + C_1(4) \Rightarrow C_1 = -\frac{4025}{6}\ N\ m$$

Entonces

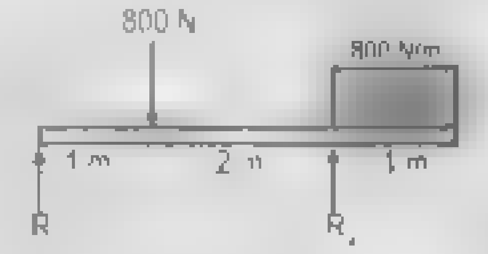
$$EIy = \frac{325}{3}x^3 - \frac{50}{3}x^4 + \frac{50}{3}(x-3)^4 + \frac{475}{3}(x-4)^3 - \frac{4025}{6}x$$

En el extremo derecho de la viga, $x = 5$ m

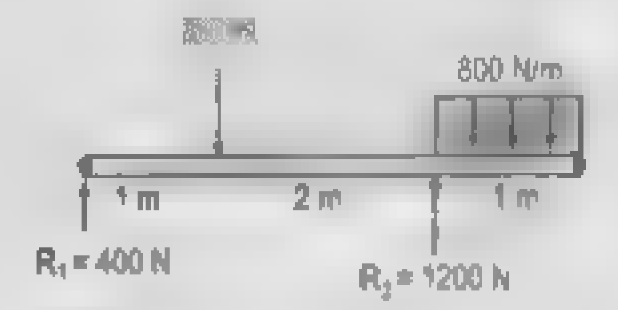
$$EIy = \frac{325}{3}(5^3) - \left(\frac{50}{3}\right)(5^4) + \left(\frac{50}{3}\right)(2^4) + \frac{475}{3} - \frac{4025}{6}(5)$$

$EIy = $ [illegible] $8\ N\ m$

[illegible] Calcular el pendiente de la elástica en el apoyo derecho de la viga con voladizo de la figura



Resolución



La ec. general de momentos es.

$$M = 400x - 800(x-1) + 1200(x-3) - 400\ (x-3)^2 \quad \ldots (1)$$

De (1).

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 400x - 800\ (x-1) + 1200\ (x-3) - 400(x-3)^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 200x^2 - 400\ (x-1)^2 + 600\ (x-3)^2 - \frac{400}{3}(x-3)^2 + C_1 \quad \ldots (2)$$

$$EIy = \frac{200}{3}x^3 - \frac{400}{3}(x-1)^3 + 200\ (x-3)^3 - \frac{100}{3}(x-3)^4 + C_1x + C_2 \quad \ldots (3)$$

De las condiciones de borde: $x = 0$, $y = 0$, por lo tanto $C_2 = 0$

Cuando $x = 3$ m , $y = 0$:

$$0 = \left(\frac{200}{3}\right)(3^3) - \left(\frac{400}{3}\right)(2^3) + 200\ (3-3)^3 - \frac{100}{3}\ (3-3)^4 + C_1(3)$$

$$C_1 = -\frac{[illegible]}{9}\ N\ m$$

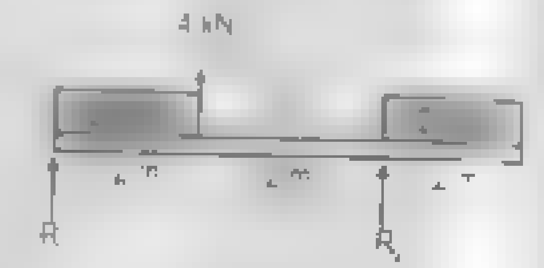
Como nos piden la pendiente en el apoyo derecho usamos. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x=3)}$

En ec. (2)

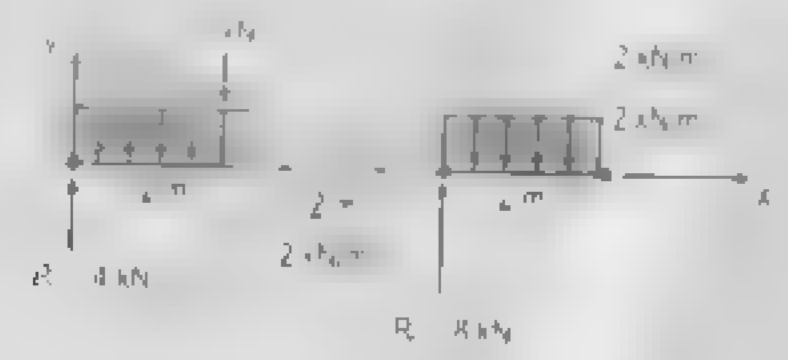
$$EI\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x=3)} = 1800 - 1600 + 0 - 0 - \frac{2200}{9}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|$$

615. Calcular el valor de EIy en el centro entre apoyos de la viga con voladizo de la figura



Resolución:



De la ec. general de momentos que podemos obtener de la figura

$$EI\frac{dy}{dx} = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - 2(x-2)^2 + \frac{(x-2)^3}{3} - \frac{(x-4)}{3} + C_1$$

$$EIy = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{12} - 2\frac{(x-2)^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} - \frac{(x-4)^4}{12} + C_1x + C_2$$

Considerando las condiciones de borde

x = 0, y = 0, de donde $C_2 = 0$

x = 4, y = 0, de donde C_1 es.

$$0 = \left(\frac{2}{3}\right)(4^3) - \left(\frac{1}{12}\right)(4^4) - \left(\frac{2}{3}\right)(2^3) + \left(\frac{1}{12}\right)(2^4) - 0 + C_1(4)$$

Por lo cual $C_1 = -\frac{26}{6}$ kN.m²

Finalmente

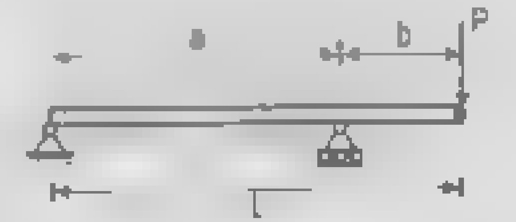
$$EIy = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{12} - \frac{2(x-2)^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} - \frac{(x-4)^4}{12} - \frac{26}{6}x$$

El valor de EIy en el centro entre apoyos, sucede cuando x = 2 m, entonces.

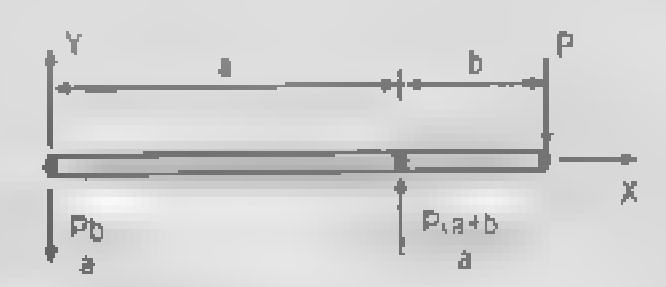
$$EIy_{(2)} = \left(\frac{2}{3}\right)(2^3) - \left(\frac{1}{12}\right)(2^4) - 0 - 0 - 0 - \left(\frac{26}{6}\right)(2)$$

$$EIy_{(2)} = -4{,}66 \text{ kN m}$$

616. Determinar (a) la ordenada y la pendiente de la elástica bajo la carga P y (b) la máxima deflexión entre apoyos, en la viga de la figura



Resolución



De la viga tenemos que

$$M = -\frac{Pb}{a}(x) + \frac{P(a+b)}{a}(x-a)$$

Sabemos que

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-\frac{Pb}{2a}\right)x^2 + \left(\frac{P(a+b)}{a}\right)(x-a) \quad \ldots (1)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{Pb}{2a}\right)x^2 + \left(\frac{P(a+b)}{2a}\right)(x-a)^2 + C_1 \quad \ldots (2)$$

$$EIy = -\frac{Pb}{6a}x^3 + \frac{P(a+b)}{6a}(x-a)^3 + C_1x + C_2 \quad \ldots (3)$$

De las condiciones de borde

$x = 0,\ y = 0$; por lo cual $C_2 = 0$

$x = a,\ y = 0$; de donde calculamos C_1

$$0 = \left(-\frac{Pb}{6a}\right)(a^3) + 0 + C_1(a) \Rightarrow C_1 = \frac{Pba}{6}$$

(a) Nos piden la ordenada y la pendiente del ajo de P esto es cuando $x = L = a + b$

$$EIy \quad \frac{Pb}{6a} \quad L \quad + \quad \frac{P L}{6a} \quad a + b \quad a \quad \frac{Pba\ L}{6}$$

$$y \quad \frac{P\ b}{\ EI}$$

$$EI\frac{dy}{dx} \quad \frac{P}{2a} L \quad \frac{P}{2a} \quad b \quad \frac{Pba}{6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{6EI}(-2a - 3b)$$

(b) La máxima deflexión entre apoyos, por ello, igualamos $\frac{dy}{dx} = 0$

$$0 \quad \frac{Pb}{2a} \quad x \quad + 0 + \frac{Pba}{6}$$

$x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (este punto se encuentra entre apoyos)

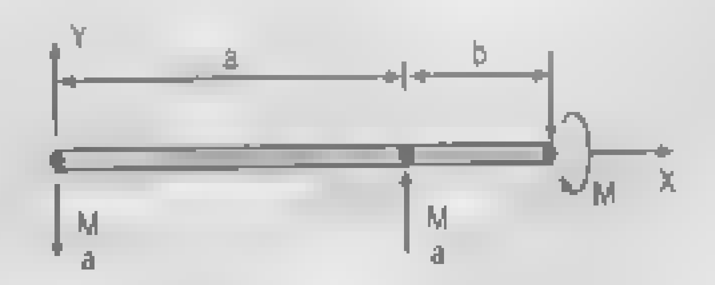
Reemplazando $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ en (3):

$$EIy_{máx} = \frac{Pb}{6a}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) + 0 + \frac{Pba}{6}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\boxed{EIy_{máx} = \frac{Pba^2}{9\sqrt{3}}}$$

61. Sustituir la carga P del problema por un par M aplicado en el extremo derecho y determinar la pendiente y ordenada en el mismo punto.

Resolución



Sabemos que $E \frac{d\ y}{dx} \quad M$ entonces

$$E\frac{d\ y}{dx} \quad \frac{M}{a} \quad x, + \frac{M}{a}(x \quad a) \qquad (1)$$

Integrando tenemos

$$E\frac{dy}{dx} \quad \frac{M}{2a}(x) + \frac{M}{2a}(x \quad a) + C \qquad (2)$$

$$EIy \quad \frac{M}{6a}(x) + \frac{M}{6a}(x \quad a) + C x + C \qquad (3)$$

De las condiciones de borde

$x = 0,\ y = 0$; lo que nos da $C_2 = 0$

$x = a,\ y = 0$; obtenemos C_1

Entonces

$$0 = \left(-\frac{M}{6a}\right)(a^2) + 0 + C_1(a) \Rightarrow C \quad \frac{Ma}{6}$$

Nos piden $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} \quad \left.\delta\right|_{x=L}$ por lo tanto de (3)

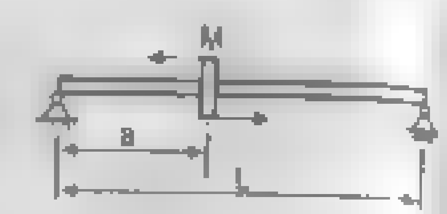
$$EIy|_{x=L} = \left(-\frac{M}{6a}\right)L^3 + \left(\frac{M}{6a}\right)(b)^3 + \frac{Ma}{6}(a + b)$$

$$EIy|_{x=L} \quad \frac{Mb(2L + b)}{6} \Rightarrow \boxed{\delta_{x=L} = \frac{Mb(2L + b)}{6EI}}$$

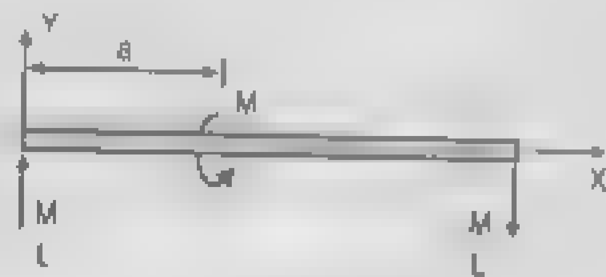
De 2

$$E\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x} \quad \frac{M}{2a} \quad (L \quad \frac{M}{2a} \quad (b \quad + \frac{Ma}{6} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x} \quad \frac{M \quad 2b}{3E}$$

618. Una viga simplemente apoyada resiste la acción de un par M aplicado como se indica en la figura. Determinar la ecuación de la elástica y la deflexión en el punto de aplicación del par. Después, poniendo a = L y a = 0, comparar el resultado con los casos 11 y 12 de la Tabla 6-2.



Resolución:



Del D.C.L. de la viga

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{M}{L}\right)x - M\ (x-a)^0 \quad \Rightarrow \quad EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{M}{2L}\right)x^2 - M\ (x-a) + C$$

$$Ely = \left(\frac{M}{6L}\right)x^3 - \left(\frac{M}{2}\right)(x-a)^2 + C_1x + C_2$$

Con las condiciones de borde obtenemos

$x = 0$, $y = 0$; por lo tanto $C_2 = 0$.

Cuando $x = L$, $y = 0$

$$0 = \left(\frac{M}{6L}\right)(L^3) - \left(\frac{M}{2}\right)(L-a)^2 + C_1(L) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{ML}{3} - Ma + \frac{Ma^2}{2L}$$

Por lo tanto

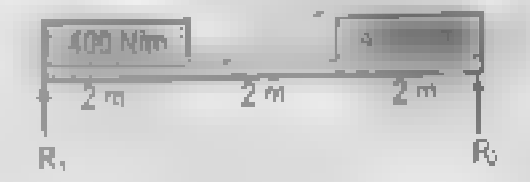
$$y = \left(\frac{1}{E}\right)\left[\left(\frac{M}{6L}\right)x^3 - \left(\frac{M}{2}\right)(x-a)^2 + \frac{ML}{3} \quad Ma \quad \frac{Ma}{2L} \quad x\right]$$

E... de la elástica

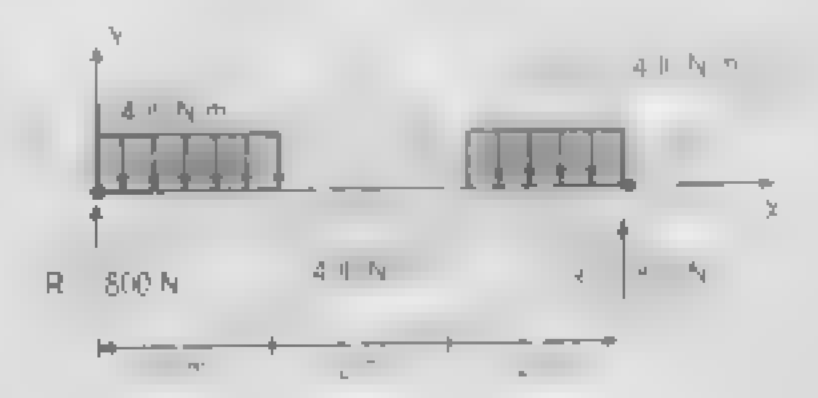
Deflexión en el punto de aplicación del par, es decir, cuando x = a

$$Ely = \frac{Ma^3}{6L} - 0 + \frac{MLa}{3} - Ma^2 + \frac{Ma^3}{2L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ely = \frac{Ma}{3L}(L^2 - 3aL + 2a^2)}$$

Determinar el valor de Ely en el centro de la viga representada en la figura. (*Indicación*: use el hecho de que, debido a la simetría, la pendiente en el punto medio es nula.)



Resolución



La ecuación general de momentos es

$$M = 800x - \frac{400x^2}{2} + \frac{400}{2}(x-2)^2 - \frac{400}{2}(x-4)^2$$

Aplicando la ecuación diferencial de la elástica e integrando

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 800x - 200x^2 + 200(x-2)^2 - 200\ (x-4)^2$$

$$EI\frac{dy}{dx} = 400x^2 - 66{,}67\ x^3 + 66{,}67(x-2)^3 - 66{,}67\ (x-4)^3 + C_1$$

Por indicación del problema, usando la simetría de la viga.

$$x = 3\ ,\ \frac{dy}{dx} = 0$$

$$0 = 3600 - 1800{,}09 + 66{,}67 + C_1$$

$$C_1 = -1856{,}58\ N.m^2$$

$$Ely = 133{,}33x^3 - 16{,}67x^4 + 16{,}67\ (x-2)^4 - 16{,}67(x-4)^4 - 1856{,}58x + C_2$$

Por condición de borde

$x = 0$, $y = 0$, de donde $C_2 = 0$

Finalmente

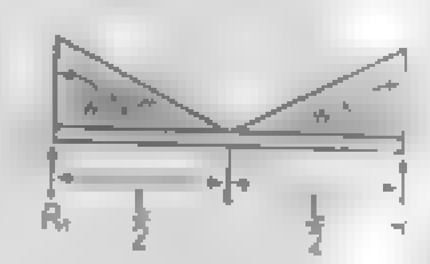
$$EIy = 133{,}33x^3 - 16{,}67x^4 + 16{,}67\langle x-4\rangle^4 - 16{,}67\langle x-4\rangle^4 - 1856{,}58x$$

En el centro de la viga $x = 3$ m

$$EIy = 3599.91 - 1350.27 + 16{,}67 - 0 - 5569.74$$

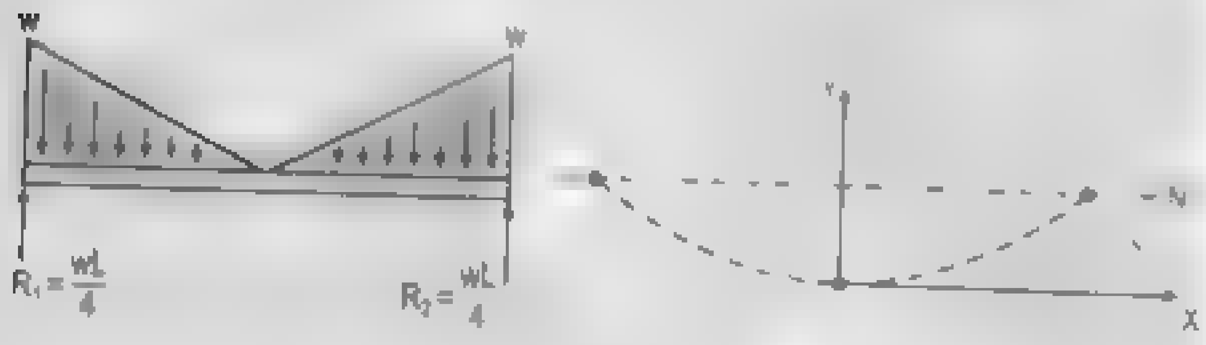
$$EIy = -3303{,}43\ N.m^3 \quad \Rightarrow \quad EIy = -3.3\ kN\ m^3$$

620 Determinar la deflexión δ en el centro de la viga de la figura. *Indicación*: considerar el origen de coordinación en el centro de la viga ya deformada



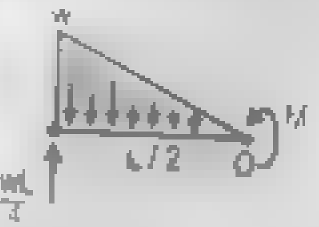
Resolución:

Por condición del problema usamos este sistema



Trabajando en el lado izquierdo de la viga.

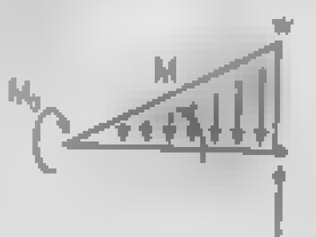
Del equilibrio: $M_o = \frac{wL^2}{24}$



Ahora calculamos la ecuación general de momentos para el tramo derecho

Del equilibrio: $M = \frac{wL^2}{24} - \frac{2wx^3}{6L}$

Entonces $EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wL^2}{24} - \frac{2wx^3}{6L}$



Integrando tenemos

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(\frac{wL^2}{24}\right)x - \left(\frac{w}{12L}\right)x^4 + C_1$$

P... la ubicación del sistema de coordenadas

x ... $\frac{dy}{dx}$ ... por lo tanto $C_1 = 0$ EIy ... $\frac{wL^2}{48}x^2$ ... $\frac{w}{...L}x^5 + C_2$

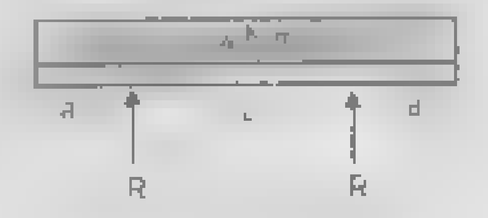
N... ente por la ubicación del sistema de coordenadas

$x = 0$, $y = 0$, por lo tanto $C_2 = 0$, $EIy = \left(\frac{wL^2}{48}\right)x^2 - \left(\frac{w}{60L}\right)x^5$

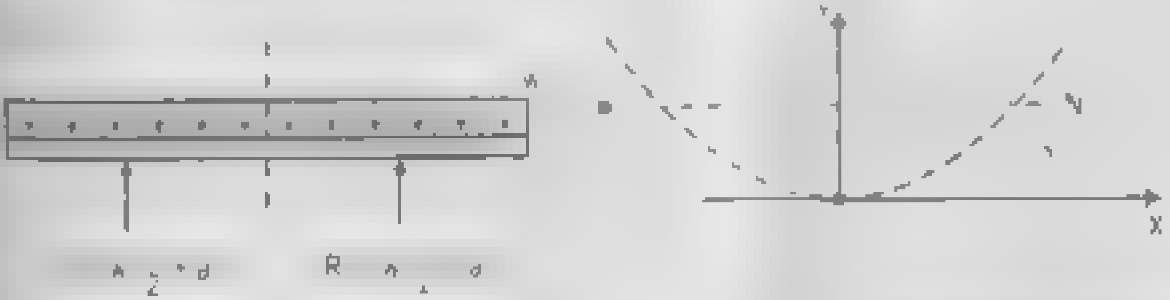
L... deflexión en el centro de la viga de obtiene al considerar $x = L/2$

E... $\frac{wL^2}{48}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{w}{...}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$ ...

6... C...ar EIδ en el centro del claro, en la viga de la figura. Confrontar el resultado obtenido haciendo ... = 0 con el resultado del problema 606. Téngase ... cuenta la misma indicación del problema anterior.

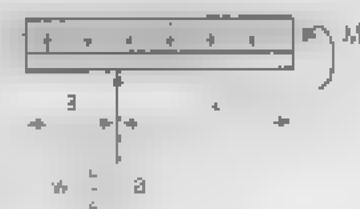


Resolución



Por condición del problema usamos el siguiente sistema

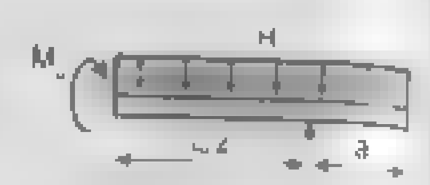
Trabajando en el lado izquierdo de la viga



Por equilibrio:

$$M \quad \frac{w}{2} \quad \frac{L}{4} \quad a$$

Ahora trabajando en el lado derecho de la viga



Por equilibrio.

$$M = \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^2}{4} - a^2\right) + w\left(\frac{L}{2} + a\right)\left\langle x \quad \frac{L}{2}\right\rangle \quad \frac{w}{2} \quad x \qquad (1)$$

Aplicando la ecuación diferencial de la elástica

$$EI\frac{d^2y}{dx} \quad \left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{L^2}{4} \quad a^2\right) \quad \frac{wx^2}{2} \quad w\frac{L}{2} \quad a\left\langle x \quad \frac{L}{2}\right\rangle \qquad (2)$$

$$E\frac{dy}{dx} \quad \frac{w}{2}\frac{L}{4} \quad a \quad x \quad \frac{w}{6}x^3 \quad \frac{w}{2}\frac{L}{2} \quad a\left\langle x \quad \frac{L}{2}\right\rangle \quad C \qquad (3)$$

Debido a la ubicación del sistema de coordenadas

$x = 0$; $\frac{dy}{dx} = 0$; por lo cual $C_1 = 0$

$$Ely = \left(\frac{w}{4}\right)\left(\frac{L^2}{4} \quad a \quad x\right) \quad \frac{w}{24}x^4 \quad \frac{w}{6}\frac{L}{2} + a\left\langle x \quad \frac{L}{2}\right\rangle \quad C \qquad (4)$$

Por condición del sistema

$x \quad 0 \;\; y = 0$ entonces $C_2 \quad 0$

En el centro de claro $x \quad \frac{L}{2}$ debido a la ubicación del sistema

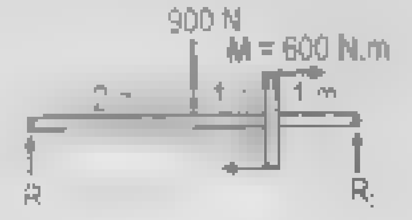
$$\left[E\delta \quad \frac{5wL^4}{384} \quad \frac{wL a^2}{16}\right]$$

Si $a \quad 0$ entonces $\left[E\delta \quad \frac{5wL^4}{384}\right]$

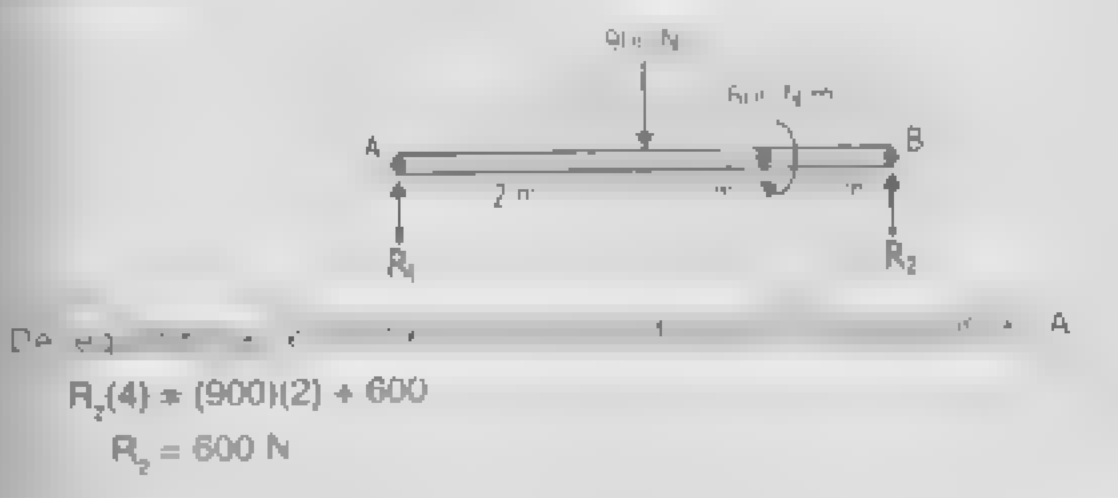
... 623 problemas ilustrativos

...ar en cada una de las vigas de los problemas 624 a 629 el momento del área ... diagrama de momentos flexionantes comprendidos entre los apoyos respecto de cada uno de estos

... viga cargada como indica la figura.



Resolución



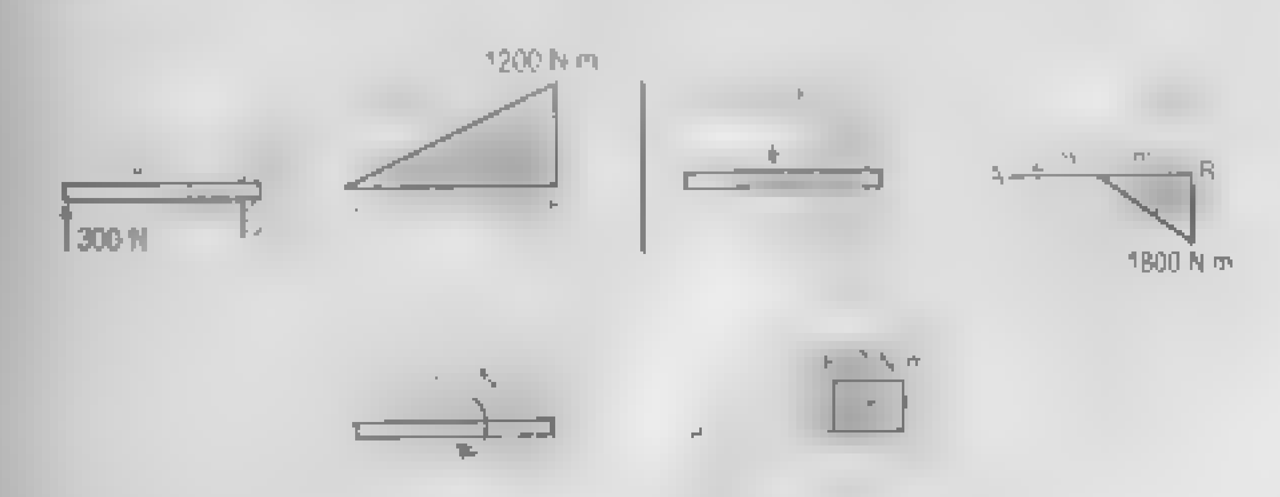
De equilibrio ... A

$R_2(4) = (900)(2) + 600$

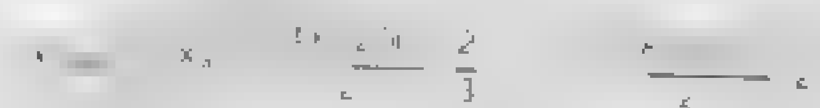
$R_2 = 600$ N

Del equilibrio de fuerzas verticales tenemos $R_1 = 300$ N

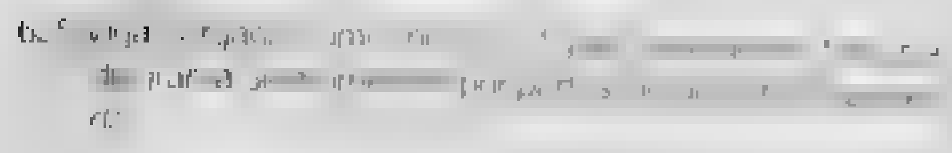
Realizando los esquemas de cargas equivalentes en volado y diagrama de momentos por partes

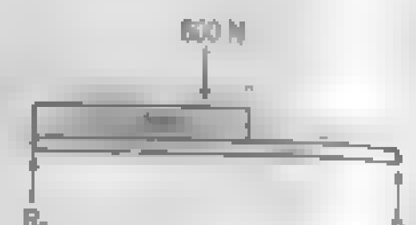


Tomando momentos respecto de A a los diagramas de momentos por partes.

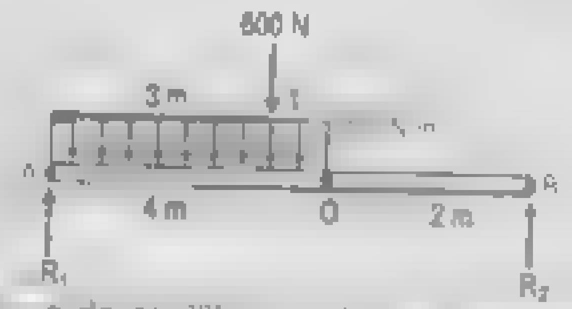


De donde. $(\text{área})_{AB}\,\overline{x}_A = 2500\ \text{N m}^3$



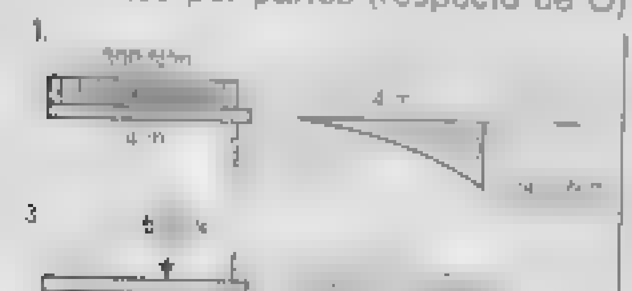


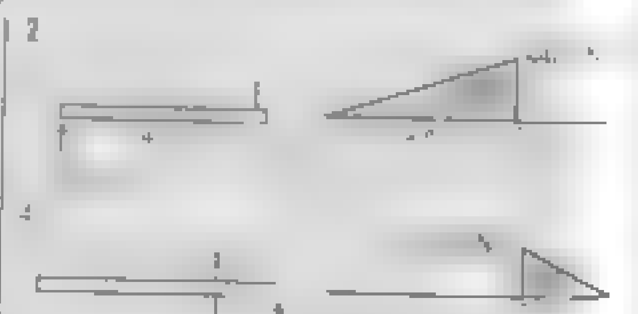
Resolución:



$R_1 + R_2 = 600 + (300)(4) \Rightarrow R = 1100\ \text{N}$

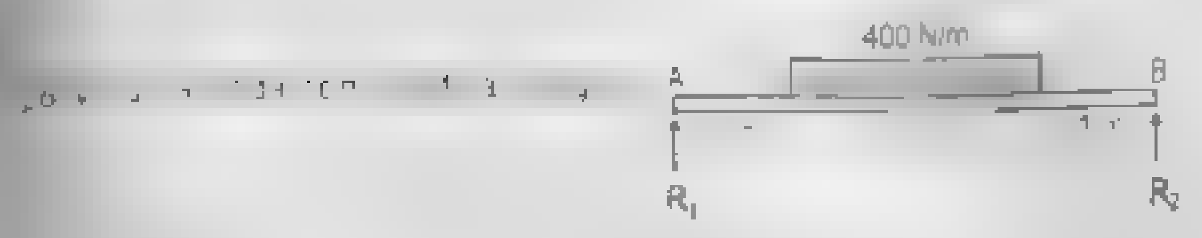
momentos por partes (respecto de O)



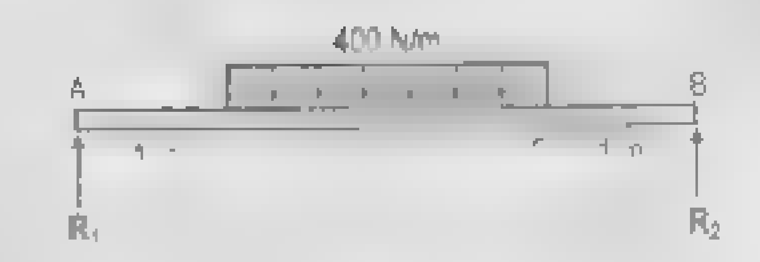


Tomando momentos respecto de A

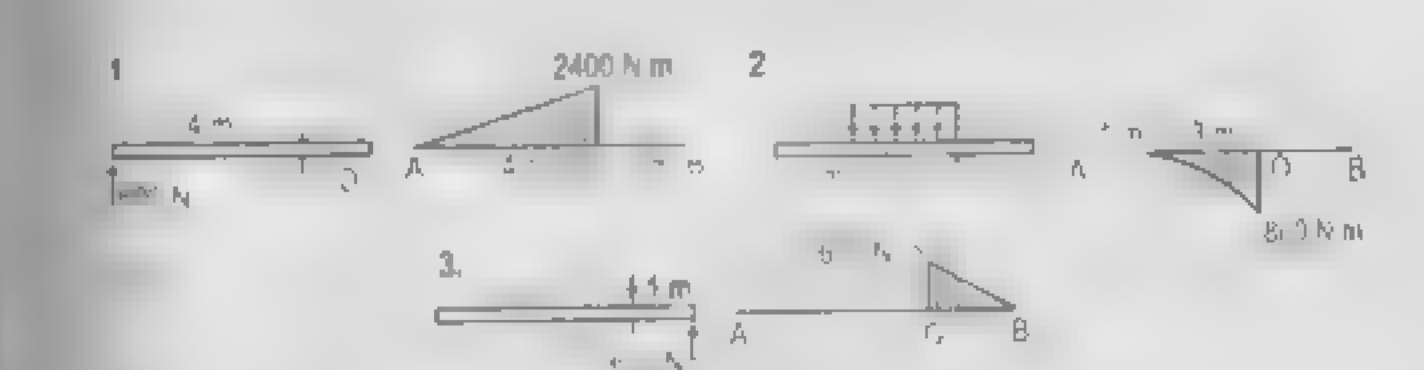
$(\text{área})_{AB}\,\overline{x}_A = 19\,300\ \text{N m}^3$



Resolucion.



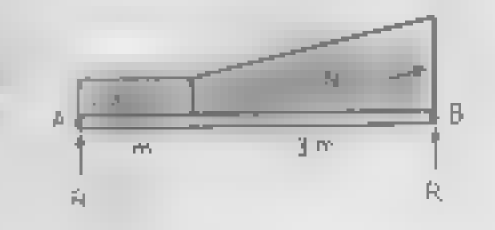
De equilibrio por simetría



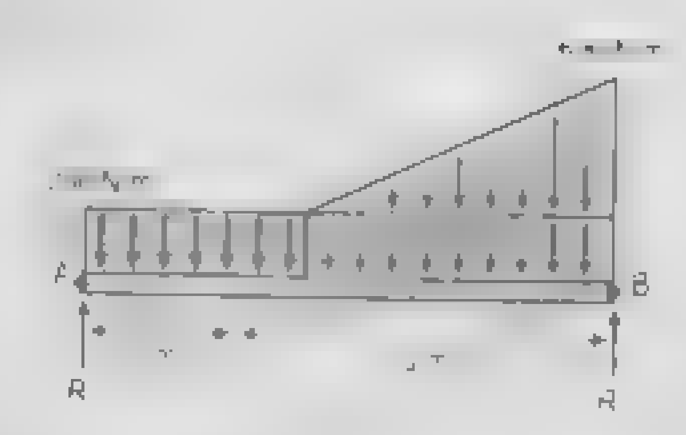
Tomando momentos respecto a B de los diagramas de momentos por partes

$\overline{x}_B = \frac{(4)(2400)}{2}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)(4)\right]$

$(\text{área})_{AB}\,\overline{x} = 8.25\ \text{kN m}^3$



Resolucion

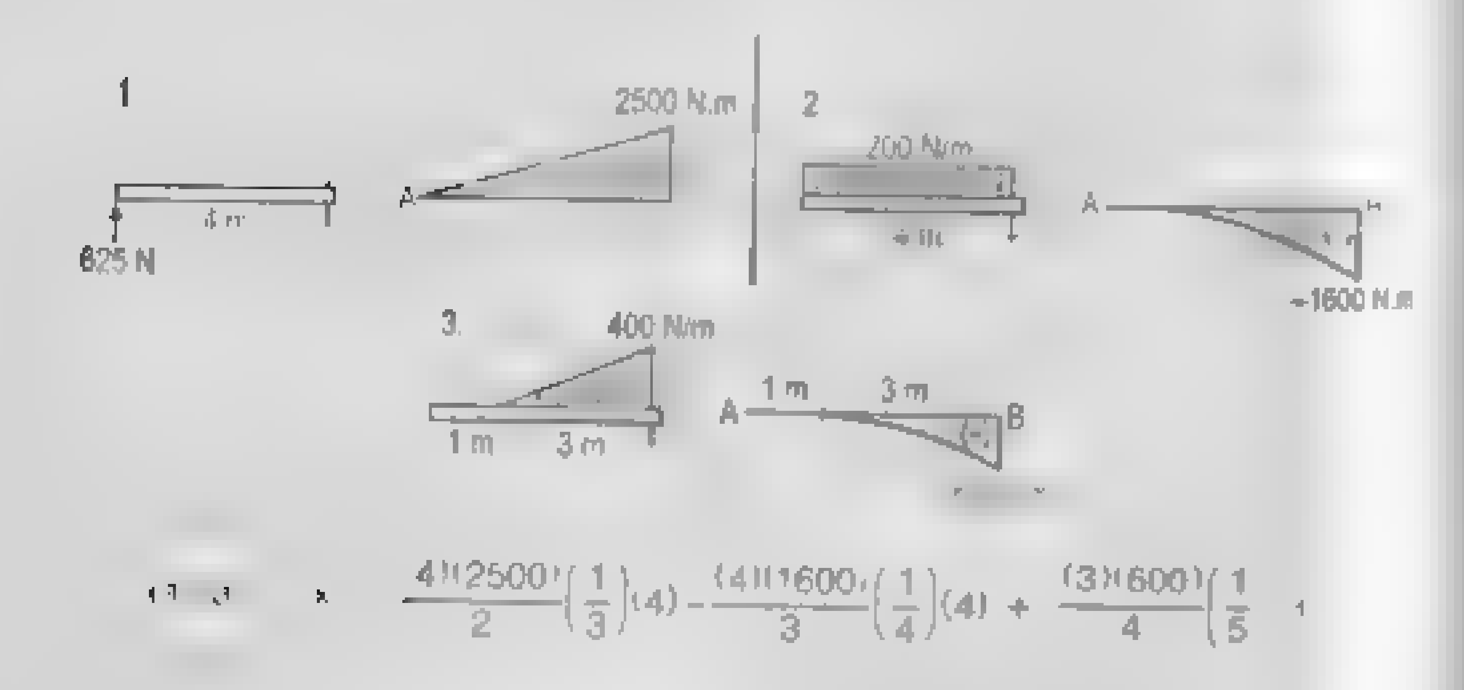


Haciendo equilibrio en la viga ($\Sigma M_A = 0$)

$$R_1(4) = \frac{2 \cdot 0 \quad 4}{2} + \frac{(3 \quad 600)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(3) \Rightarrow R_1 = 625\ N$$

De equilibrio de fuerzas verticales

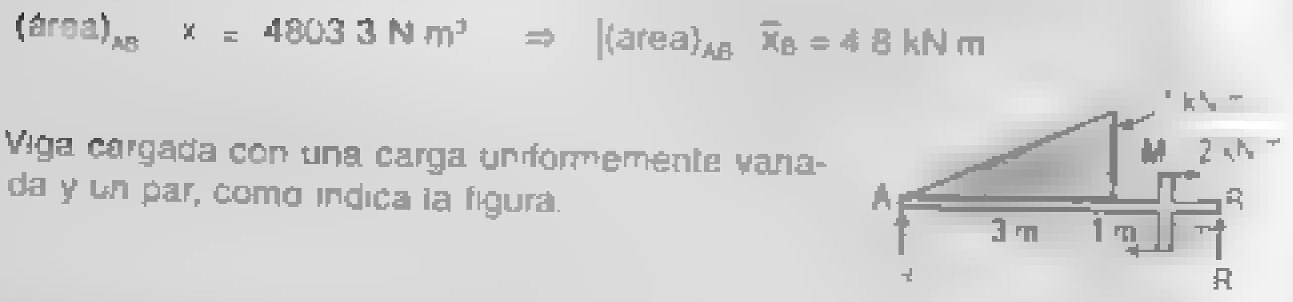
$$R \quad R \quad 00)(4) + \frac{(3)(600)}{2} \Rightarrow R_2 = 1075\ N$$



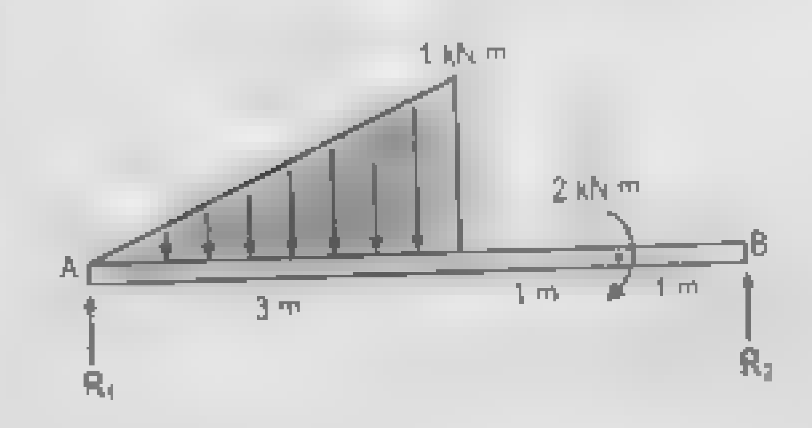
$$\frac{4)(2500)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(4) - \frac{(4)(1600)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(4) + \frac{(3)(600)}{4}\left(\frac{1}{5}\right.$$

$(\text{área})_{AB}\ \bar{x} = 4803.3\ N\,m^3 \Rightarrow |(\text{area})_{AB}\ \bar{x}_B = 4.8\ kN\,m$

628. Viga cargada con una carga uniformemente variada y un par, como indica la figura.



Resolucion



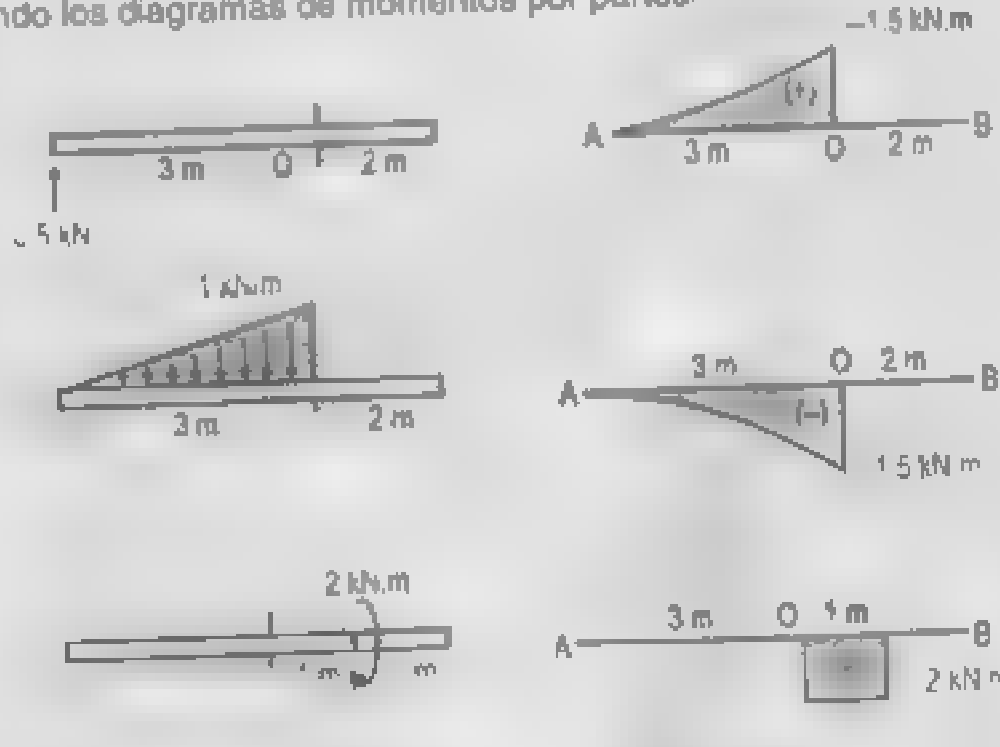
Aplicando equilibrio en la viga

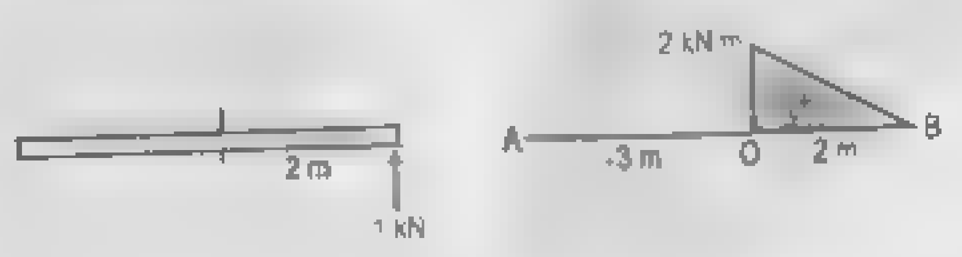
$$(R_2)(5) - \frac{(1)(3)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3) - 2 = 0 \Rightarrow R_2 = 1\ kN$$

Equilibrio de fuerzas verticales.

$$R_1 + R_2 = \frac{(3)(1)}{2} \Rightarrow R_1 = 0.5\ kN$$

Elaborando los diagramas de momentos por partes.





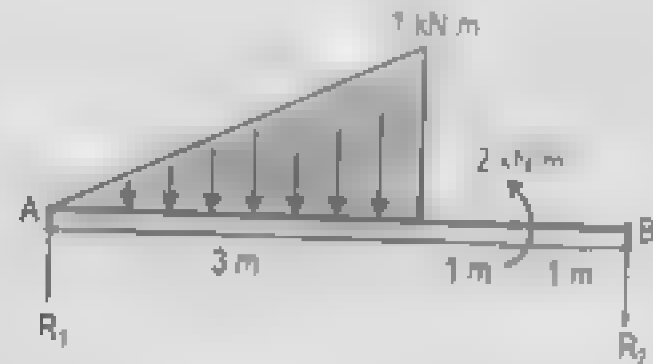
Tomando momentos respecto de A

$$(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A = \frac{(3)(1.5)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3) - \frac{(3)(1.5)}{4}\left(\frac{4}{5}\right)(3) - (2)(1)(3+0.5) + \frac{(2)(2)}{2}\left(3+ \text{[illegible]}\right.$$

$$(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A = 2.13\ \text{kN.m}^3$$

629 Resolver el problema 628 si el sentido del par es contrario al del reloj.

Resolución.



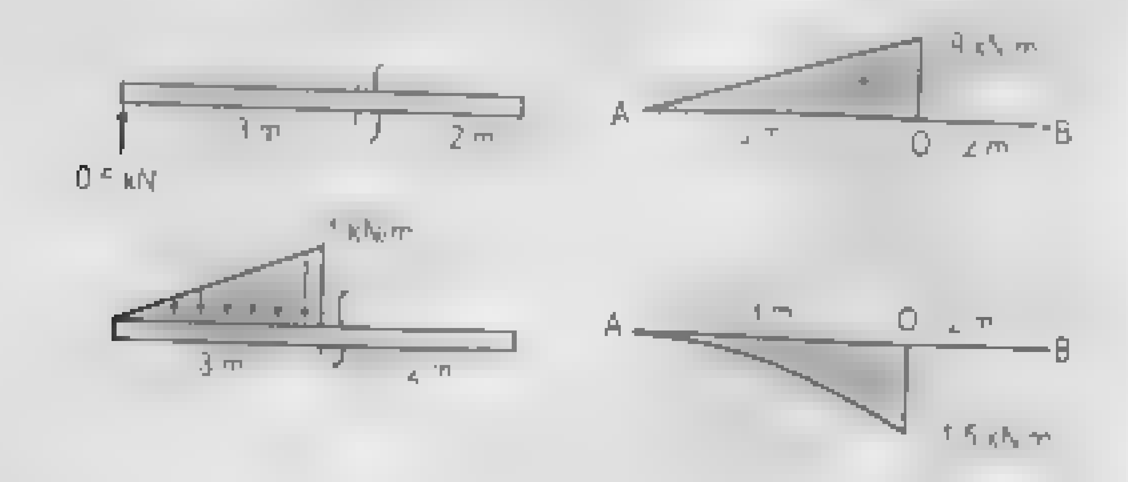
Del equilibrio ($\Sigma M_A = 0$)

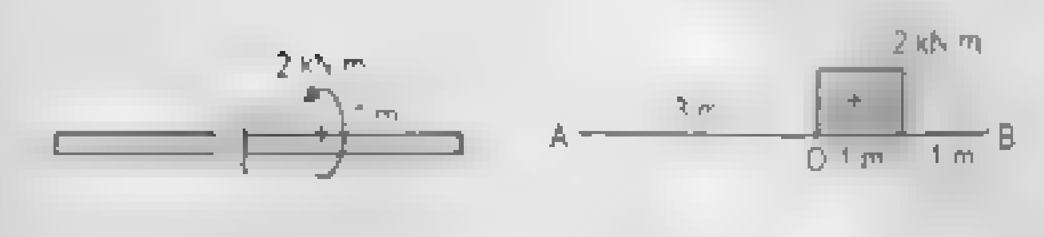
$$R_2(5) + 2 - \frac{(3)(1)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3) = 0 \;\Rightarrow\; R_2 = 0.2\ \text{kN}$$

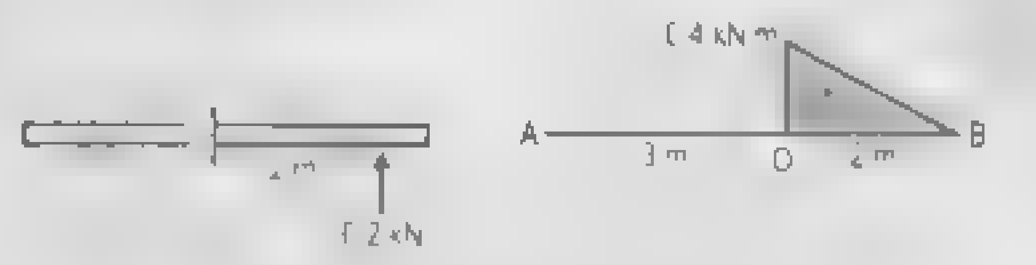
Por equilibrio de fuerzas verticales

$$R_1 + R_2 = \frac{(3)(1)}{2} \;\Rightarrow\; R_1 = \text{[illegible]}\ \text{kN}$$

[illegible] momentos por partes





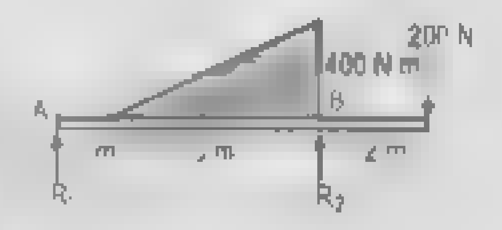


Tomando momentos respecto del extremo A

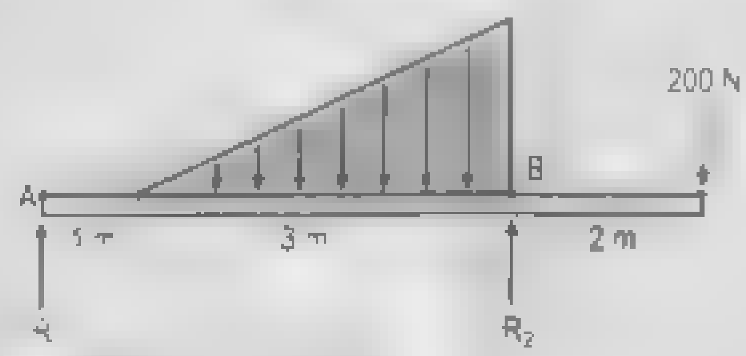
$$\text{[illegible]}$$

$$(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A = 17.47\ \text{kN.m}^3$$

[illegible] la figura, calcular el valor de [illegible] $\bar{x}_A$ [illegible] B es ascendente o descendente hacia la [illegible] *Indicación*: tener en cuenta la ecuación [illegible] y la figura 6-10



Resolución



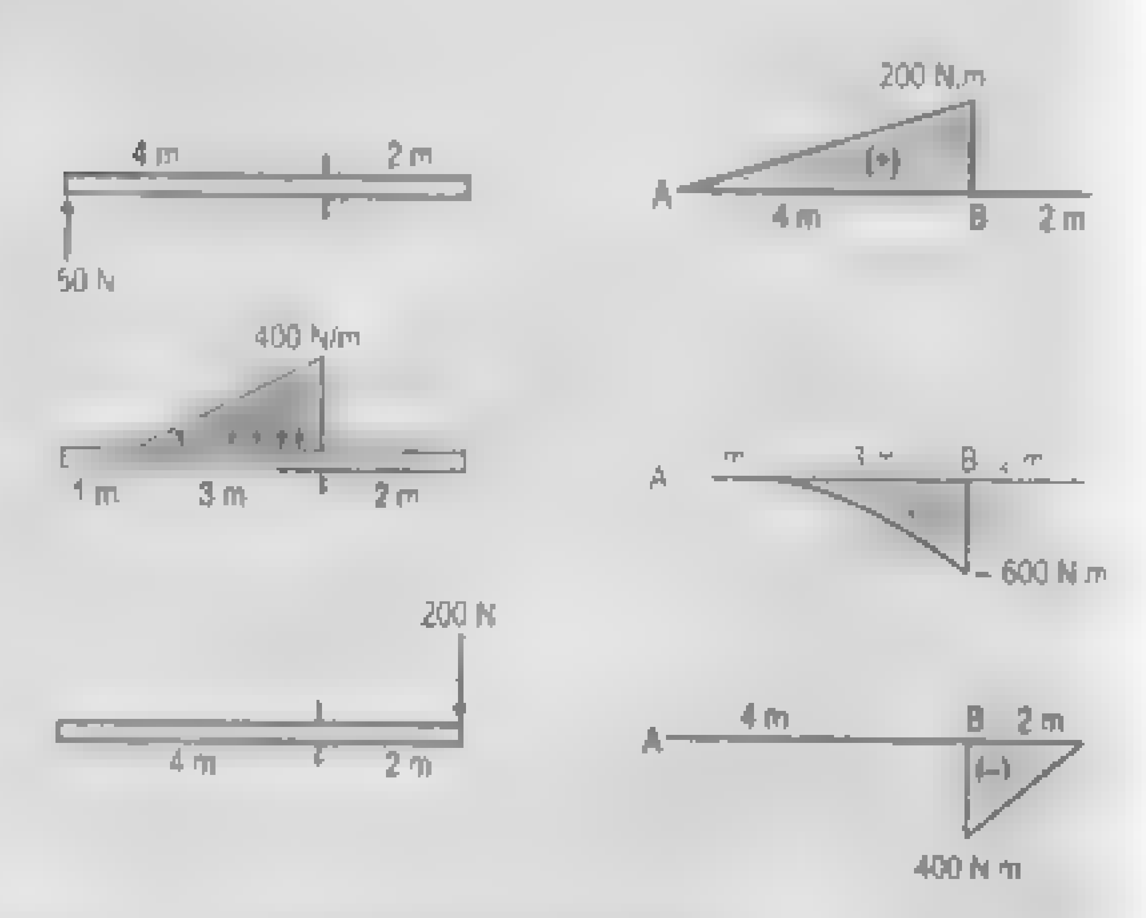
Aplicando las ecuaciones de equilibrio

$$R_2(4) = (200)(6) + \frac{(3)(400)}{2}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)(3)\right) \;\Rightarrow\; R_2 = 750\ \text{N}$$

Equilibrio en el eje vertical

$$R \; + \; R \quad \frac{3)(400}{2} + 200 \quad \Rightarrow \quad R_{,} = 50 \text{ N}$$

Elaboramos diagramas de momentos por partes 200 N m (respecto a B)



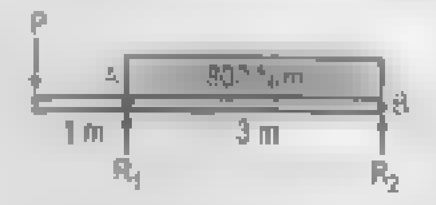
Debido a que nos piden $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$, calcularemos solo los momentos de áreas de aquellas que se encuentran comprendidas entre A y B respecto de A

$$\bar{x}_A \quad \frac{(4)(200)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(4) - \frac{(3)(600)}{4}\left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)3\right)$$

$$\text{área})_{AB}\, \bar{x}_A = \;\; 463.33 \text{ N}$$

Debido al signo que se obtiene, la tangente a la elástica en el punto B desciende a la derecha

1 Determinar el valor de P en la viga de la figura, de manera que el momento respecto de A del área de momentos entre los apoyos sea nulo. ¿Qué significado físico tiene este resultado?



Resolución

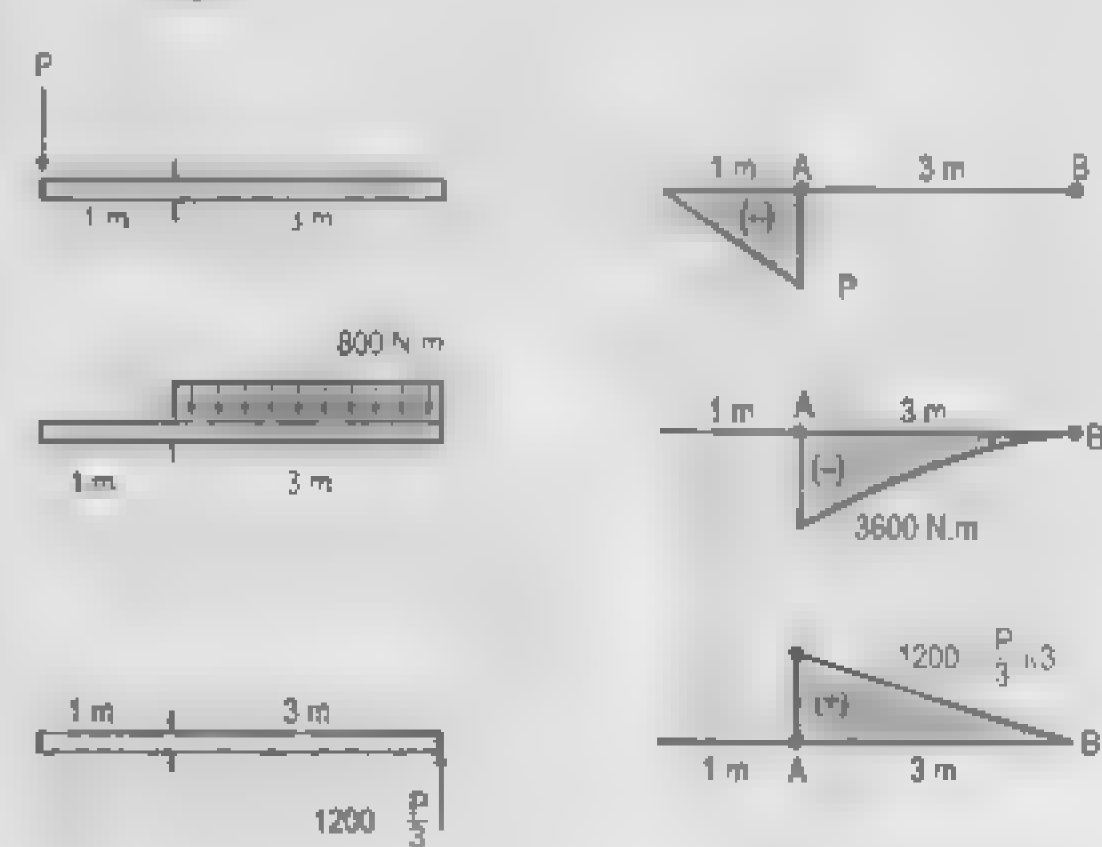
Aplicando el equilibrio a la viga. ($\Sigma M_B = 0$)

$$(P)(4) - (R_1)(3) + \frac{(800)(3)^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 1\,200 + \frac{4}{3}P$$

Del equilibrio en el eje vertical

$$R_1 + R_2 = P + (3)(800) \quad \Rightarrow \quad R_2 = 1200 - \frac{P}{3}$$

Elaboramos diagramas de momentos por partes (respecto de A)



$(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_A = 0$ (condición del problema)

$$(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_A = \frac{(3)(3600)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(3) + \frac{\left(1200-\frac{P}{3}\right)(3)(3)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(3) = 0 \quad \dots (1)$$

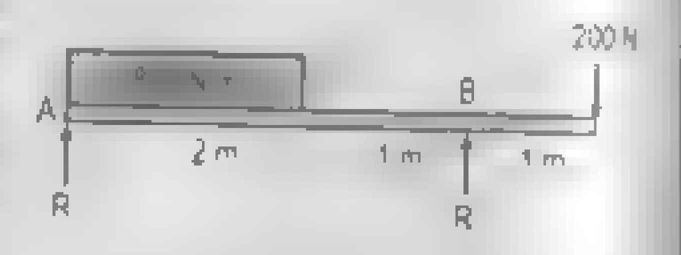
De (1): $P = 1800\ N$

Interpretación sabemos: $t_{B/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_B$

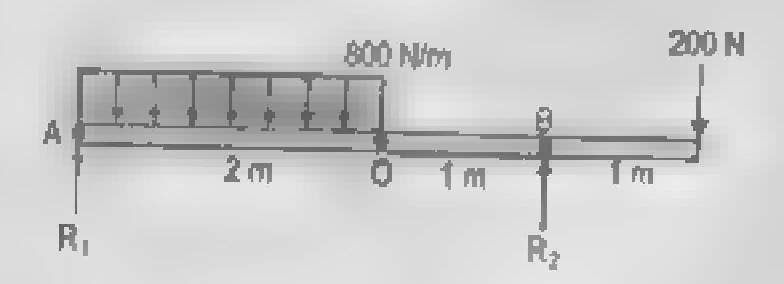
Entonces: $(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_A = t_{AB}\ EI = 0$

Esta última expresión nos indica que la tangente a la viga en B pasa por A

6.32 En la viga de la figura calcule el valor de $(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_A$. De acuerdo con el resultado obtenido determinar si la tangente a la elástica en el punto B se dirige hacia arriba o hacia abajo de izquierda a derecha. Indicación: tener en cuenta la ecuación (6.5) y la figura 6.10



Resolución:



Del equilibrio

$\Sigma M_A = 0$

$(R_2)(3) = (4)(200) + (800)(2)(1)$

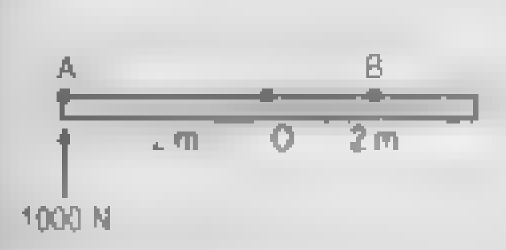
$R_2 = 800\ N$

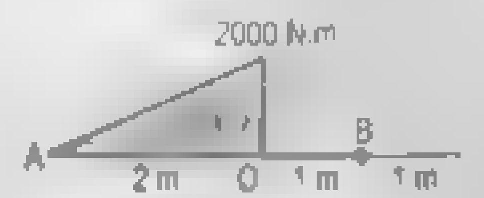
Del equilibrio en el eje vertical

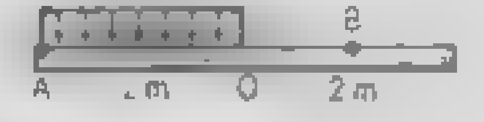
$R_1 + R_2 = 200 + (2)(800)$

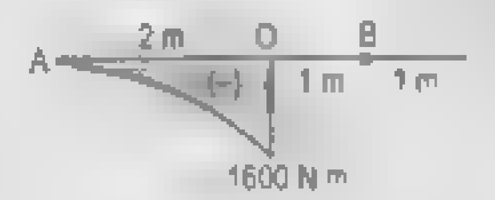
$R_1 = 1000\ N$

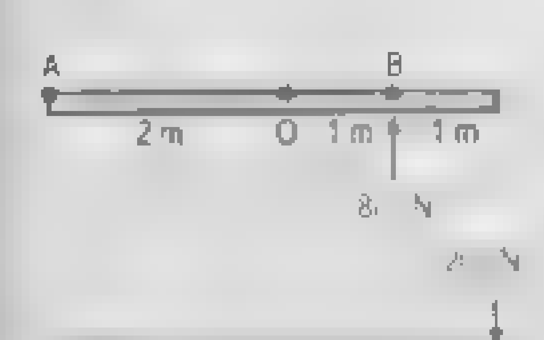
Elaborando los esquemas de cargas en volado y diagramas de momentos por partes

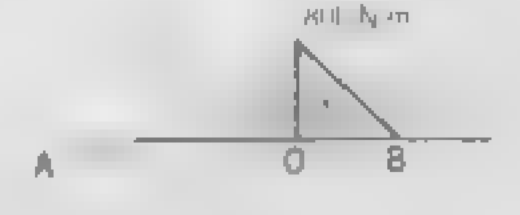


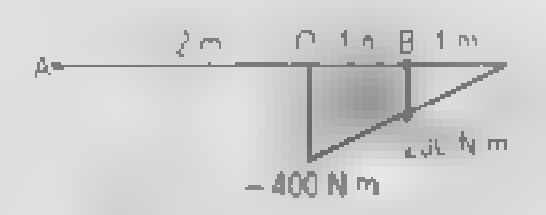












Como nos piden $(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_A$, entonces calculamos los momentos de áreas de aquellas que se encuentran ubicadas entre A y B, con respecto de A

$$(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_A = \frac{(2)(2000)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2) - \frac{(2)(1600)}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(2) + \frac{(1)(800)}{2}\left(2+\left(\frac{1}{3}\right)(1)\right) - (200)(1)(2+0.5)$$

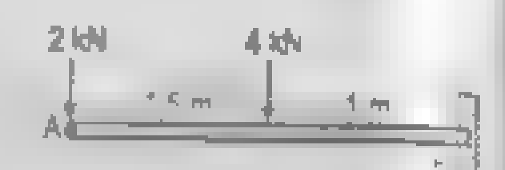
$(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_A = 127\ kN.m$

Debido al signo la tangente a la elástica en el punto B se dirige hacia arriba a la derecha.

Nota. en (1) solo se ha utilizado las zonas achuradas de los diagramas de momentos por partes

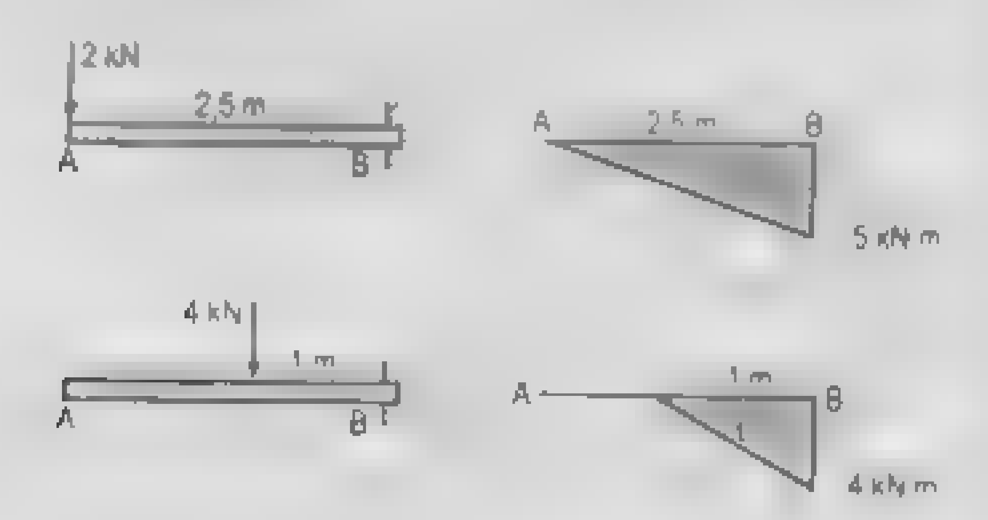
633, 634 y 635. problemas ilustrativos.

636 La viga en voladizo de la figura tiene una sección de 50 mm de ancho y h mm de altura. Determinar h de manera que la deflexión máxima sea de 10 mm y teniendo E = 10 × 10⁹ N/m²



Resolución:

Determinamos los diagramas de momentos por partes (respecto a B)



Nos piden

$\delta_A = -t_{AB}$ ...(1) , $t_{AB} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A$ ...(2)

$$(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A = -\frac{(5)(2,5)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2,5) - \frac{(1)(4)}{2}\left(1,5+\left(\frac{2}{3}\right)(1)\right)$$

$(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A = -14,75$ kN m

Del enunciado del problema tenemos.

$E = 10 \times 10^9\ \frac{N}{m^2}$; $\delta_A = 0,01$ m

$$\frac{0,05h^3}{12} \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (2)

$EI\,t_{AB} = (\text{área})_{AB}\,.\,\bar{x}_A \Rightarrow EI(-\delta_A) = (\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A$

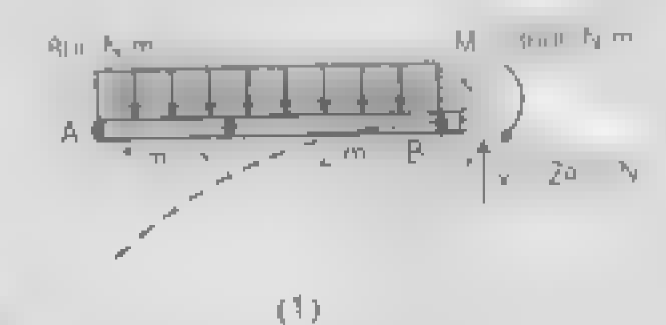
Reemplazando valores

$(10 \times 10^9)(I)(-0,01) = -14,75 \times 10^3 \Rightarrow I = 1,475 \times 10^{-4}\ m^4$

De (3): $\frac{0,05h^3}{12} = 1,475 \times 10^{-4}\ m^4 \Rightarrow h = 0,328$ m

Sobre la viga de la figura actua una carga repartida hacia abajo. Calcular la deflexión, a 2 m de la pared. Si E = 10 × 10⁹ N/m² e I = 20 × 10⁶ mm⁴

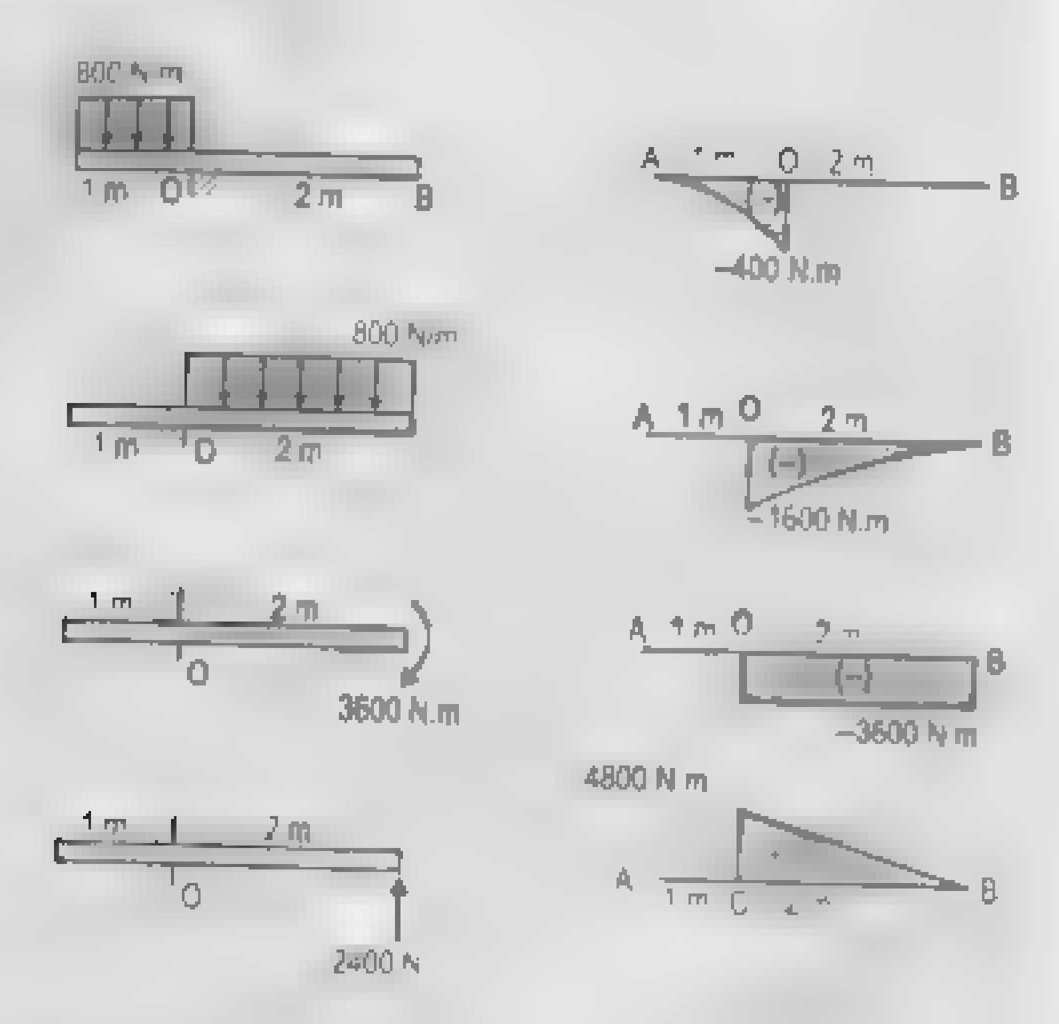
Resolucion



Nos piden δ_O (1)

Como $t_{OB} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{OB}\ \bar{x}_O$ ...(2)

Elaboramos los diagramas de momentos por partes a partir de los esquemas de vigas en volado (respecto de O)



Nota: solo se consideran las áreas ubicadas entre "O" y "B".

$$(\text{área})_{OB}\,\bar{x}_O = \frac{-(1600)(2)}{3}\left(\frac{1}{4}\cdot 2\right) - (3600)(2)\left(\frac{2}{2}\right) + \frac{(2)(4800)}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot 2\right) \ [\text{illegible}]$$

$$(\text{área})_{OB}\,\bar{x}_O = -4533{,}33\ \text{N.m}^3$$

Reemplazando en (2):

$$t_{AB} = (-4533{,}33)\frac{1}{10 \ [\text{illegible}]\ 0\ \ 20\ \ 10}$$

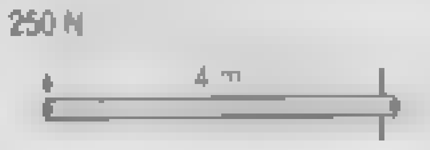
$$t_{AB} = -0{,}02266\ \text{m}$$

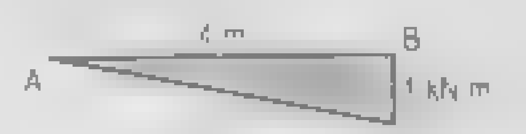
De (1): $\boxed{0 \ \ 22{,}66\ \text{mm}}$

Resolución:

Nos piden: $EI\delta_A$ ... (1)

Calculamos $t_{AB} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A$ ... (2)





$$(\text{área})_{AB}\,\bar{x} = \frac{(1)(4)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(4) + (2)(2)(2 + 1 \ [\text{illegible}]$$

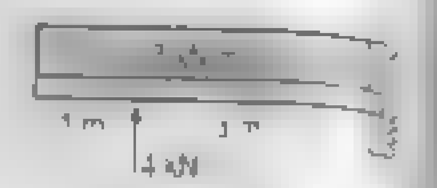
$$(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A = 6{,}67\ \text{kN.m}^3$$

En (1): $EIt_{AB} = 6{,}67\ \text{kN m}^3$

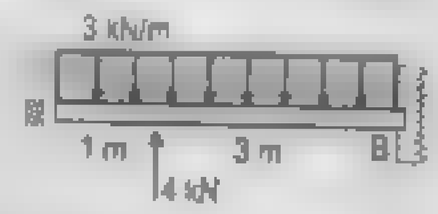
[illegible] $EI\delta_A = -6{,}67\ \text{kN m}^3$

El signo negativo que se observa en la respuesta nos indica que el punto A se ha desplazado hacia arriba.

639 En la viga en ménsula de la figura determinar la deflexión en el extremo libre dado que E = 10 x 10 N/m² e I = 60 x 10⁶ mm⁴



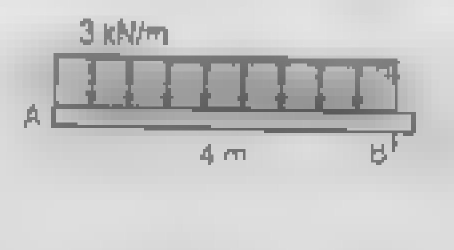
Resolución

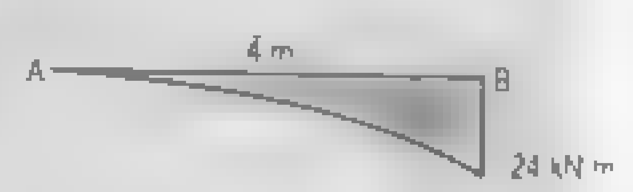


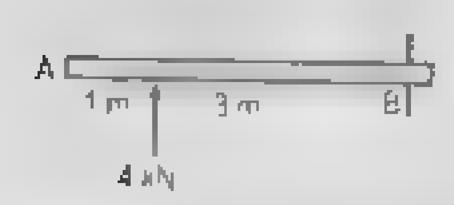
Se requiere calcular t_{A} ...(1)

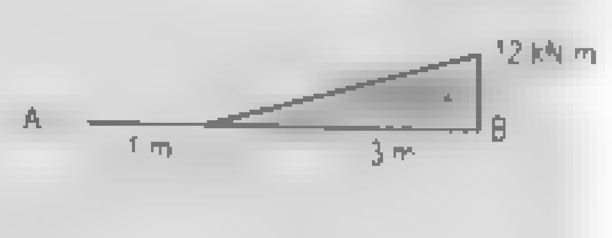
pero $t_{AB} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$ ...(2)

Elaboramos los diagramas de momentos por partes (respecto a B)









área $\bar{x}_A$ ... $\frac{4 \quad 21}{3}$ $\frac{3}{4}$ 4 $\frac{3 \quad 2}{2}$ 1 $\frac{2}{3}$ 3

(área) $\bar{x}$ = 42 kN m

Del dato del problema

$E = 10 \times 10^9\ N/m^2$, $I = 60 \times 10^{-6}\ m^4$

Reemplazando en (2)

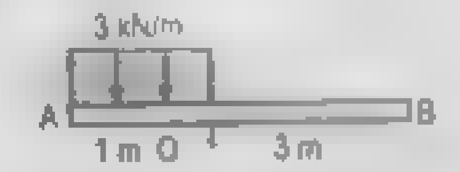
$t_{AB} = \left(\frac{1}{10\times10^9\times60\times10^{-6}}\right)(-42\times10^3) \rightarrow t_{AB} = -0.07\ m$

De 1 ...

Del signo se observa que el punto se ha desplazado hacia abajo.

640 En la viga de la figura del problema 639 calcular la deflexión en el punto de aplicación de la carga concentrada ¿Qué sentido tiene?

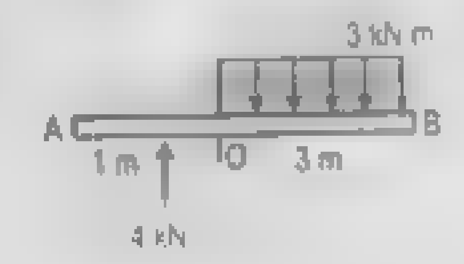
Resolucion.

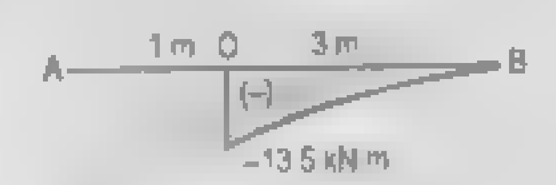


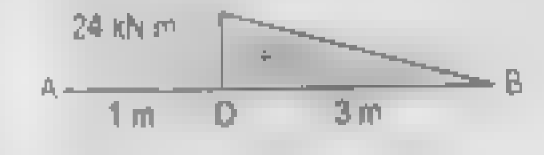
Se requiere ... 1

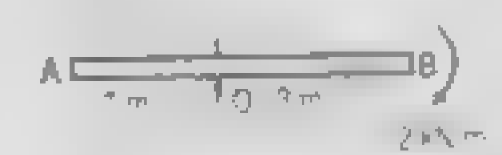
Como $t_{OB} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{OB}\ \bar{x}_O$ (2)

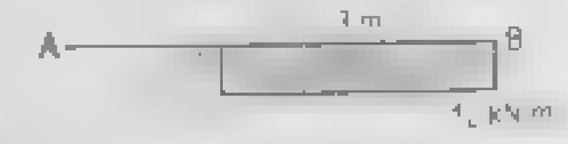
Diagramas de momentos por partes











Considerando ... que se ... C ... B

$$(\text{área})_{OB}\,\overline{x}_O = -\frac{(3)(13.5)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(3)+\frac{(3)(24)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(3)-(3)(12)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$(\text{área})_{OB}\,\overline{x}_O = -28{,}125\ \text{kN.m}$$

Del dato del problema, $E = 10\times10^{9}\ \frac{N}{m^2}$ ... $60\times10^{-6}\ m^4$

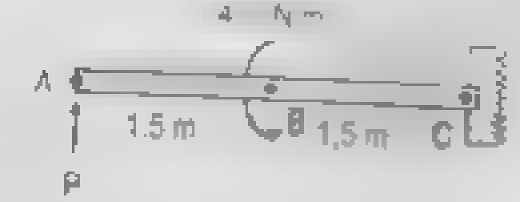
Reemplazando en (2)

$$t_{OB} = \left(\frac{1}{10\times10^{9}\times60^{6}\times10^{-6}}\right)\ \ldots$$

De (1): $\boxed{\delta_O = 46.87\ \text{mm}}$

Del signo de δ_O vemos que el punto se ha desplazado hacia abajo

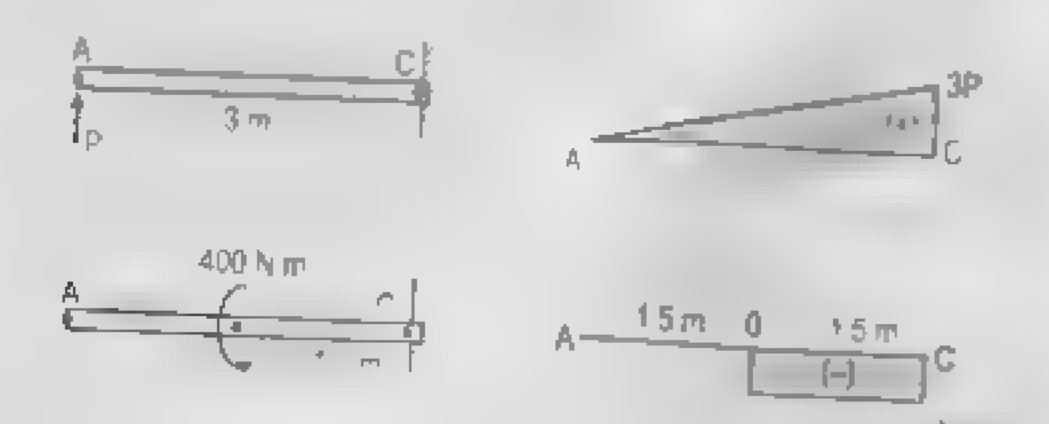
64 ... A



Resolución

$\delta_A = 0$, como $\delta_A = t_{A/C} = 0$ ...(1)

Calculamos $t_{A/C}$

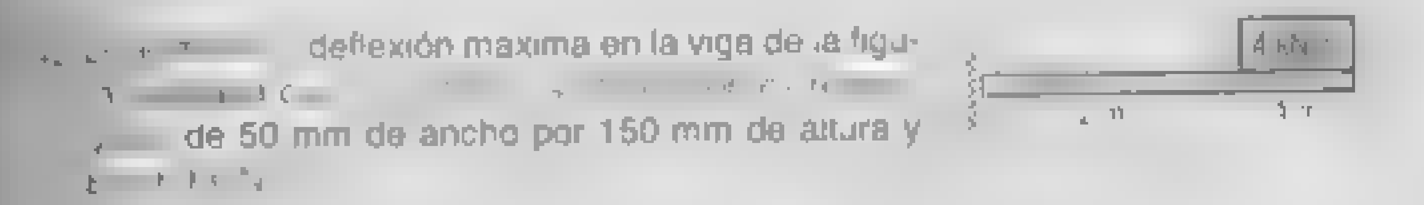


$$(\text{área})_{AC}\,\overline{x}_A = \ldots \frac{3P)(2}{}\ldots(3) \quad (400)(1.5)\left(1.5 \ldots \frac{1.5}{2}\right)$$

$$(\text{área})_{AC}\,\overline{x}_A = (9P-1350)\ \text{N.m}^3$$

De (1): $\left(\frac{1}{EI}\right)(9P-1350) = 0$, por lo tanto $\boxed{P = 150\ N}$

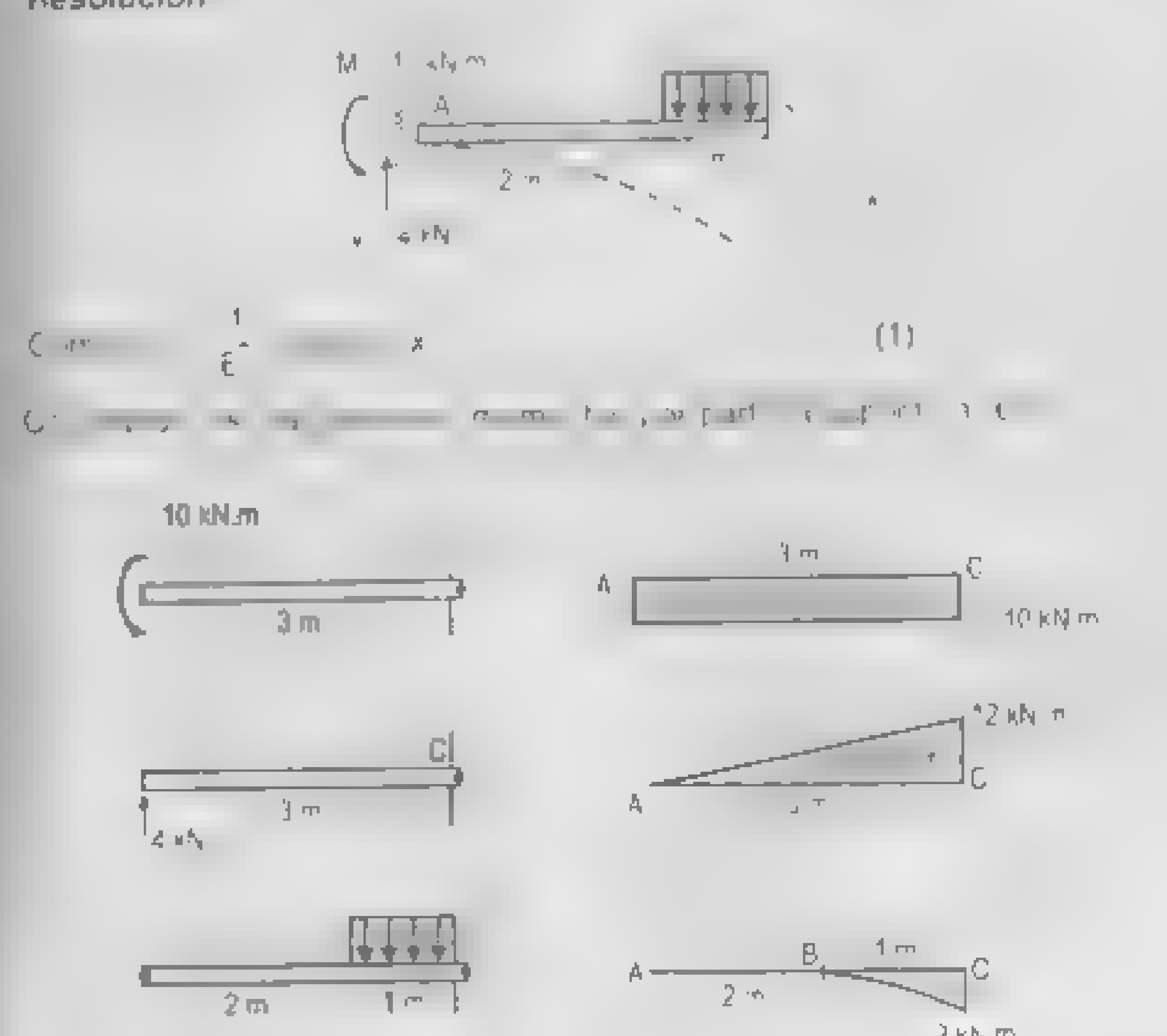
... deflexión máxima en la viga de la figura ... de 50 mm de ancho por 150 mm de altura y ...



Resolución

... $\frac{1}{E}$ ... (1)

...



$(\text{área})_{CA}\ \bar{x}_C = (10)(3)\left(\frac{1}{2}\right)(3) + \frac{(3)(12)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(3) \quad \frac{(1)(2)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(1)$

[illegible]

De los datos del problema

$E = 69 \times 10^9\ N/m^2 \Rightarrow$ [illegible]

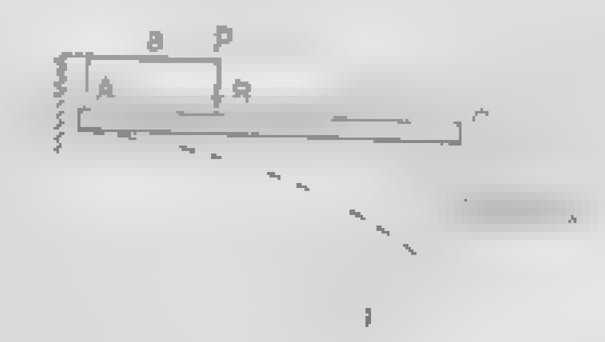
Reemplazando en (1)

[illegible] $\Rightarrow t_{CA} = -0.02812\ m$

[illegible]

643. Hallar el máximo valor de $EI\delta$ en la viga en voladizo de la figura

Resolución:

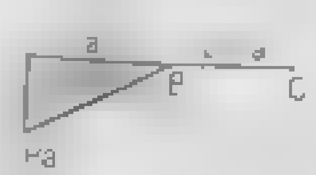


$\delta = -t_{CA}$

El máximo valor de $EI\delta$ sucede en el extremo libre

$t_{CA} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{CA}\ \bar{x}_C$ (2)

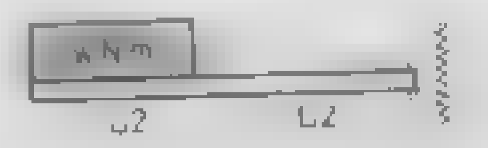
Calculamos



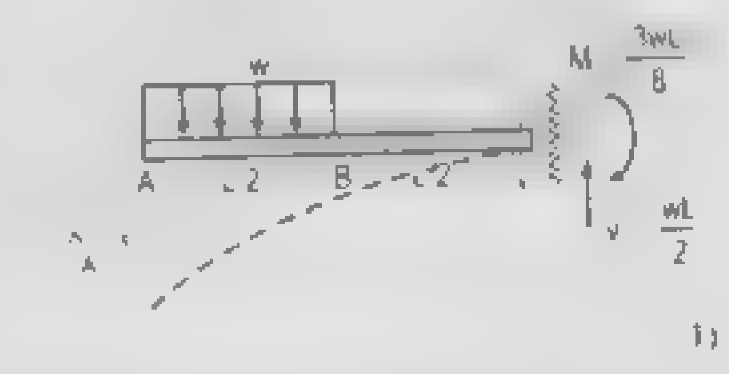
$(\text{área})\ \bar{x} = \frac{a\ Pa}{2}\left(L - a + \left(\frac{2}{3}\right)a\right) \Rightarrow (\text{área})_{CA}\ \bar{x}$ [illegible]

De (2): [illegible] $\frac{1}{EI}\ \frac{Pa}{2}$ [illegible], de (2) observamos [illegible]

644. Determinar la máxima deflexión para la viga de la figura



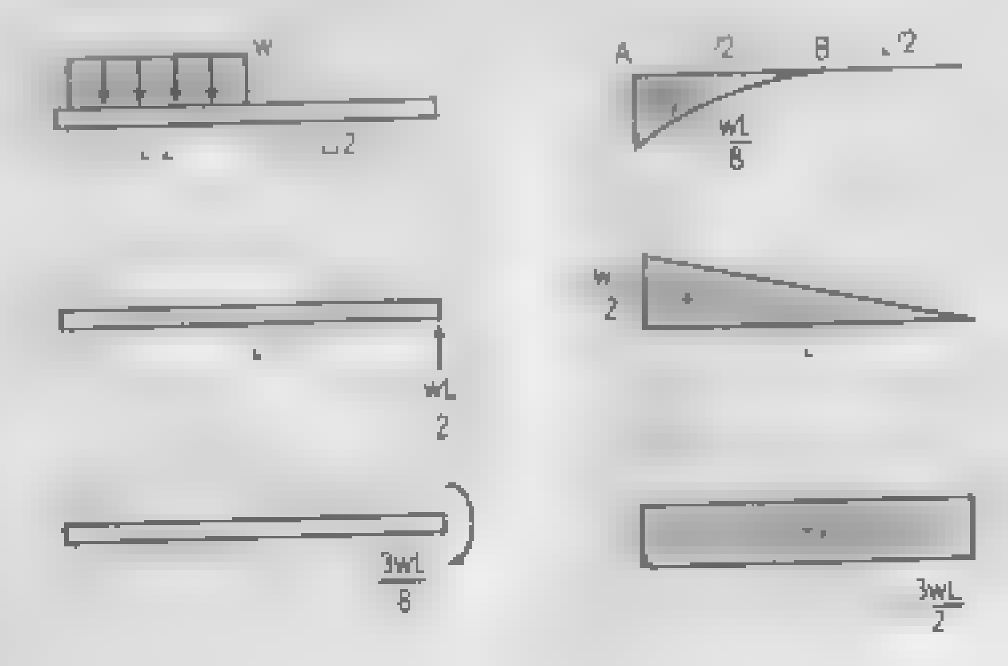
Resolución:

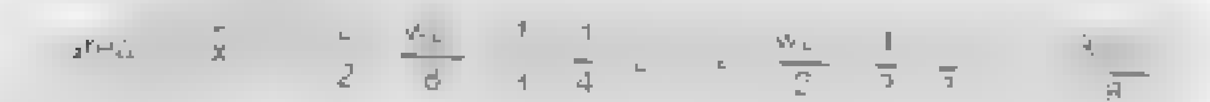


$\delta_A = -t_{AC}$ (1)

$t_{AC} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{AC} \cdot \bar{X}_C$ (2)

Diagrama de momentos por partes (respecto de A)

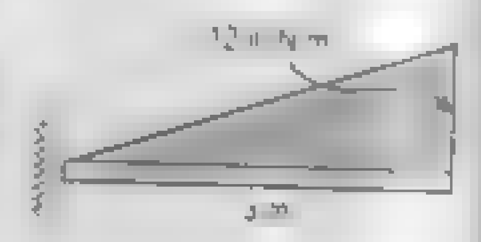


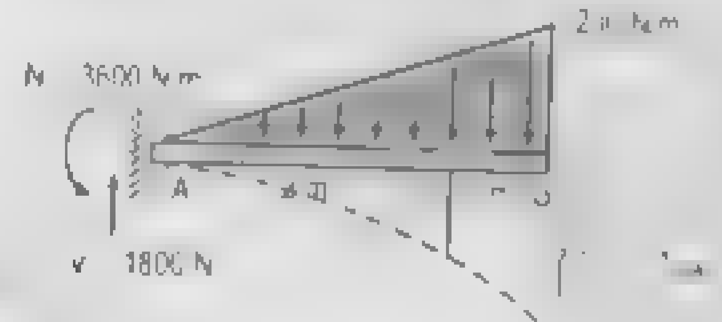


$(\text{área})\,\bar{x} = \frac{41 w L}{384}$

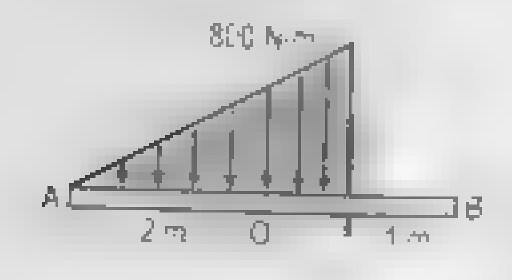
645 ... y la pendiente en un punto a 2 m ... $E = 10$ GN/m² ... $I = 30 \times 10^{-6}$ m⁴

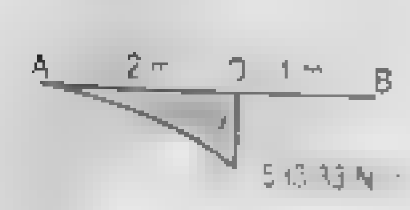
Resolución

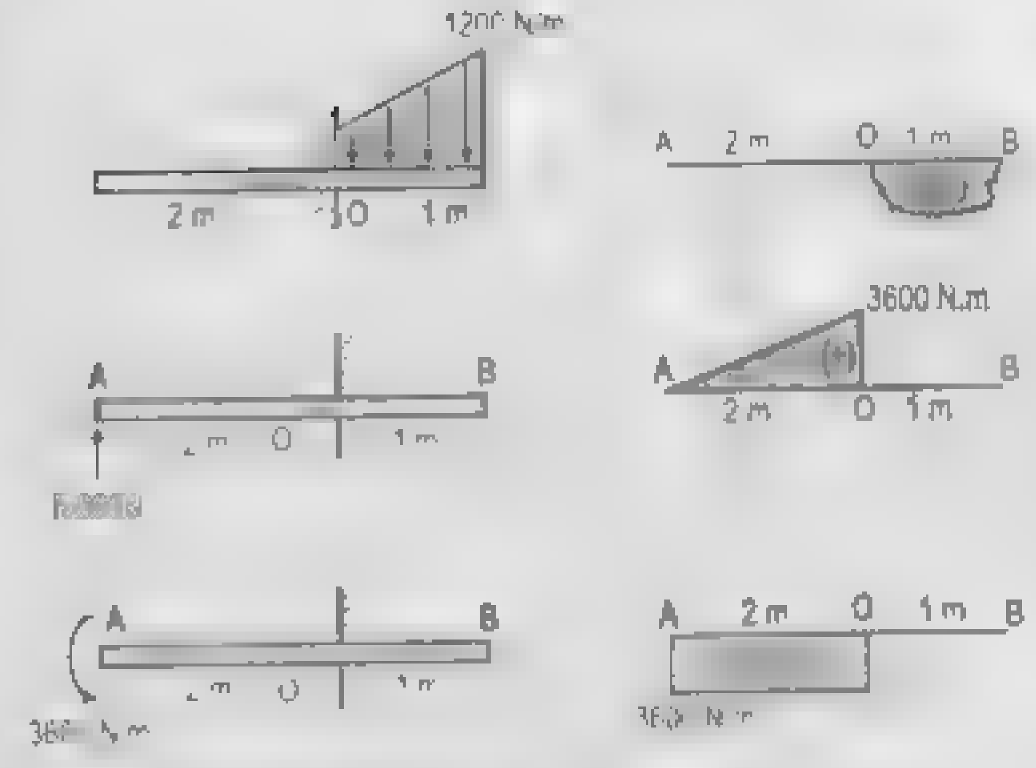




$t_{O/A} = \frac{1}{E I}(\text{área})\,\bar{x}$







... "O" y "A"

$(\text{área})_{AO}\,\bar{x} = -4906.67\ \text{N.m}^3$

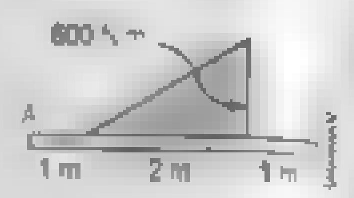
$t_{O/A} = \frac{1}{10 \times 10^{9} \times 30 \times 10^{-6}}(-4906.67)$

$t_{O/A} = -0.01635\ \text{m} \Rightarrow \boxed{\delta_O = 16.35\ \text{mm}}$

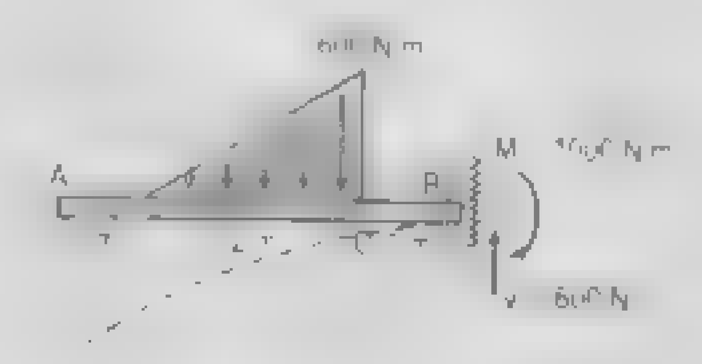
$(\text{área})_{AO} = -3826.665\ \text{N.m}^2$

$\theta = -0.01276$ rad, entonces $\theta = 0.01276$ rad ∴ $\boxed{\theta = 0.73^\circ}$

646 En la viga de la figura, determinar el valor de I, que limite la deflexión máxima a 20 mm, E = 10 × 10⁹ N/m²

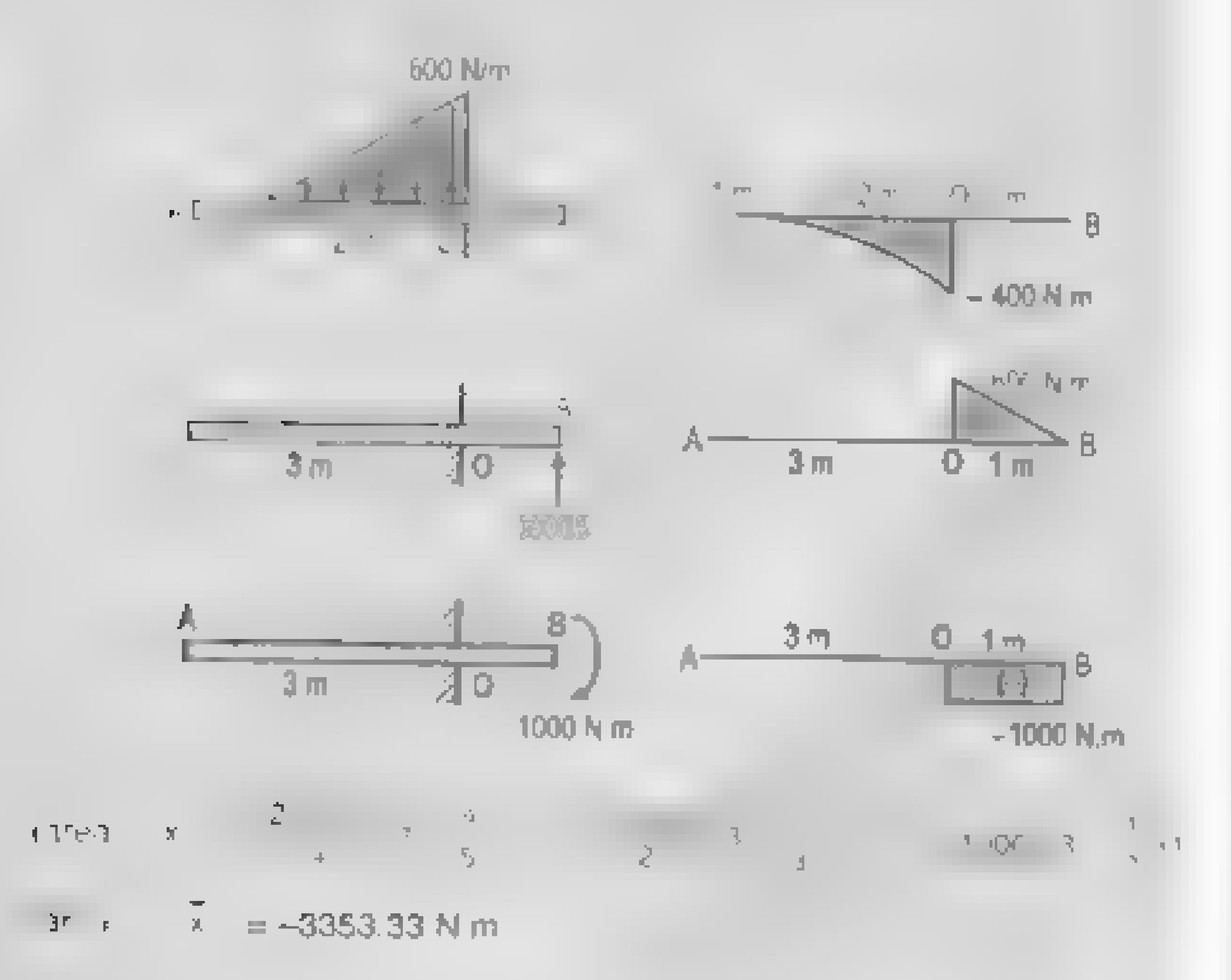


Resolución.



$$t_{AB} = \frac{1}{E}(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A \qquad \ldots (2)$$

Diagrama de momentos por partes (respecto de "O")



[illegible]

(área) $\bar{x}$ = −3353.33 N.m

De los datos del probiema.

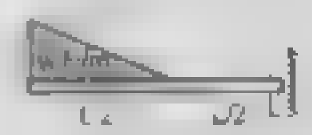
$E = 10 \times 10^9\ N/m^2$; $\delta = 20\ mm = 0.02\ m$; t_{A} = 0.02 m

Reemplazando en (2)

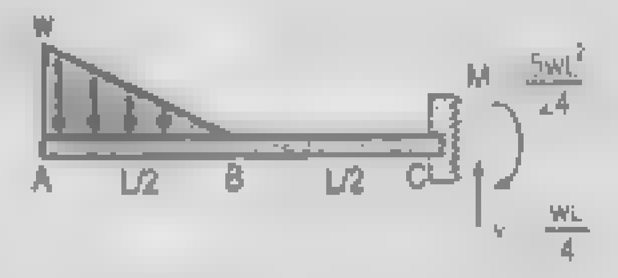
$$0.02 = \frac{1}{10 \times 10^9 \, I}(3353.33)$$

$$I = 1.676 \times 10^{-5}\ m^4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 16.77 \times 10^6\ mm^4}$$

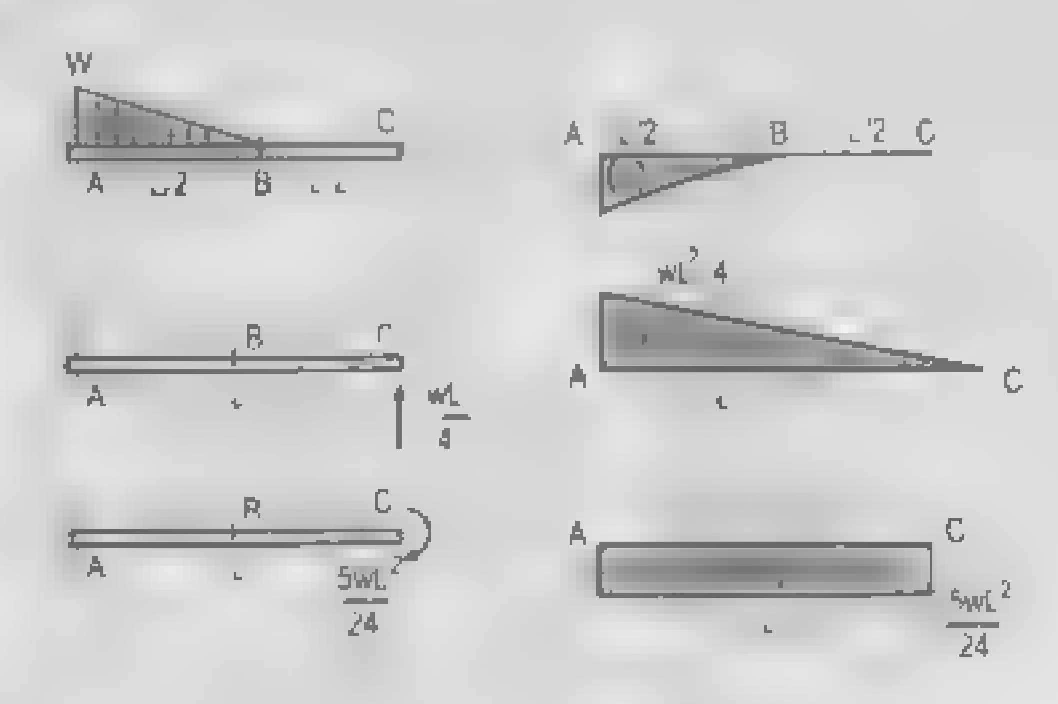
647 Determinar el máximo valor de E.δ en la viga de la figura.

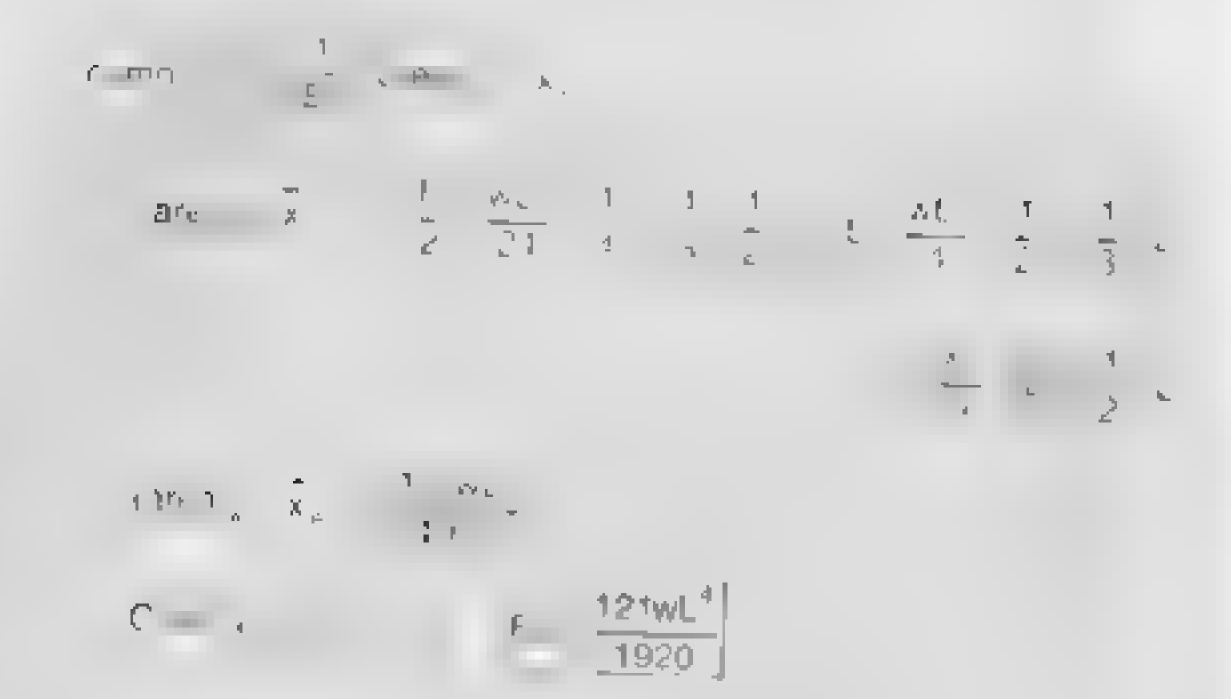


Resolución.

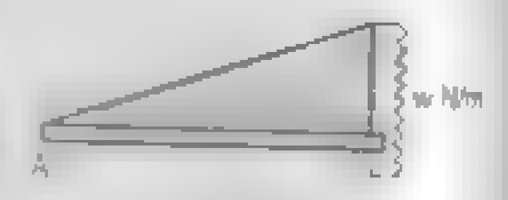


El máximo sucede en el extremo A. Diagrama de momentos por partes respecto de A

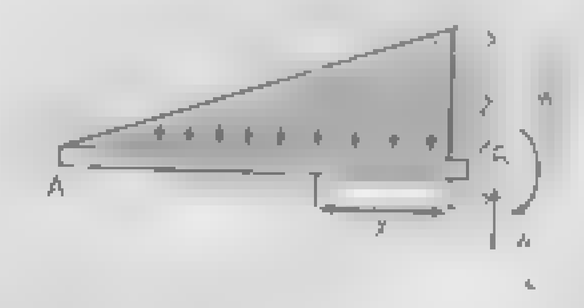




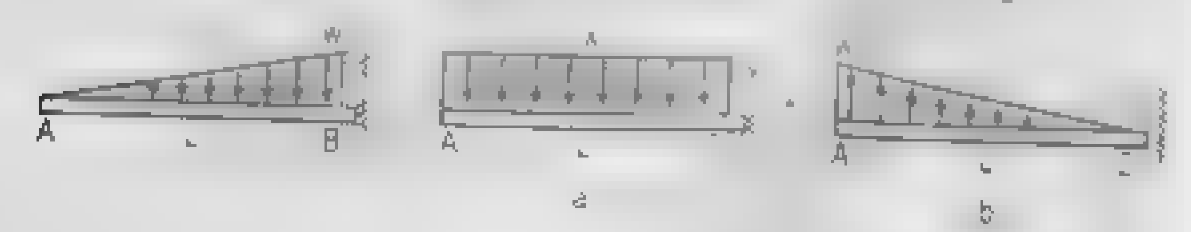
648. La viga en voladizo de la figura soporta una carga uniformemente variable de cero en el extremo libre a w N/m en el empotramiento. Determinar la pendiente y la ordenada ...



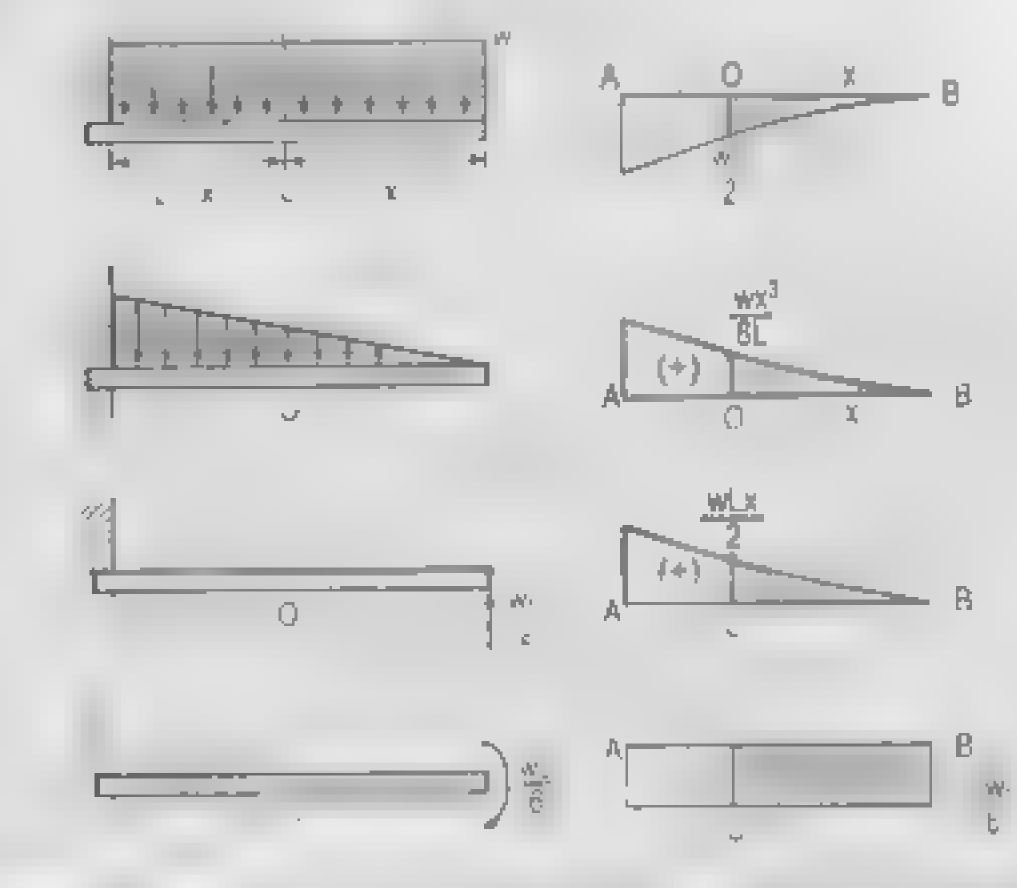
Resolución:



Para resolver el problema hacemos una equivalencia de cargas.



(a) y (b) trazamos las gráficas de momentos por partes (respecto de "A"):



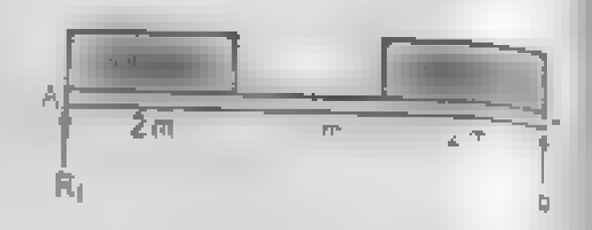
... ntran entre "O" y "B"

$$(\text{área})_{OB}\ \bar{X}_O = \frac{wx^2}{120L}(-5x^2L + x^3 + 10L^2x - 10L^3)$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{wx^2}{120L}\right)(5x^2L - x^3 - 10L^2x + 10L^3)$$

649, 650, 651, 652: problemas ilustrativos

653 Calcular el valor de la deflexión en el punto medio del claro en la viga representada en la figura. *Indicación*: trazar el diagrama de momentos por partes, empezando por el centro del claro hacia los extremos. Por simetría, la tangente en el centro es horizontal.



Resolución:

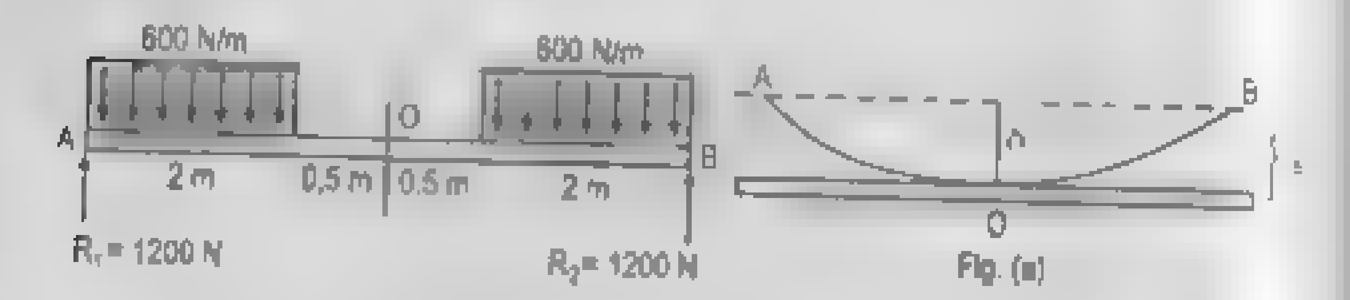
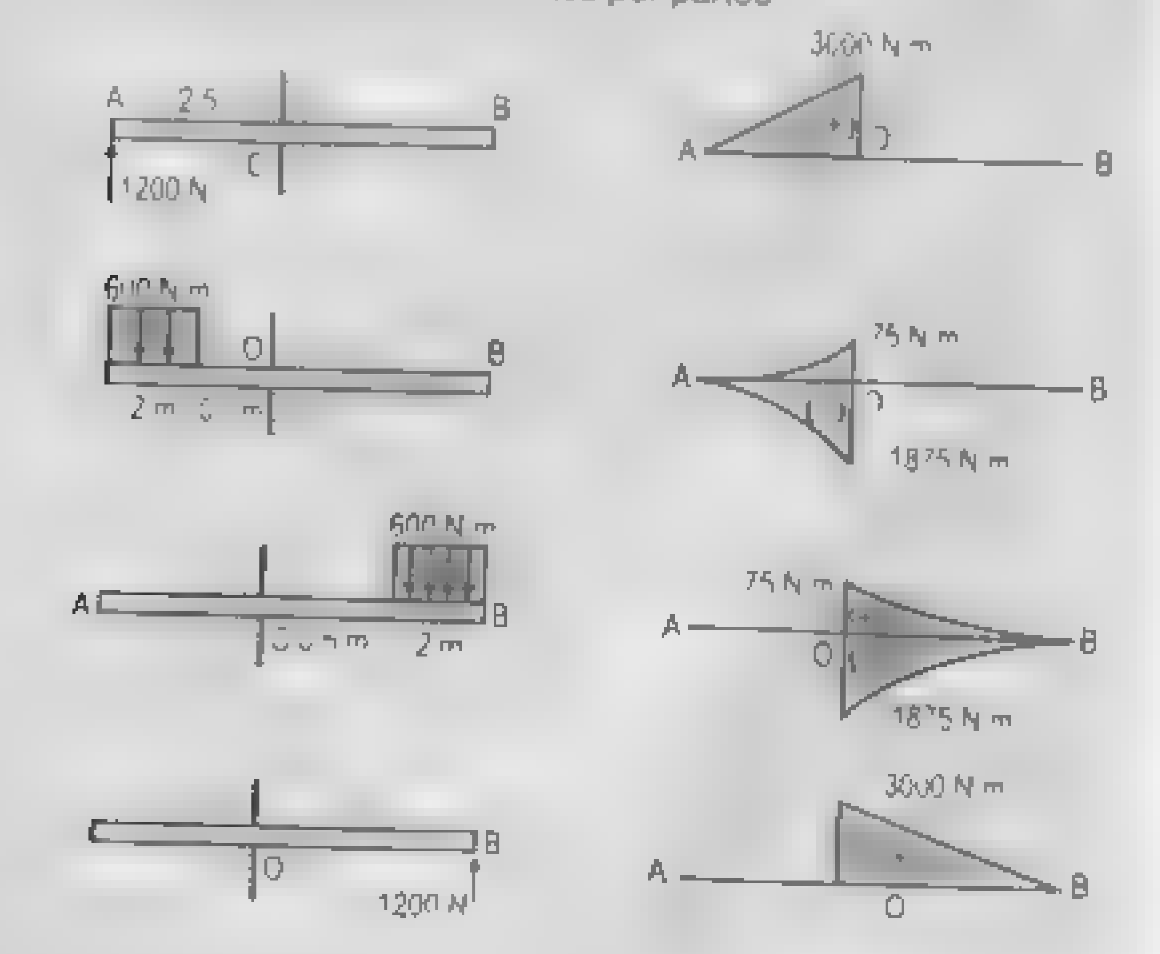


Fig. (a)

Nos piden la deformación en el centro de luz

$$EIt_{B/O} = (\text{área})_{B/O} \cdot \bar{x}_B \qquad ...(1)$$

Dibujando los diagramas de momentos por partes



Debido a que solo se consideran las áreas entre B y O, se consideran solamente las áreas achuradas

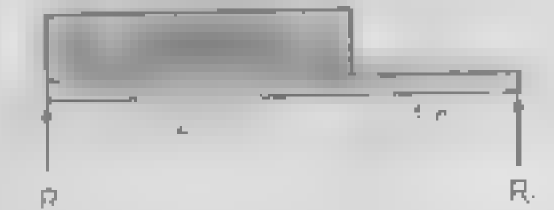
EIt [illegible]

$EIt_{B/O} = 3350\ N.m^3$

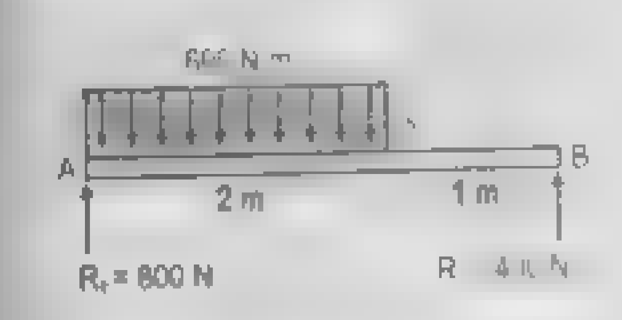
De la figura (a), observamos que $\delta = t_{B/O}$

Por lo tanto: $\boxed{EI\delta = 3350\ N\ m^3}$

654 Determinar el valor de $EI\delta$ a 1 m de R_2 en la viga de la figura. *Indicación*: trazar la tangente de referencia en el apoyo derecho



Resolución



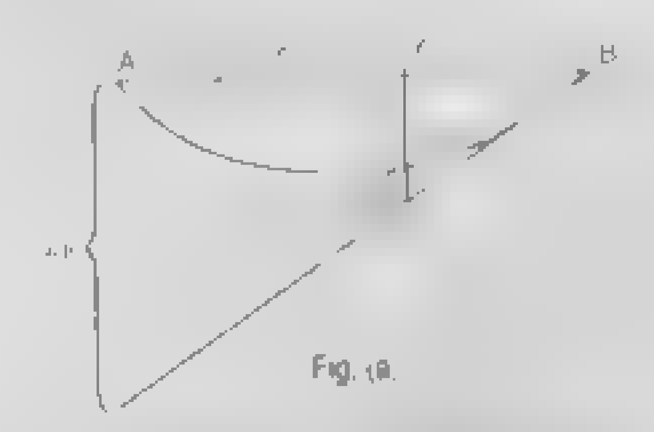
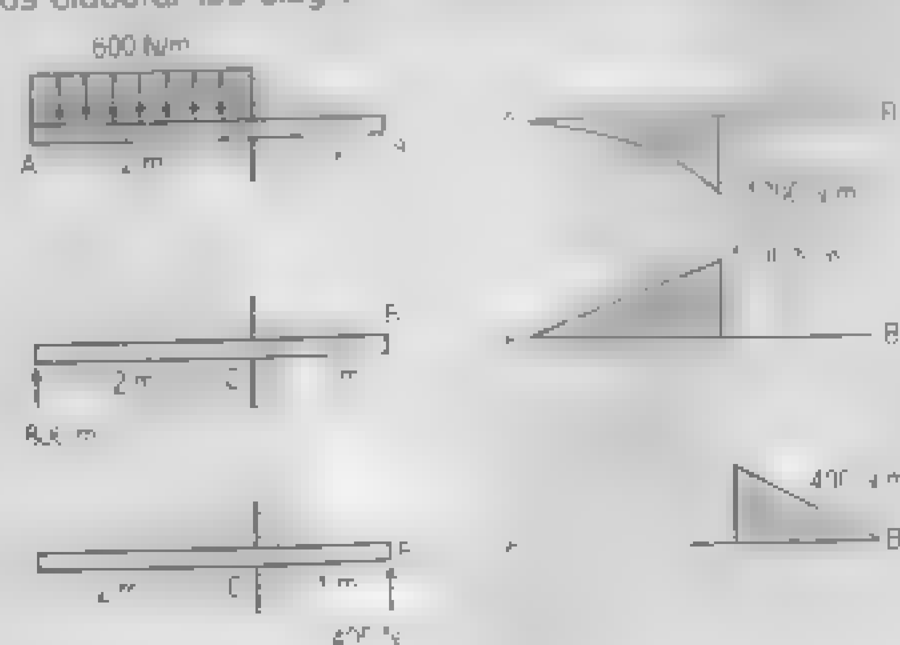


Fig. (a)

El desplazamiento en O es ... Para ello debemos elaborar los diagramas de momentos por partes



$EIt_{AB} = (\text{área})_{AB}\ \bar{x} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)(2) + \frac{(2)(1600)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2$

$EIt_{AB} = 1400\ N.m^3$ ...(1)

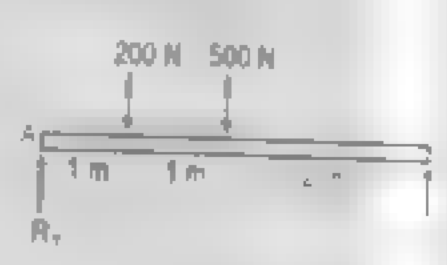
$EIt_{OB} = (\text{área})_{OB}\ .\ \bar{x}_O = -\frac{(1)(400)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1)$

$EIt_{OB} = 66.67\ N.m^3$ ...(2)

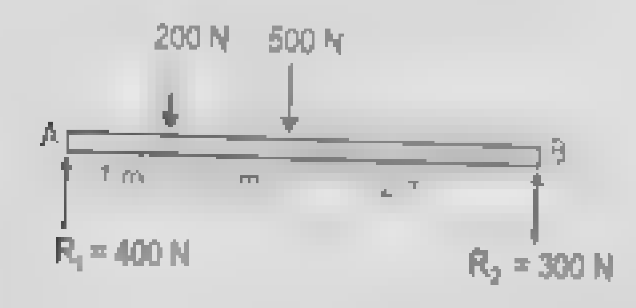
De la figura (a) $\frac{EIt_{A/B}}{3} = \frac{\overline{OO''}}{1} \Rightarrow \overline{OO''} = \frac{EIt_{A/B}}{1}$

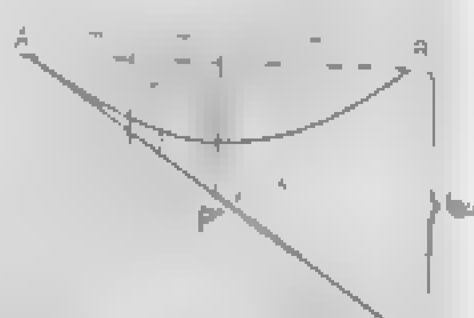
Pero: $\overline{OO''} = EI\delta + EIt_{OB} = EI\delta + 66{,}67 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 400\ N}$

655. Obtener el valor de EIδ bajo la carga concentrada de la viga de la figura

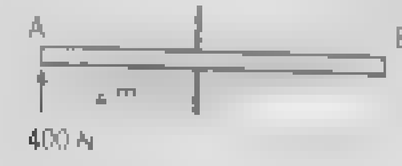


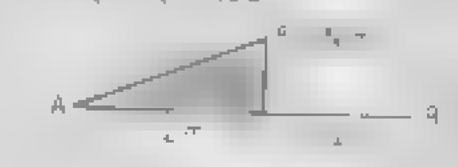
Resolución:

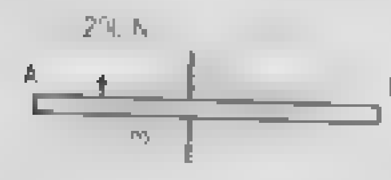


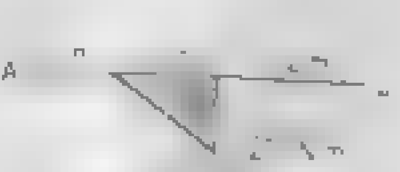


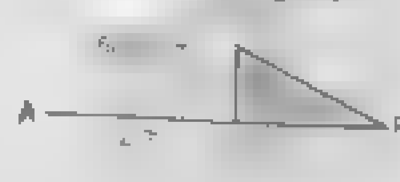
Elaborando los diagramas de momentos por partes











$2 + \left(\frac{1}{3}\right)(1)\Big) + \frac{(2)(600)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2)$

$E \ldots = 2700\ N\ m^3$

$= 500\ N\ m^3$

De la figura (a) $\frac{EIt_{B/A}}{4} = \frac{\overline{PP''}}{2}$

$\overline{PP''} = EI\delta_2 + EIt_{P/A}$

$1350 = EI\delta_2 + 500$

$EI\delta_2 = 850\ N\ m^3$

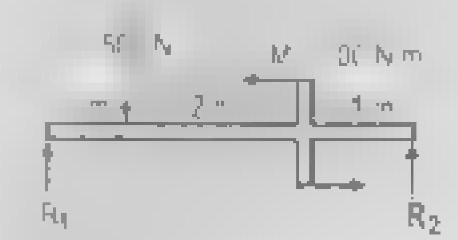
$EIt_{OA} = (\text{área})_{OA}\ \bar{x}_O = \frac{(1)(400)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1) = 66{,}67\ N.m^3$

De la figura (a) ... $675\ N\ m^3$

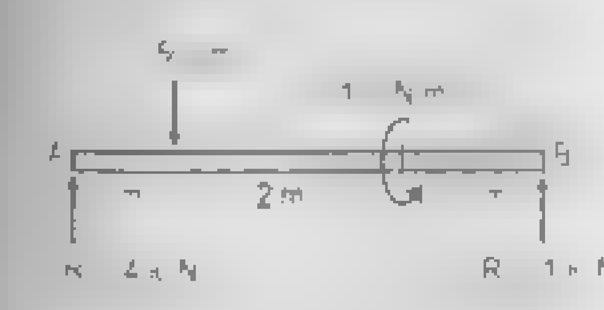
Pero: $\overline{OO''} = EI\delta_1 + EIt_{O/A}$

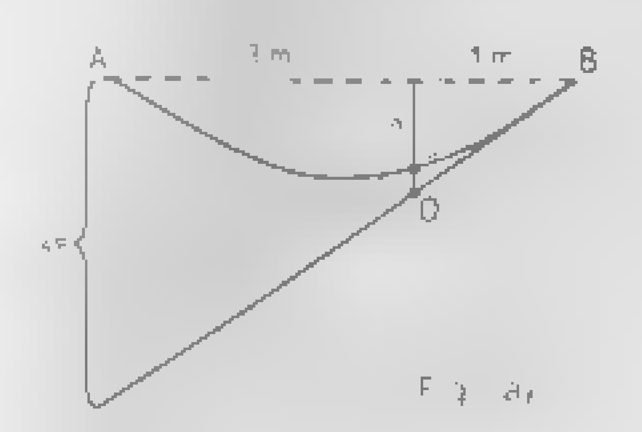
$675 = EI\delta_1 + 66\ 75 \qquad EI\delta_1 = 608{,}25\ N.m^3$

... lar el valor de EIδ bajo la carga concentrada ... 100 N m en la viga representada en la figura

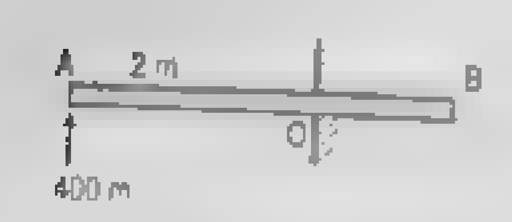


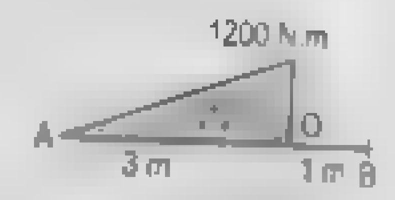
Resolución

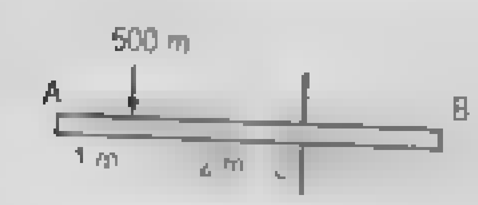


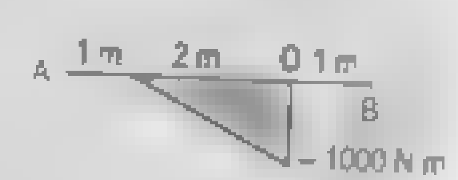


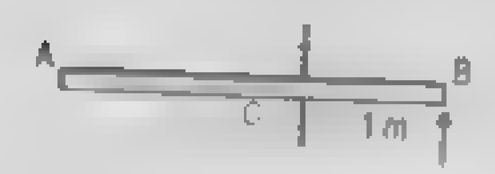
Diagramas de momentos por partes.











Calculando

$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$

$EIt_{A/B} = \frac{(3)(1200)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3)$ [illegible]

$EIt_{A/B} = 1433.34$ N m³

Ahora $EIt_{O/B} = (\text{área})_{OB}\ \bar{x}_O$

$$EIt_{O/B} = \frac{(1)(100)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1) = 16{,}67 \text{ N.m}^3$$

De la figura (a) tenemos:

$$\frac{EIt_{A/B}}{4} = \frac{\overline{OO''}}{1}; \quad \overline{OO''} = \frac{EIt_{A/B}}{4} = 358.335 \text{ N.m}^3$$

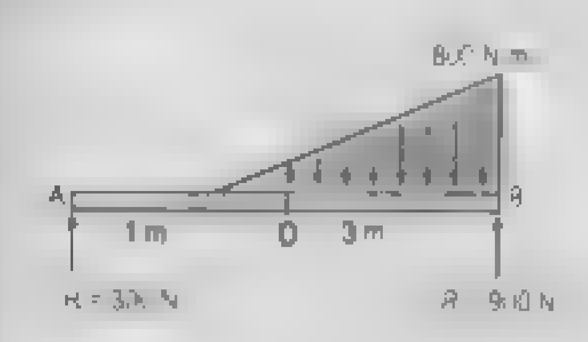
También de la misma figura observamos

$OO'' = EI\delta + EIt_{OB}$

$358{,}335 = EI\delta + 16{,}67 \Rightarrow$ $\boxed{EI\delta = 341.66 \text{ N}\ldots}$

Calcular la deflexion en el centro de la viga que representa la figura

Resolución:



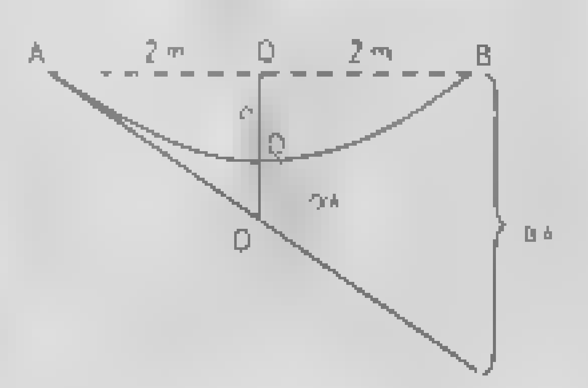
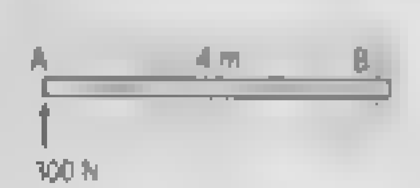
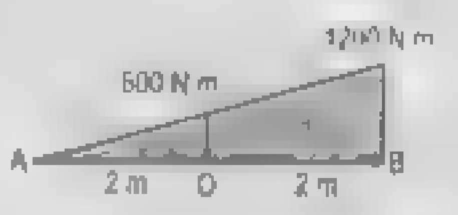
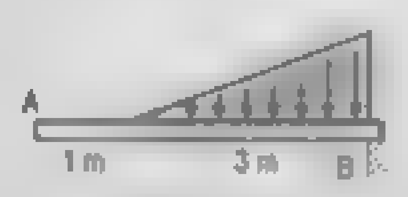


Diagrama de momentos por partes







Como: $EIt_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B$

$$EIt_{B/A} = \frac{(4)(1200)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(4) - \frac{(3)(1200)}{4}\left(\frac{1}{5}\right)(3) \Rightarrow EIt_{B/A} = 2660 \text{ N.m}^3$$

También. $EIt_{O/A}(\text{área})_{OA}\ \bar{x}_O$

$$EIt_{O/A} = \frac{(2)(600)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2) - \frac{(1)(133.33)}{4}\left(\frac{1}{5}\right)(1) \Rightarrow EIt_{O/A} = 393.33 \text{ N.m}^3$$

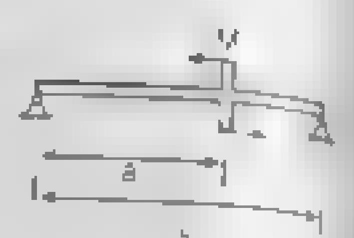
De la fig. (a): $\frac{EIt_{B/A}}{4} = \frac{\overline{OO''}}{2}$; $\overline{OO''} = \frac{EIt_{B/A}}{2} = 1330$ N.m³

También, del mismo gráfico

$EI\delta + EIt_{O/A} = OO'' \Rightarrow EI\delta + 393{,}33 = 1330$

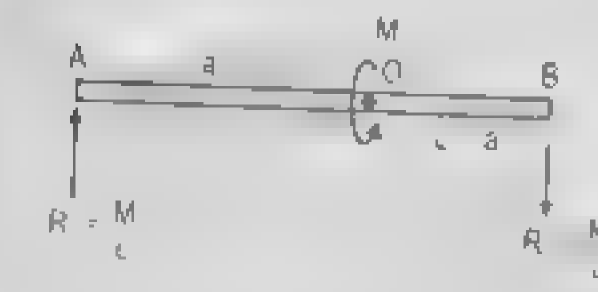
$EI\delta = 936.67$ N m³

658 En la viga que representa la figura, determinar ... de EI ... en el punto de aplicación del par M



Resolución

Deformada



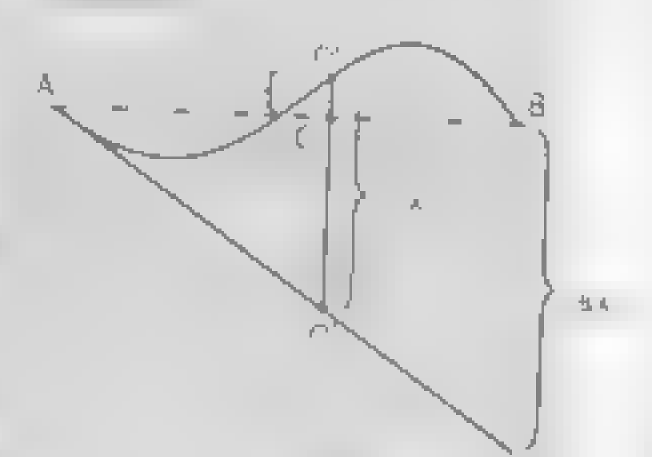
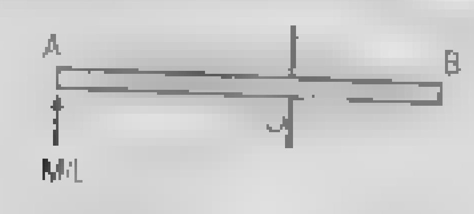
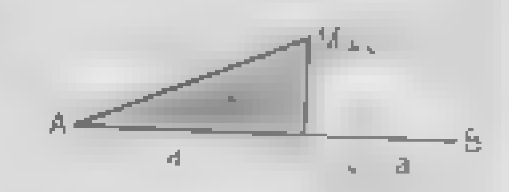
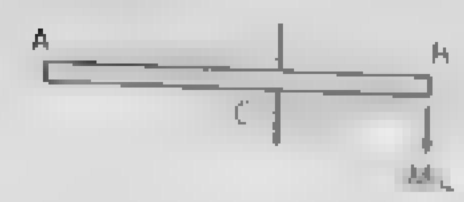
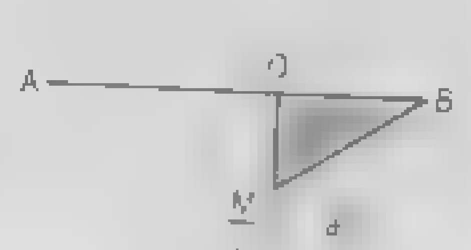


Diagrama de momentos por partes









$EIt_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B$

$EIt_{B/A} = \left(\frac{M}{6}\right)(-3a^2 - 2L^2 + 6La)$

$EIt_{O/A} = (\text{área})_{OA} \cdot \bar{x}_O$

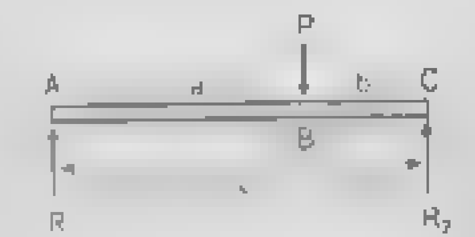
Del gráfico de la deformada.

$y = \overline{OC} - t$

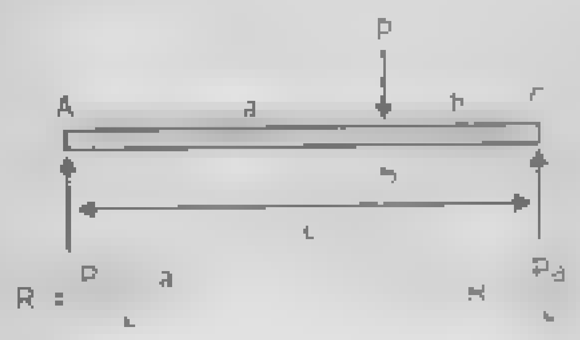
Reduciendo términos

$$\frac{Ma}{3L}(L^2 - 3La + 2a^2)$$

... viga simplemente apoyada soporta una carga concentrada aplicada en un punto cualquiera de su claro, como se indica en la figura. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia de



Resolución



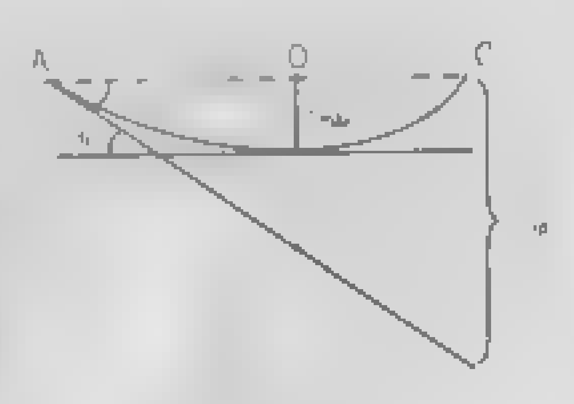
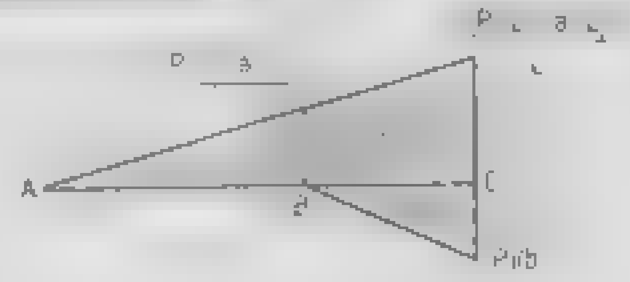


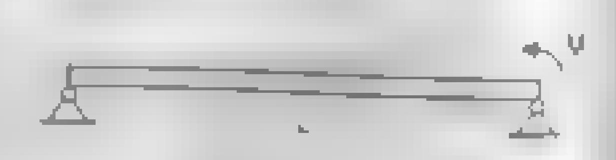
Diagrama de momentos por partes



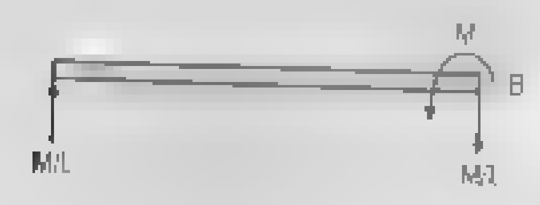
$\theta_{AO} = \dfrac{P(L-a)x^2}{2EIL}$ ... (1)

Reduciendo términos

660 Una viga simplemente apoyada se somete a la acción de un par M en su extremo derecho, como indica la figura. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia x = 0.577L del apoyo izquierdo



Resolución:



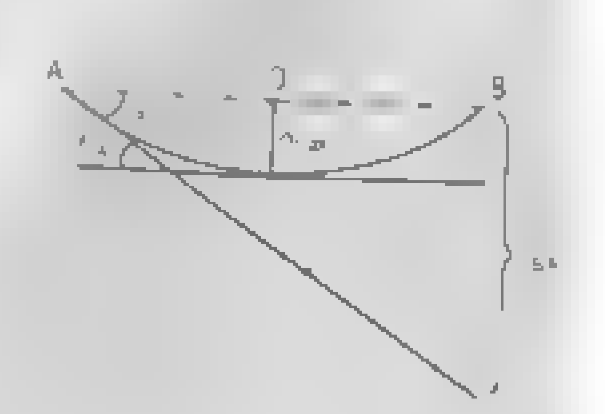
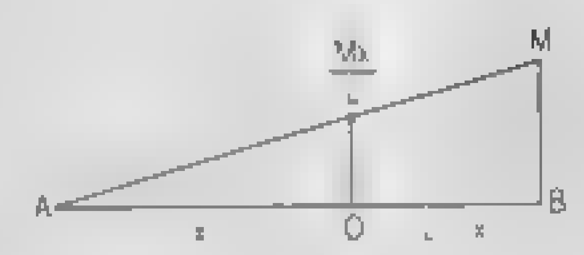
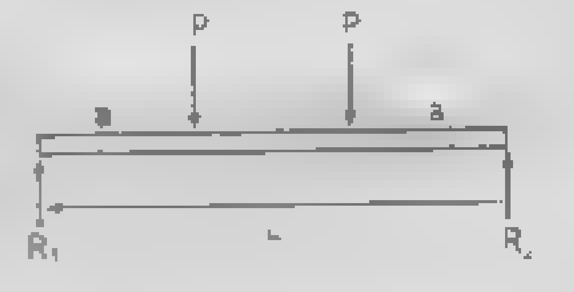


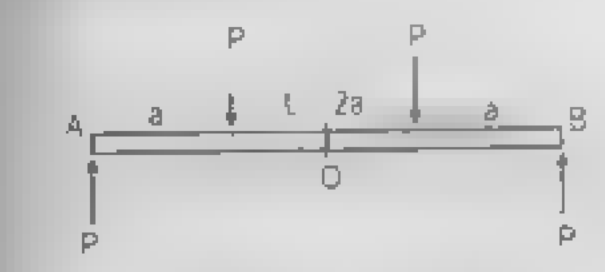
Diagrama de momentos por partes.

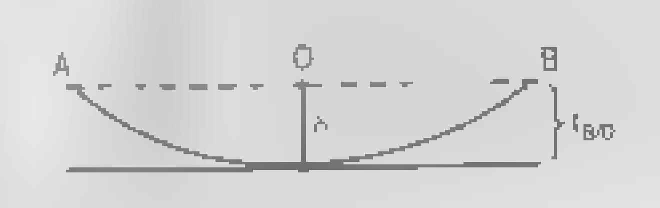


... a = L/2, con el caso 6 de la tabla 6 2. Compararlo también con la deflexión en el centro para el caso 7 de la tabla 6-2.

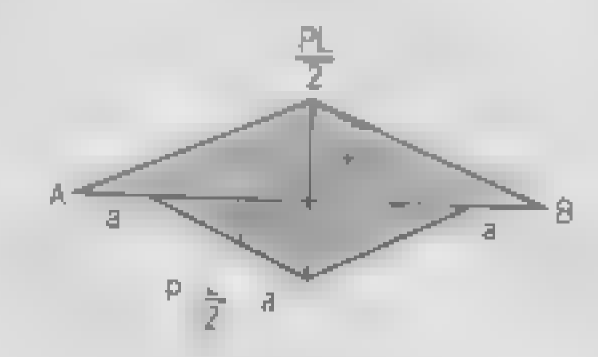


Resolución





Elaborando los diagramas de momentos por partes (respecto de O)



Del gráfico: $\delta = t_{BO} = (\text{área})_{BO}\ \bar{x}_B$

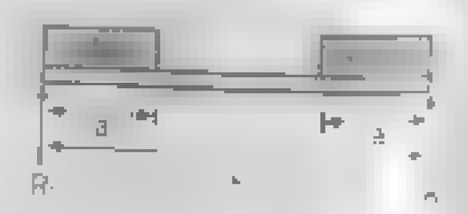
$t_{BO} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2) = \delta$

Observación [illegible] de momentos por partes

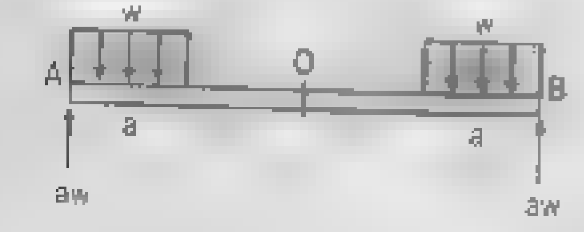
Si: $a = \frac{L}{2} \Rightarrow \delta = \left(\frac{P}{24EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(3L^2 - \frac{4L^2}{4}\right) \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{24EI}$

[illegible] que en este caso la carga total no es P, sino 2P

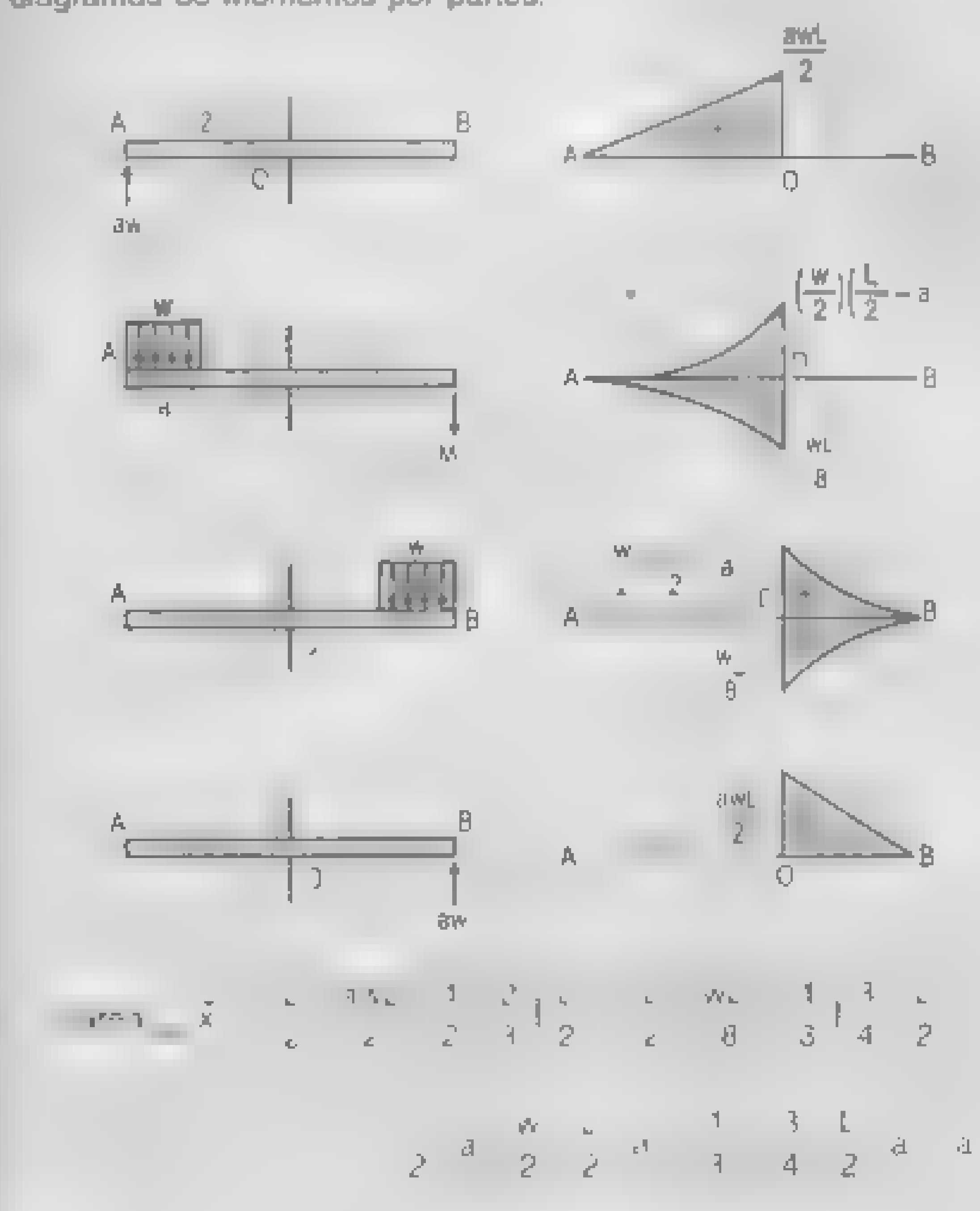
662 Determinar la deflexión máxima en la viga representada en la figura. Comparar el resultado obtenido, poniendo a = L/2 con el caso 8 de la tabla 6-2. Utilizar el resultado para comprobar el obtenido en el problema 653



Resolución



Considerando un sistema de cargas equivalentes y las relaciones, elaboramos los diagramas de momentos por partes.



[illegible]

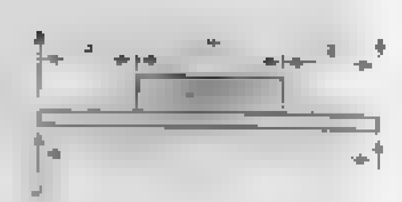
Reduciendo términos tenemos. $EIt_{BO} = \frac{wa^2}{48}(3L^2 - 2a^2)$

Del gráfico: [illegible] $\frac{wa^2}{48}(3L^2 - 2a^2)$

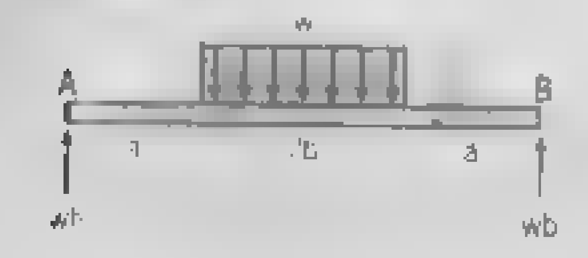
[illegible] $\frac{5wL^4}{384}$

[illegible] es coherente con la tabla 6-2

663. Calcular la deflexión máxima en la viga de la figura que soporta una carga uniformemente repartida sobre la parte central. Confrontar el resultado, haciendo ..., con el caso 8 de la tabla 6-2

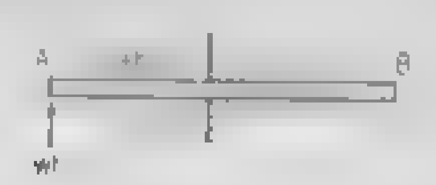


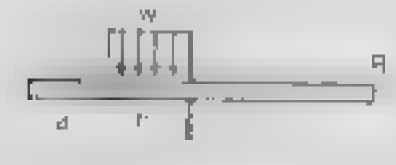
Resolución

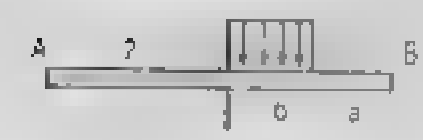
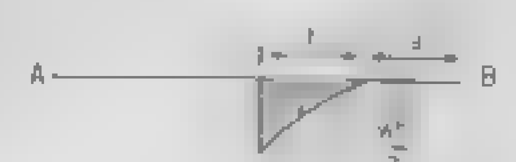


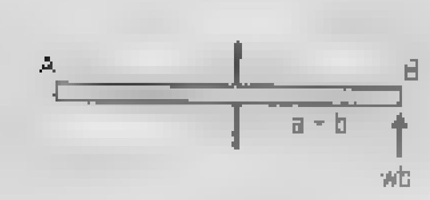
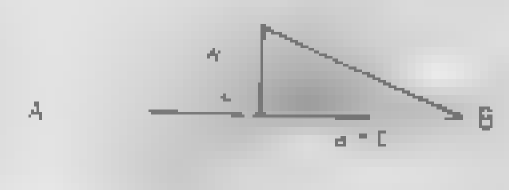
Como $\delta = t_{a/o} = \left(\frac{1}{E}\right)(\text{área})_{ao}\ \overline{x}_a$

Elaborando los diagramas de momentos por partes





E ... $\frac{wb}{2}$ ... $\frac{1}{2}$ ... $\frac{2}{1}$ ... $\frac{wb}{2}$ ... a ...

Reducimos términos y considerando que a $\frac{L}{2}$ b

$$EIt_{ao}=\left(\frac{wb}{24}\right)[L^3-2Lb^2+b^3]$$

Del gráfico de la deformada.

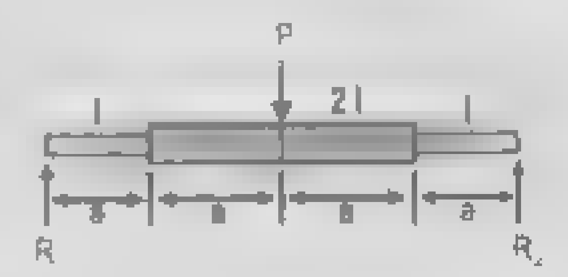
$$EI\delta=\left(\frac{wb}{24}\right)(L^3-2Lb^2+b^3)$$

Si consideramos 2b = L, tenemos

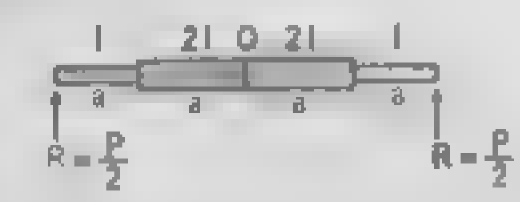
$EI\delta$ ... $\frac{wb}{24}$ ... $\frac{L}{2}$ ... 2L ... $\frac{L}{2}$ ... $\frac{L}{2}$ ... $\Rightarrow$ $EI\delta=\frac{5wL^4}{384}$

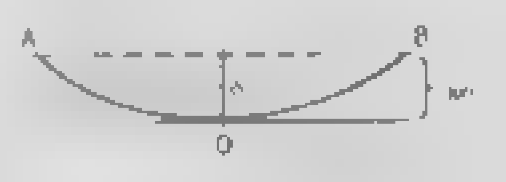
Esta respuesta es concordante con la que se observa en la tabla 6-2

664. La mitad central de la viga de la figura tiene un momento de inercia doble que el del resto. Determinar la deflexión en el centro. *Indicación:* transformar el diagrama de M en diagrama de M/EI



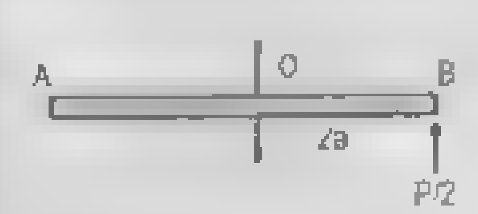
Resolución

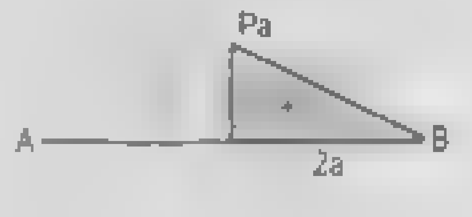


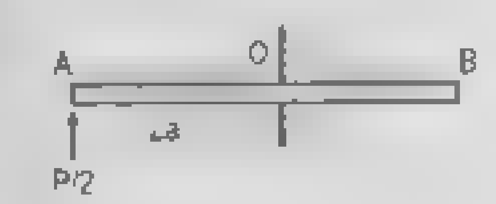


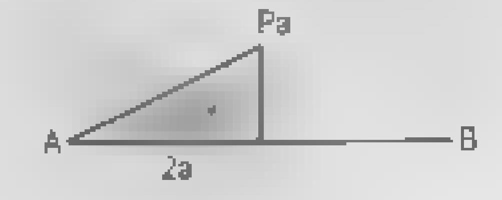
Nos piden δ, pero $\delta = t_{a/o}$

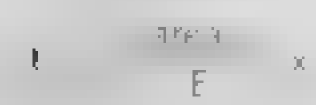
Dibujamos los diagramas de momentos por partes.



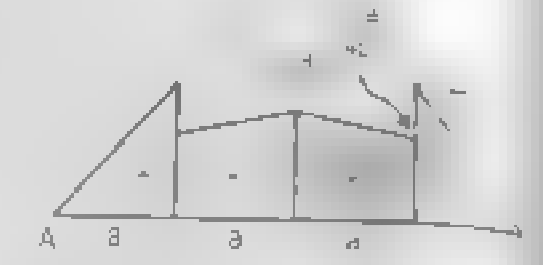








Debido a que la viga presenta variación en la inercia, es conveniente trabajar con el diagrama de momentos por partes reducido

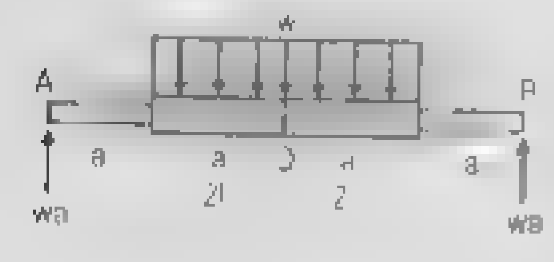


$$t_{B/O} = \frac{3Pa^3}{4EI}$$

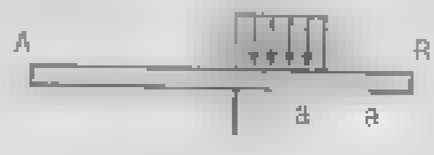
Del gráfico de deformaciones. $\boxed{\delta = \frac{3Pa^3}{4EI}}$

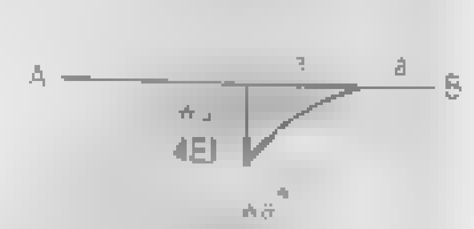
Resolución:

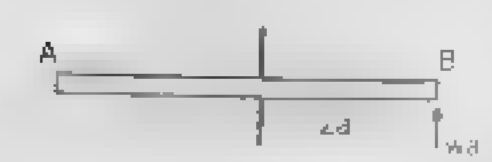
Deformación

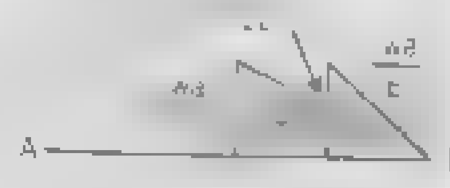


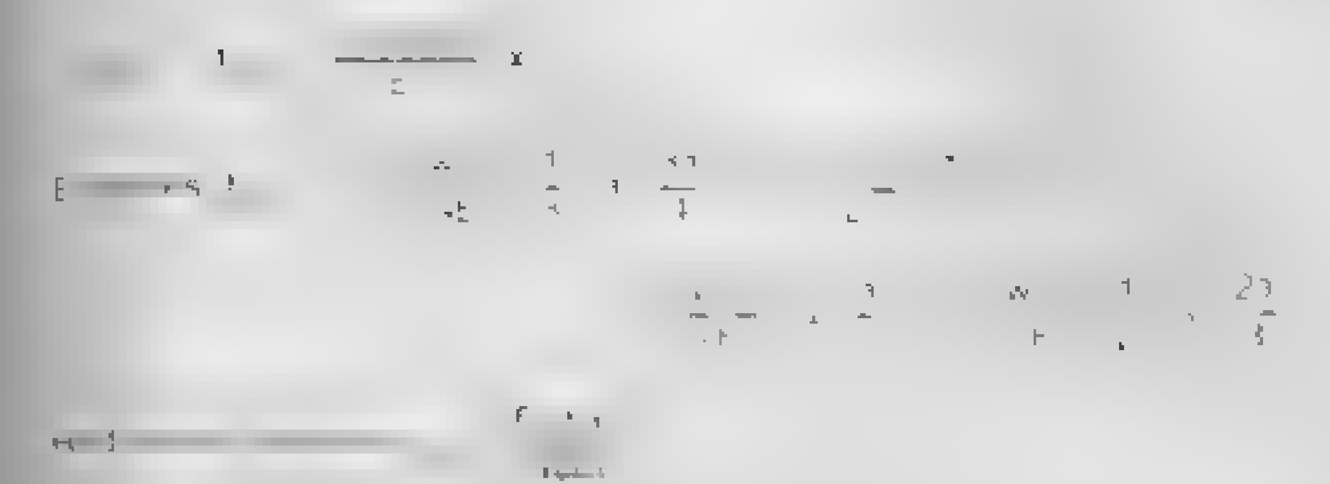
Igual que en el caso anterior, elaboramos los diagramas de momentos por partes reducidos y solo entre los nudos "O" y "B", ya que solo se necesitan esas áreas







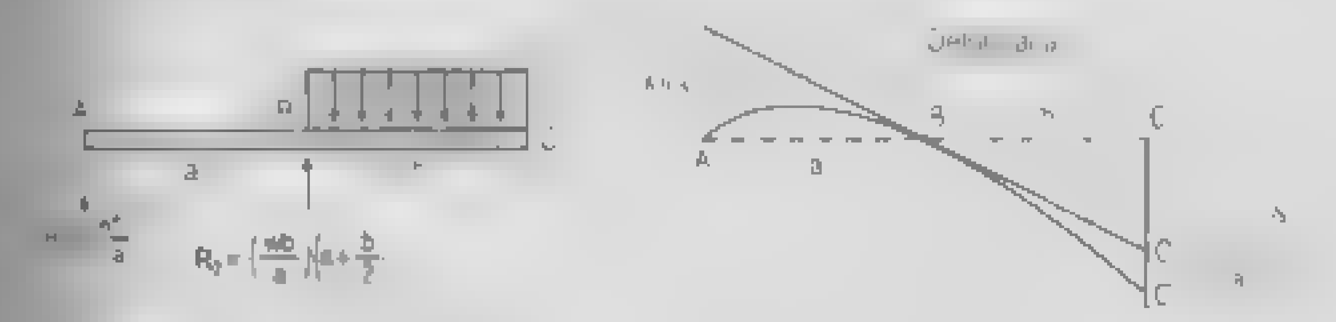




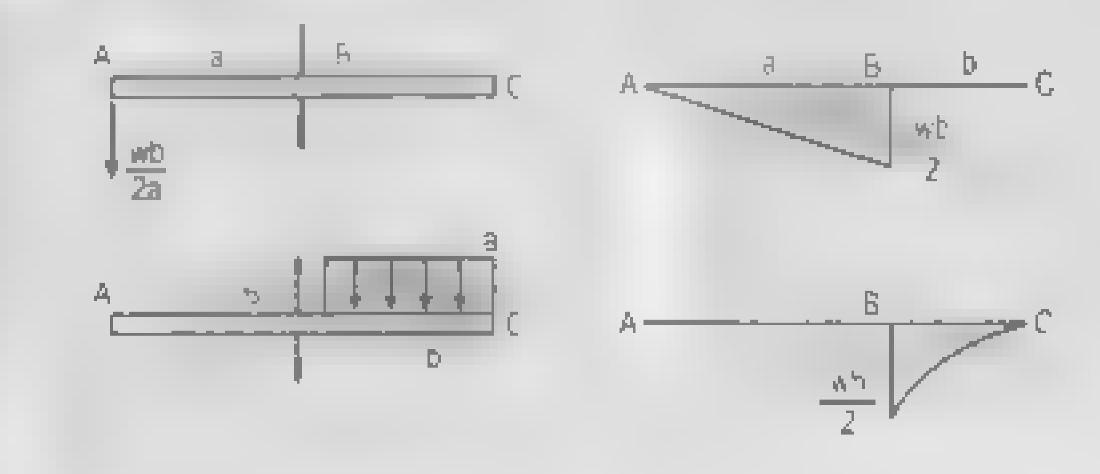
Del gráfico de las deformaciones observamos.

$$\delta = t_{B/O} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{65wa^4}{48EI}}$$

Resolución



F[illegible]rando el diagrama de momentos por partes.



$$t_{A} = \frac{1}{EI}\,\text{área}_A\,\bar{x}_A = \frac{1}{EI}\left(a\,\frac{wb}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{wa^2b}{6EI}$$

$$t_{C} = \frac{1}{EI}\,\text{área}_B\,\bar{x} = \frac{1}{EI}\left(b\,\frac{wb^2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}b\right) = \frac{wb^4}{8EI}$$

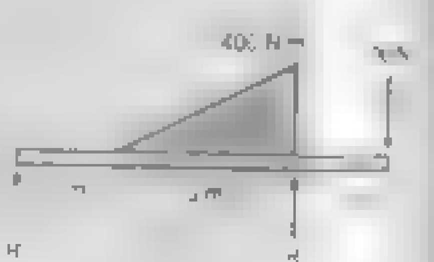
Del gráfico de la deformada: $\frac{t_{A}}{a} = \frac{\overline{CC'}}{b} \Rightarrow \overline{CC'} = \frac{b}{a}\,t_{A}$

$$\overline{CC'} = \frac{b}{a}\left(\frac{wa^2b}{6EI}\right) = \frac{wab^2}{6EI}$$

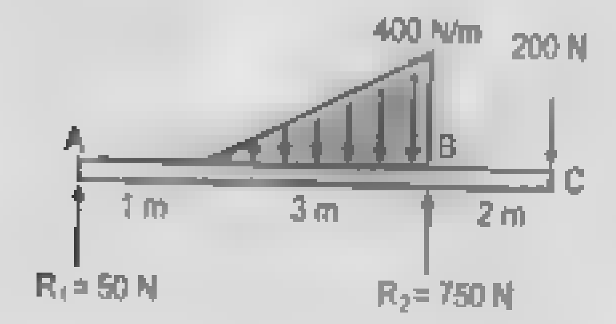
Del mismo gráfico

$$\delta = \overline{CC'} + t_{CB} = \frac{wab^3}{6EI} + \frac{wb^4}{8EI} \Rightarrow \boxed{\delta = \left(\frac{wb^3}{24EI}\right)(4a + 3b)}$$

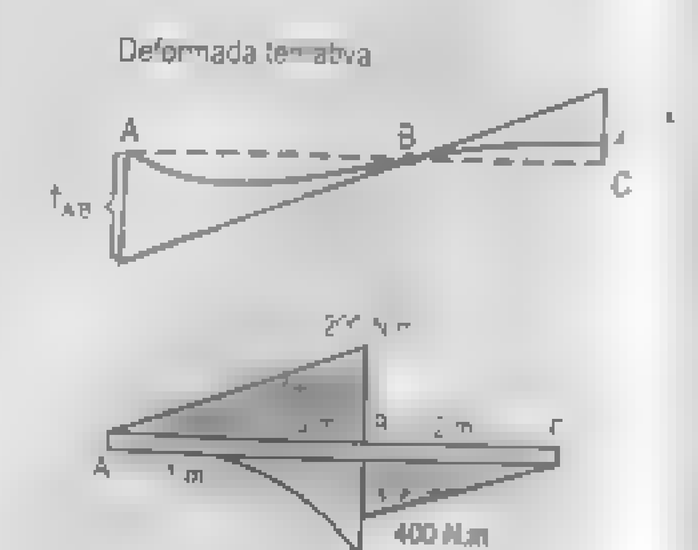
667 Calcular EIδ en el extremo derecho de la viga con voladizo de la figura. ¿Qué sentido tiene la deflexión?



Resolución



Deformada tentativa

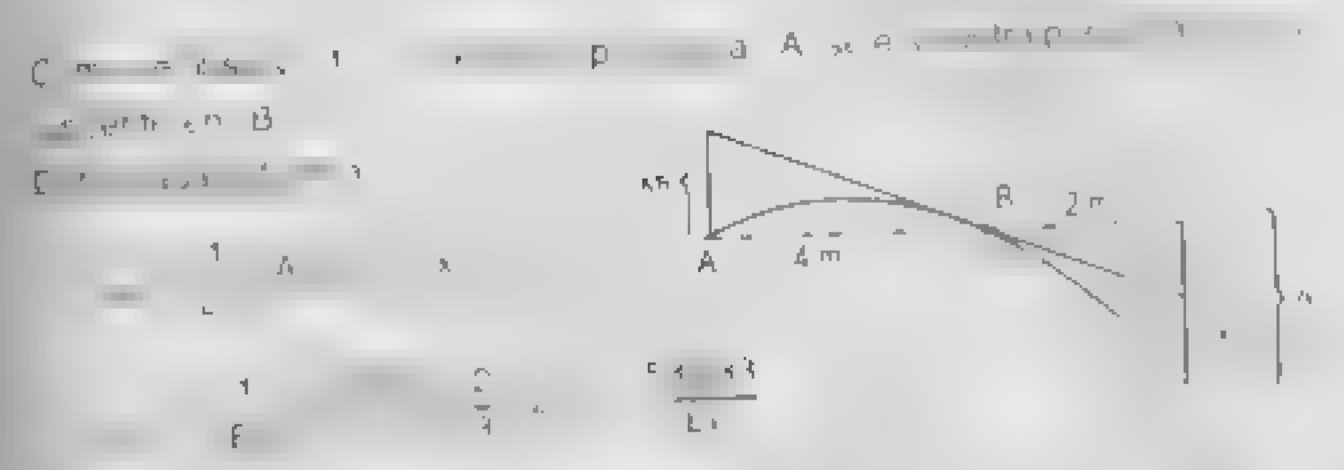


Elaboramos los diagramas de momentos por partes

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\,\text{área}\,\bar{x} = \frac{1}{EI}\left[\frac{(4)(200)}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(4) - \frac{(3)(600)}{4}\left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)(3)\right)\right]$$

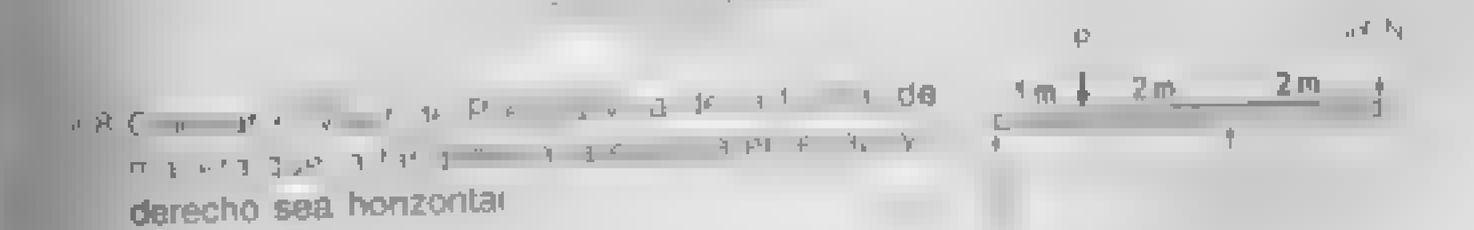
$$t_{A/B} = \frac{463.33}{EI}$$

Como la desviación ... A ... en B



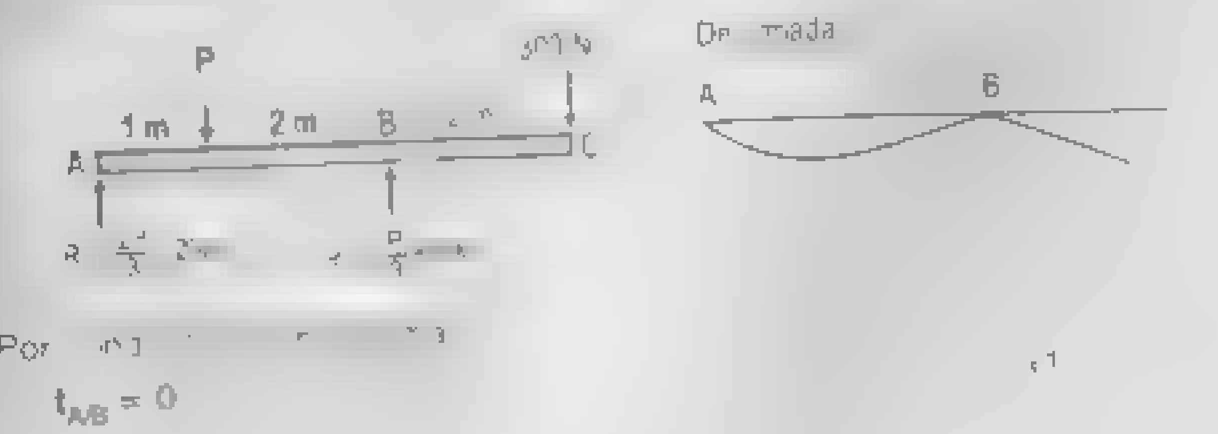
Del gráfico de deformada definitiva

Del mismo gráfico: $|\overline{CC'}| + |t_C|$



... de manera que ... derecho sea horizontal

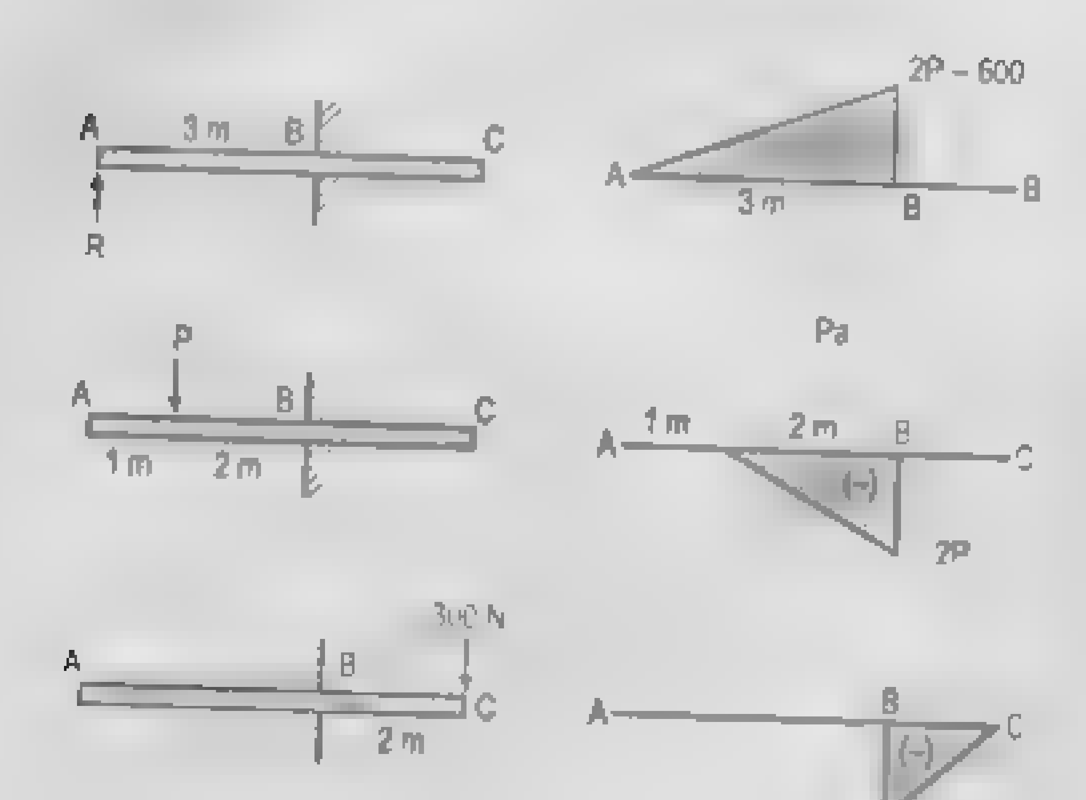
Resolución



Por ...

$t_{A/B} = 0$

Elaboramos las diagramas de momentos por partes:

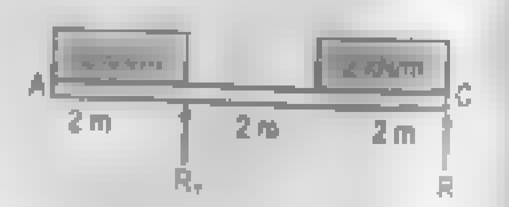


Aplicamos (1)

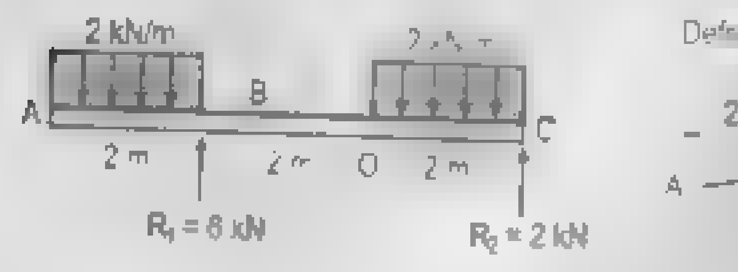
$t_{A/B} = \frac{(\text{área})_{AB}}{EI} \bar{x}_A$ [illegible] $\frac{(3)(2P - \ldots}{\ldots}$ [illegible]

De lo cual tenemos $\boxed{P = 1350\ N}$

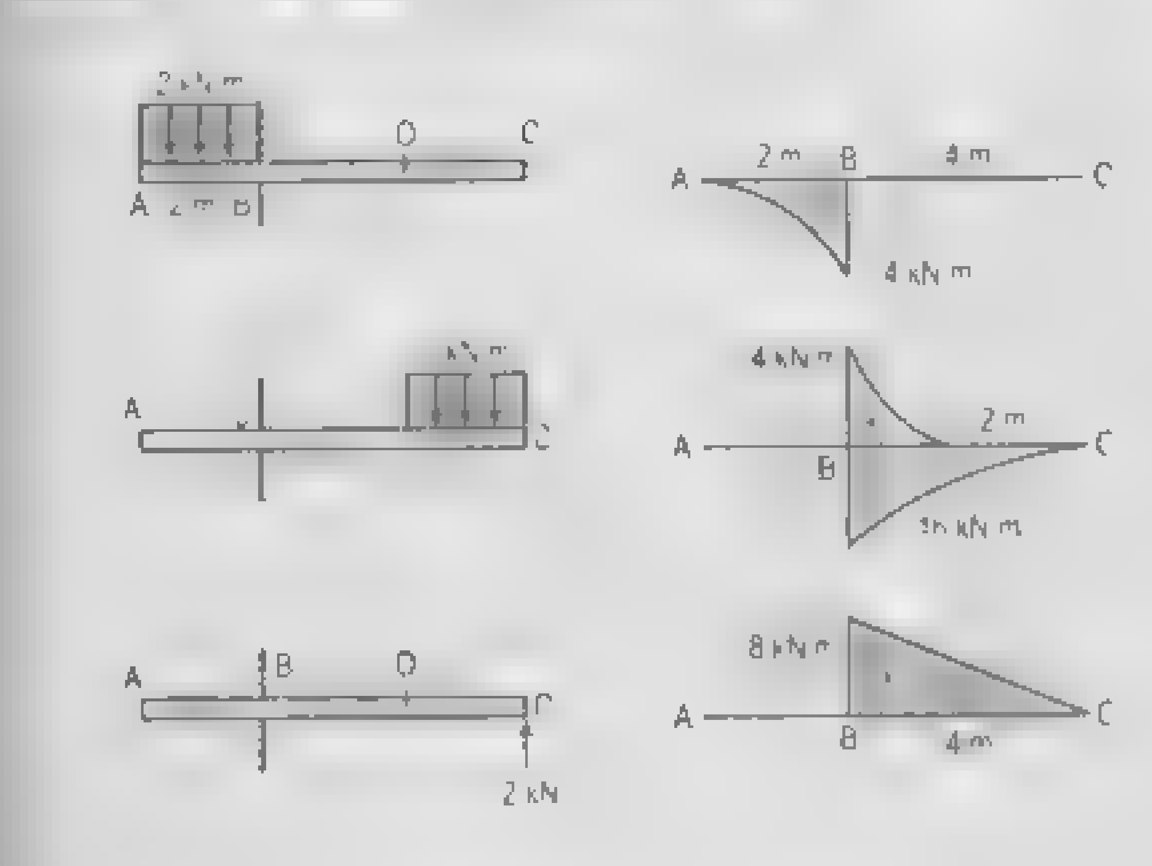
669 Calcular el valor de EI [illegible] entre apoyos de la viga de la figura.



Resolución



Elaboramos [illegible] de momentos por partes



$EIt_{BC} = (\text{área})_{BC}\ \bar{x}$

$EIt_{BC} =$ [illegible]

$EIt_{BC} = 1{,}33\ kN.m^3$

El signo positivo [illegible] que se encuentra sobre la tangente.

$EIt_{OC} = (\text{área})_{OC} \cdot \bar{x}_O$

$$EIt_{OC} = -\frac{(2)(4)}{3}\left(\frac{1}{4}\right)(2) + \frac{(2)(4)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(2) \Rightarrow EIt_{OC} = 1{,}33\ kN.m$$

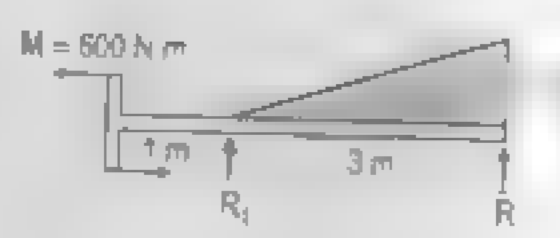
En este caso el signo positivo nos indica que "O" se encuentra sobre la tangente

De la figura de la deformada: $\frac{EI\ldots}{4} = \frac{\overline{OO'}}{2} \Rightarrow \overline{OO'} = 0{,}665\ kN.m$

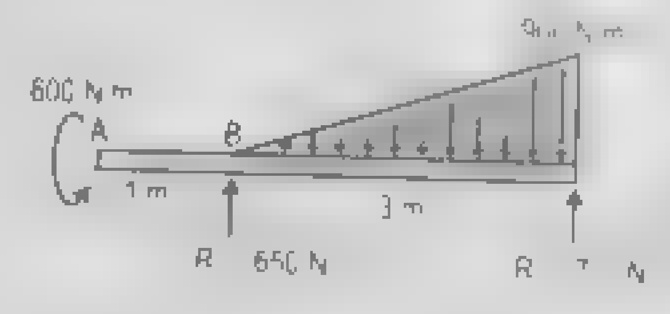
De la misma gráfica

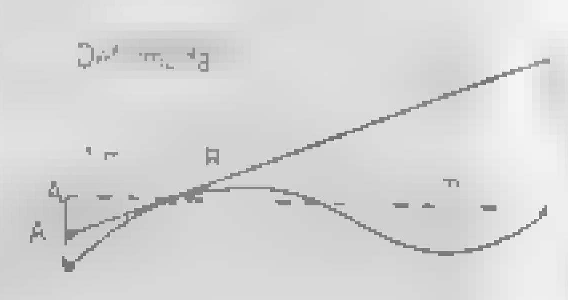
$$\delta = EIt_{OC} - \overline{OO'} = 1{,}33 - 0{,}665 \Rightarrow \boxed{\delta = 0{,}665\ kN.m^3}$$

670 Calcular el valor de EIδ en el extremo izquierdo de la viga con voladizo de la figura

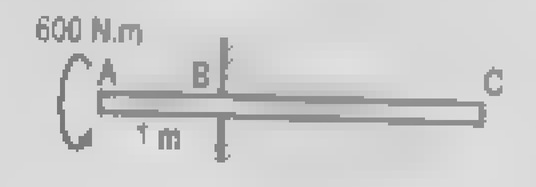


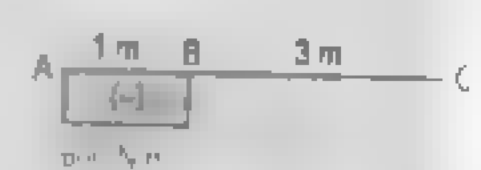
Resolucion.

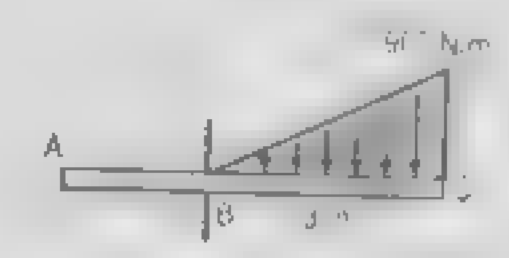


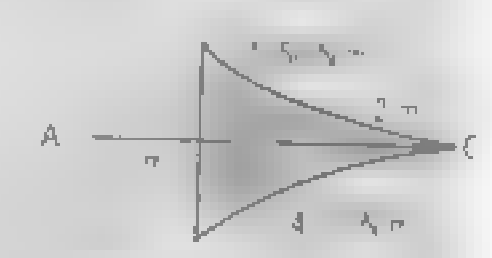


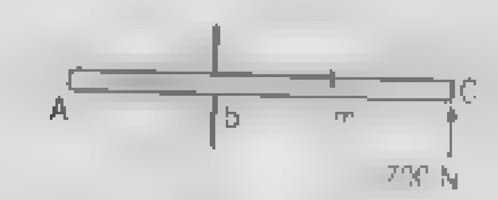
Diagramas de momentos por partes.











$t_{..} = \frac{1}{E\,[illegible]}$ (área) $\bar{x}$ [illegible]

$t_{..} = \frac{1}{EI}$ [illegible] $\frac{3}{4}$ [illegible]

$t_{C/B} = -\frac{382.5}{EI}$ ("C" se encuentra por debajo de la tangente en "B")

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\,(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A \qquad (2)$$

$$t_{A/B} = -\frac{1}{EI}(1)(600)\frac{1}{2}(1) = -\frac{300}{EI}$$

("A" se encuentra por debajo de la tangente en "B")

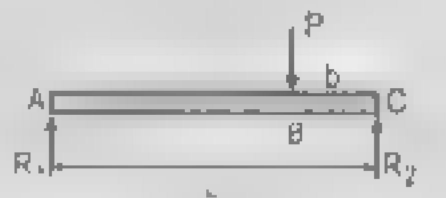
Del grafico de la deformada

[illegible]

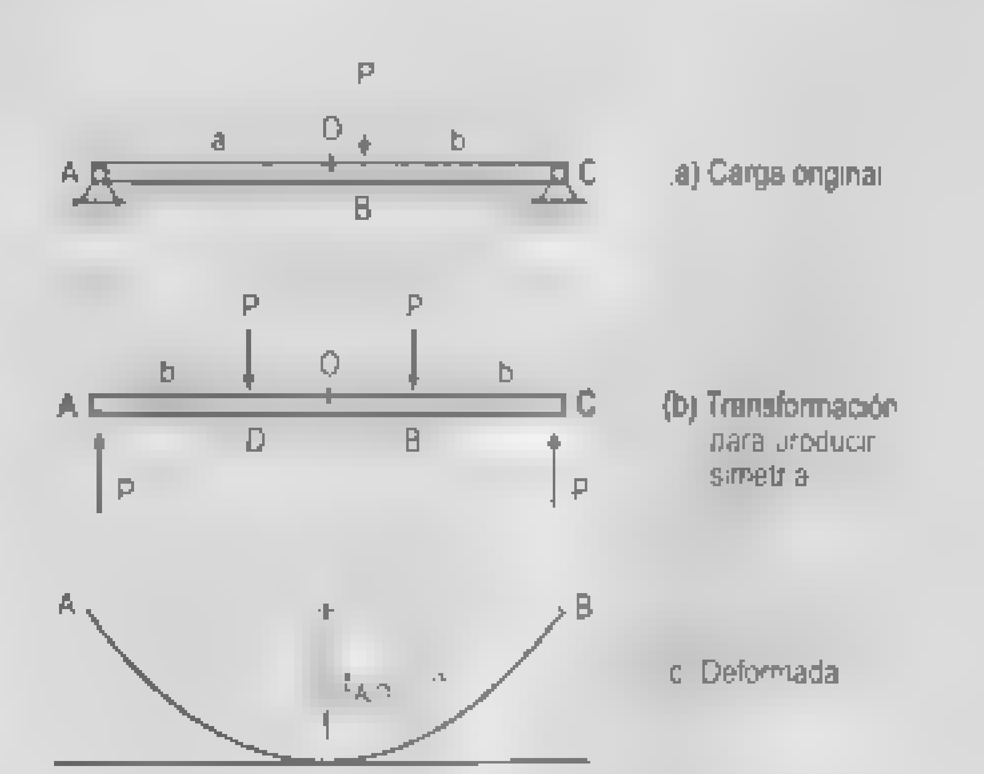
$EI\delta = 427.5\ N\,m^3$

671 [illegible] problemas [illegible]

671 Demostrar que la deflexion [illegible] de la viga de la figura es [illegible] Pb [illegible] 48E [illegible] 4b [illegible]



Resolucion.

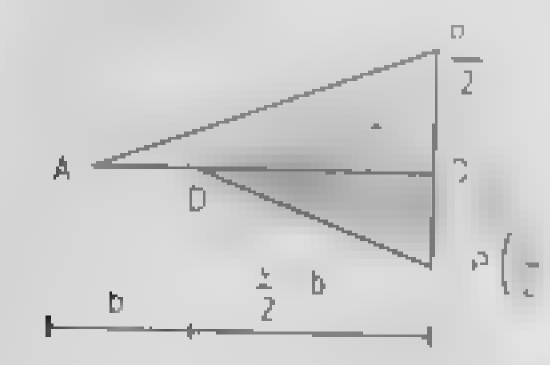


a) Carga original

(b) Transformación para producir simetría

c) Deformada

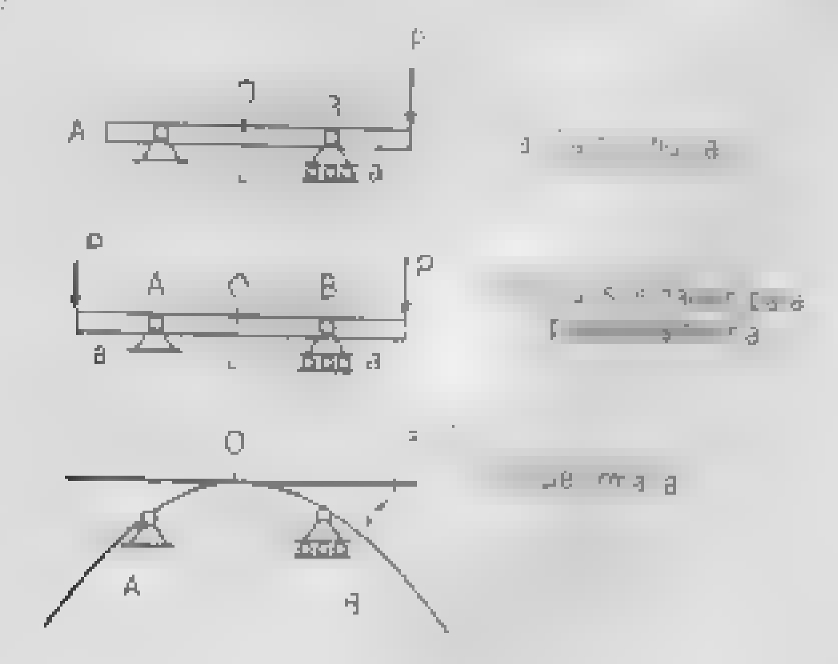
Debemos calcular $t_{A/O} = \left(\frac{1}{EI}\right)(\text{área})_{A_O}\ \bar{x}_A$, como se observa solo debemos calcular las áreas entre "A" y "O"

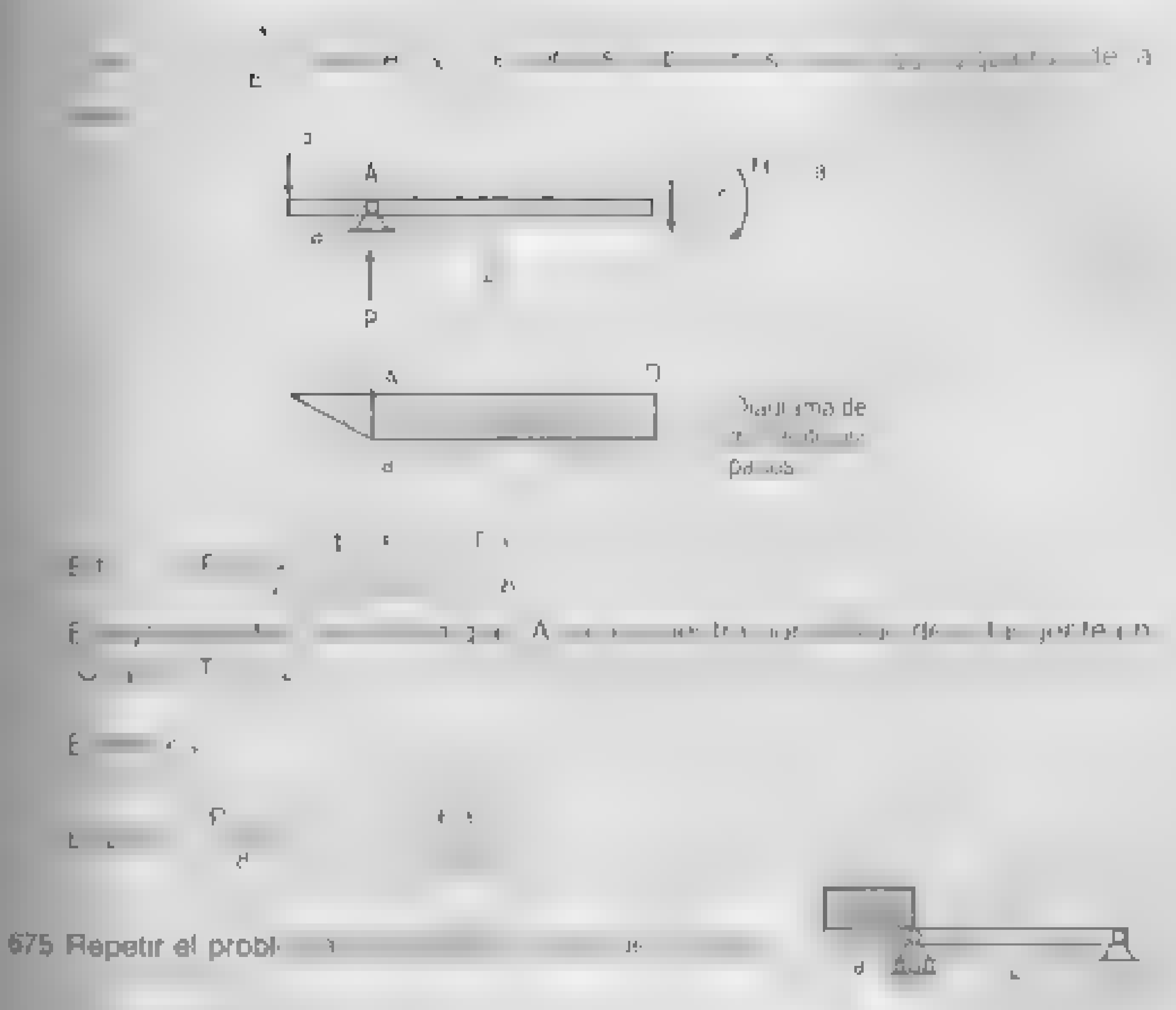


(d) Diagrama de momentos por partes

674 De[illegible] centro del claro de la viga de la figura.

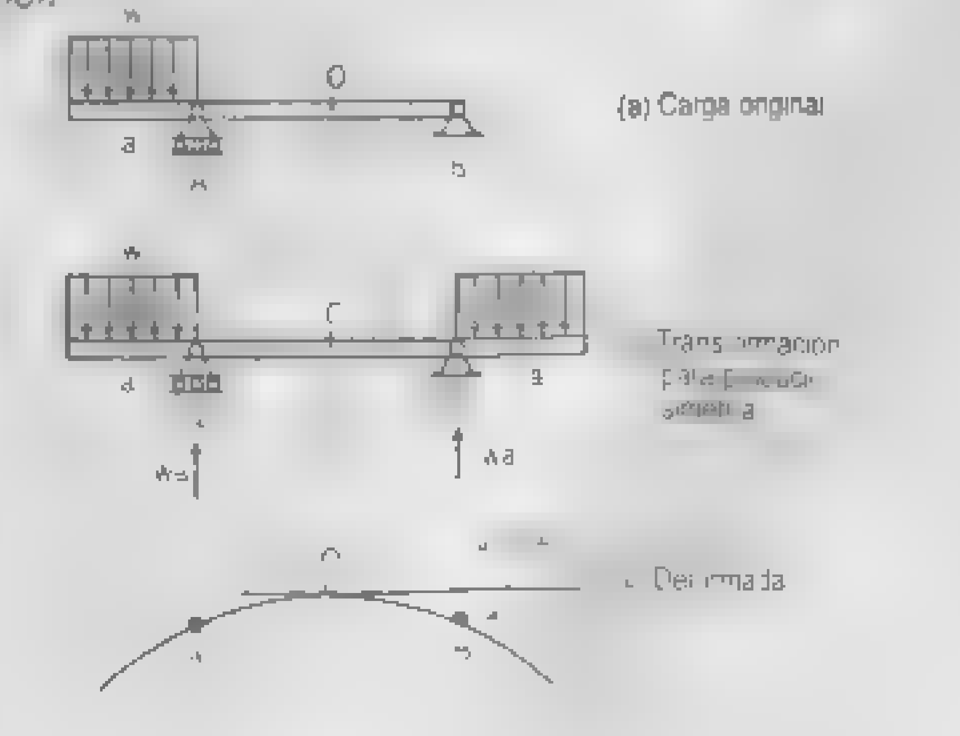
Resolución:



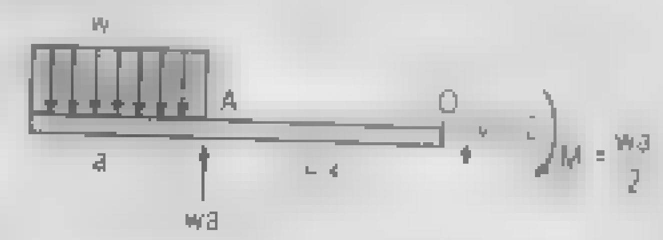


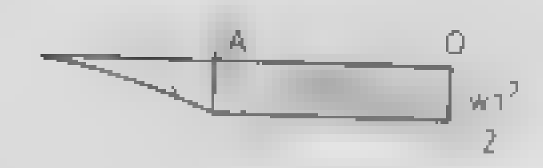
675 Repetir el probl[illegible]

Resolución



Debemos calcular $t_{A/O}$, por lo tanto debemos calcular las áreas que se encuentran entre los puntos "A" y "O"





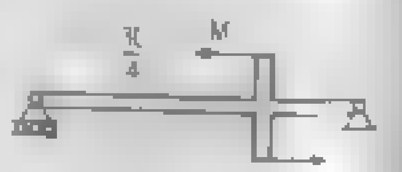
El $t_{A/O} = (\text{área})_{AO}\,\bar{x}_A \Rightarrow$ EI $t_{A/O}$ = ...

Como se observa en la deformación: $t_{A/O}$ ...

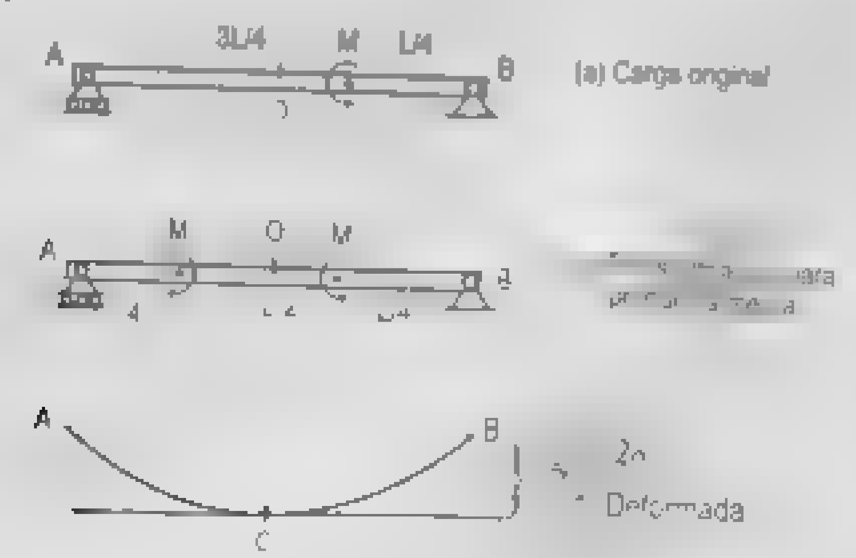
Por lo tanto. $EI(2\delta) = \frac{wa^2L^2}{16} \Rightarrow \delta = -\frac{wa^2L^2}{32EI}$

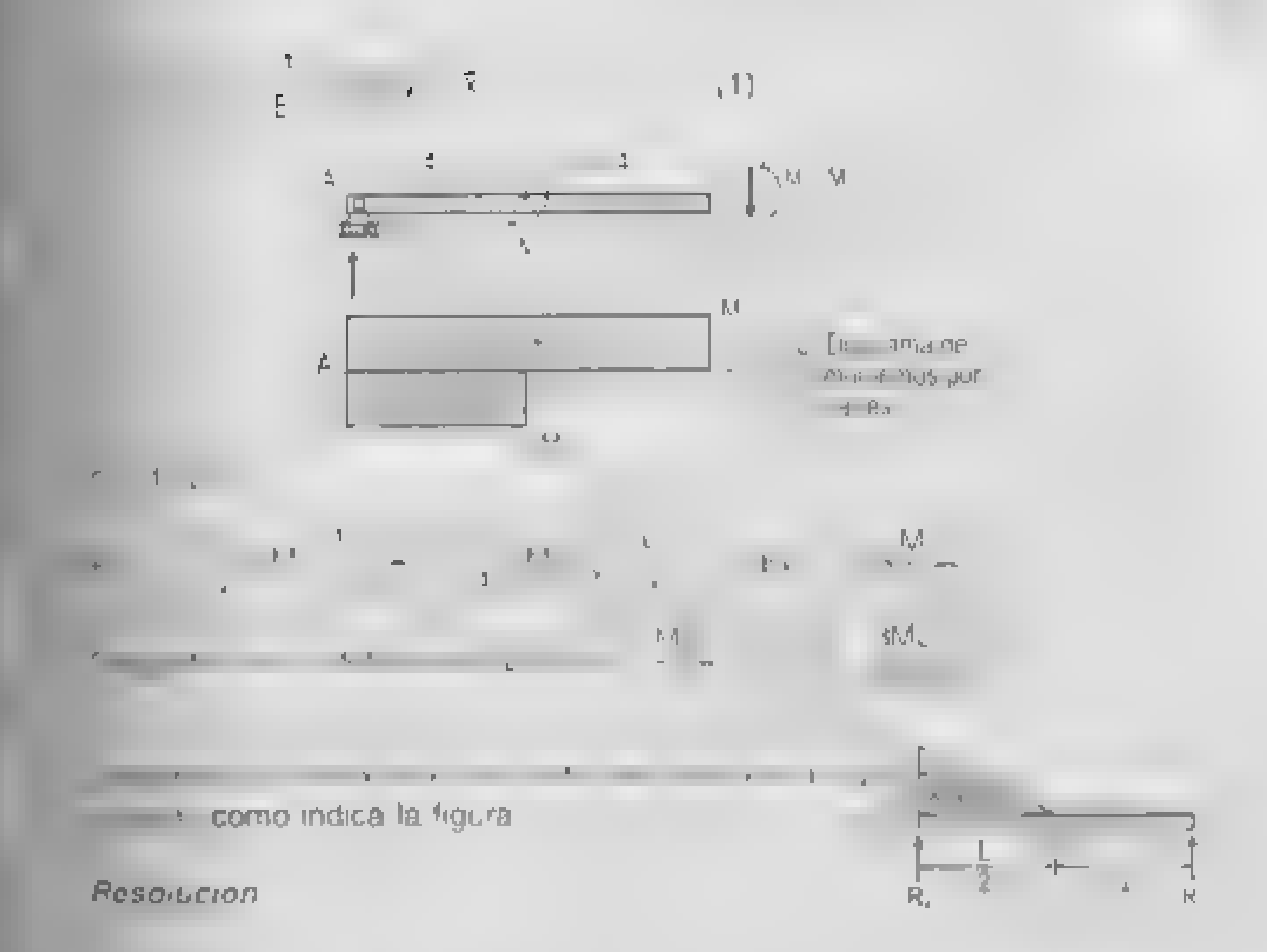
El signo negativo nos indica que el punto A [illegible] tangente a la viga en "O"

176 Calcular la [illegible] en el caso de una viga con un par aplicado como se indica en la figura



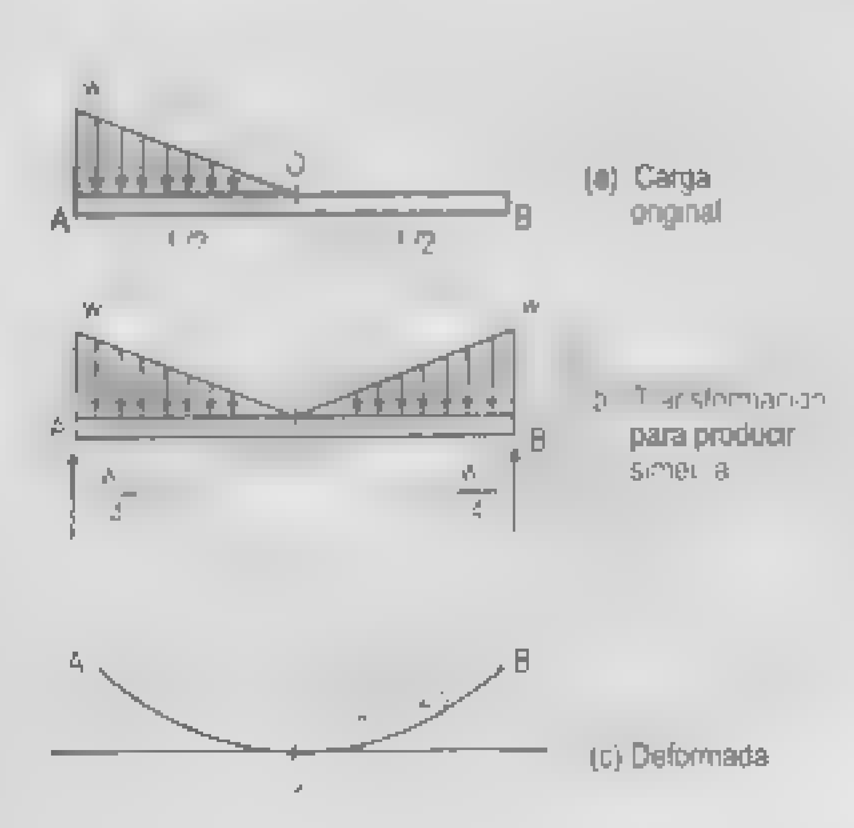
Resolución:





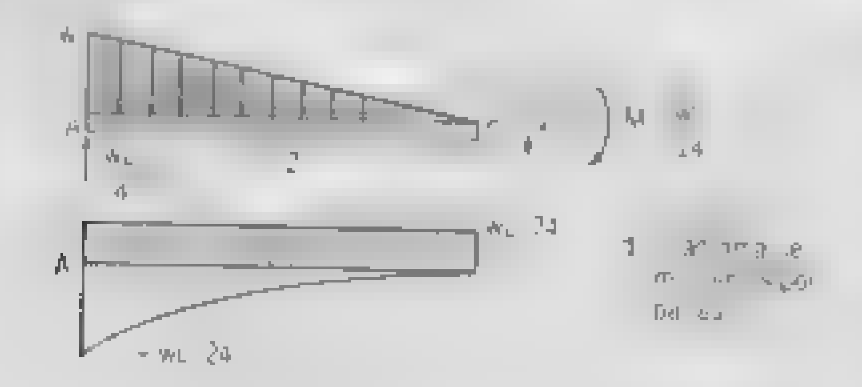
... como indica la figura

Resolución



E [illegible] A respecto a una tangente en O [illegible]

E $t_{A/O}$ = (área)$_{AO}$ x_A ...(1)



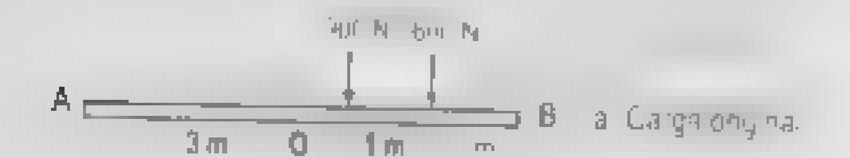
De (1) y (d)

E.I. [illegible]

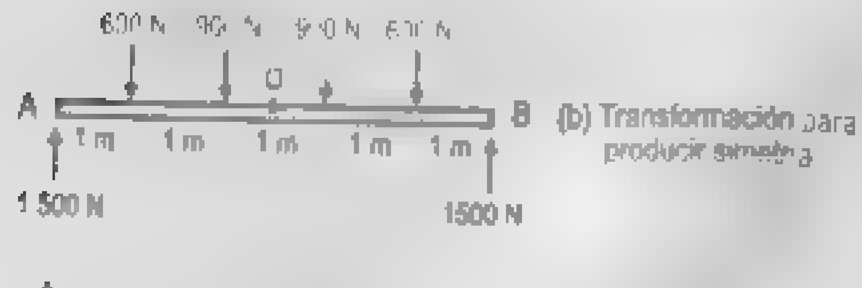
Del gráfico de la deformada. $EI(2\delta) = \frac{9wL^4}{1920} \Rightarrow \delta = \frac{9wL^4}{3840\,EI}$

678. Determinar el valor de EIδ en el centro de la viga de la figura

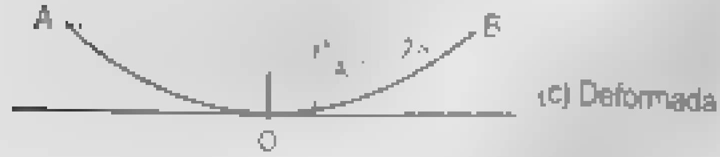
Resolución:



(a) Carga original

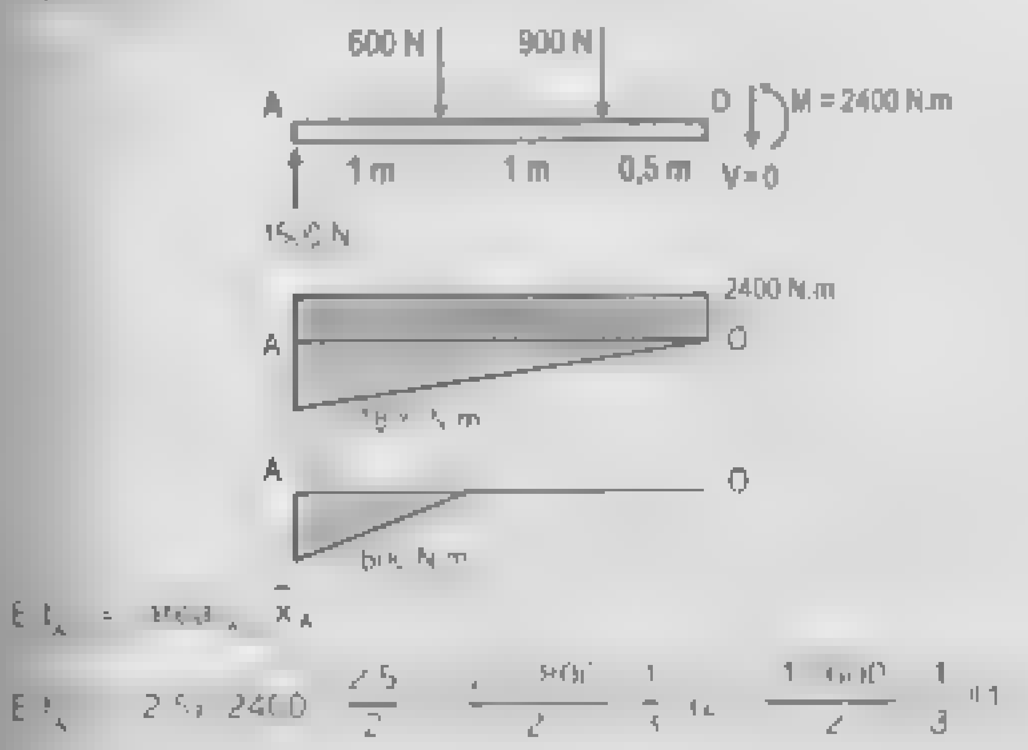


(b) Transformación para producir simetría



(c) Deformada

Trazando las áreas comprendidas entre "A" y "O"



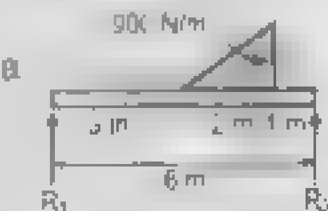
E t_A = (área)$_A$ $\bar{x}_A$

E t_A 2,5 2400 [illegible]

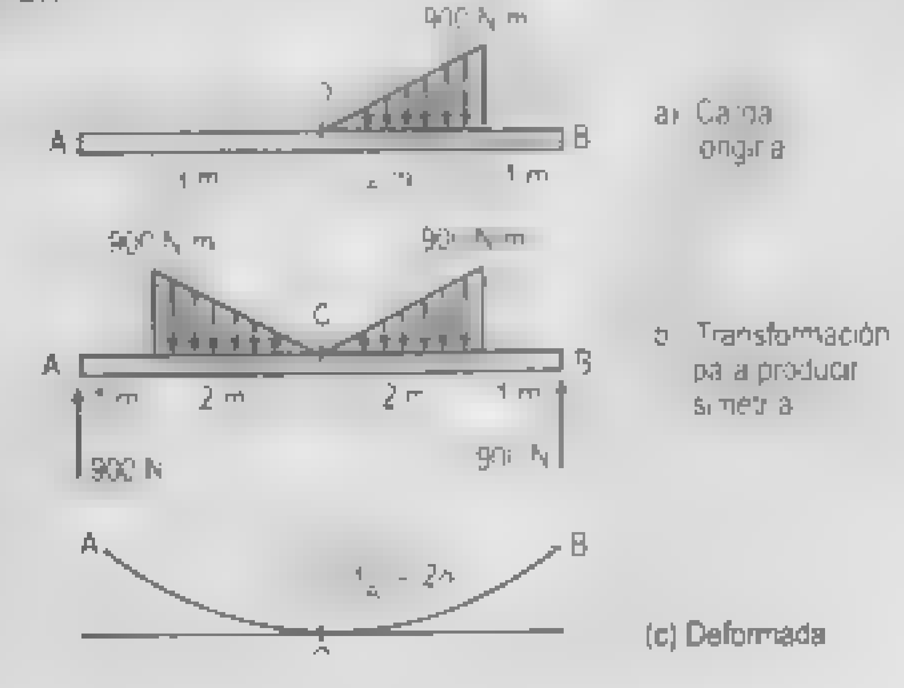
E t_A = 6200 N m^3

Del gráfico de la deformada $EI(2\delta) = 6200$ N.m^3 $\Rightarrow$ $EI\delta = 3100$ N m^3

Determinar el valor de EIδ en el centro de la viga de la figura



Resolución

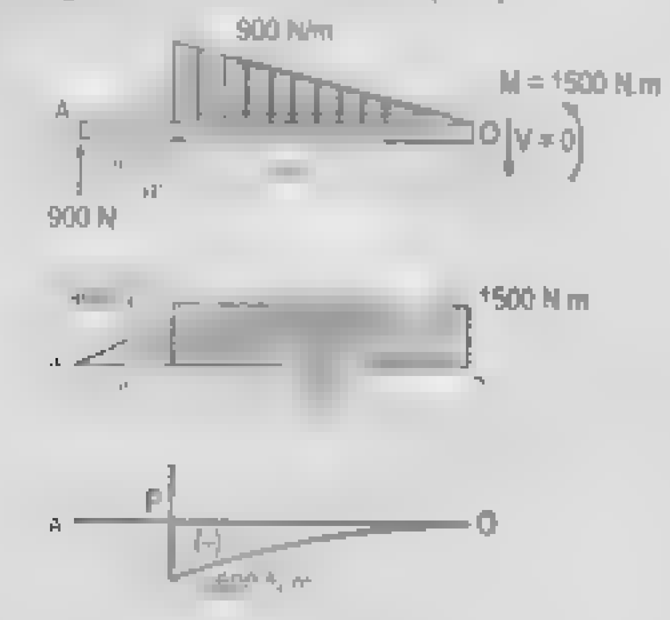


(a) Carga original

(b) Transformación para producir simetría

(c) Deformada

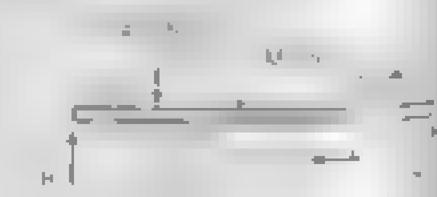
Elaborando los diagramas de momentos por partes entre "A" y "O"



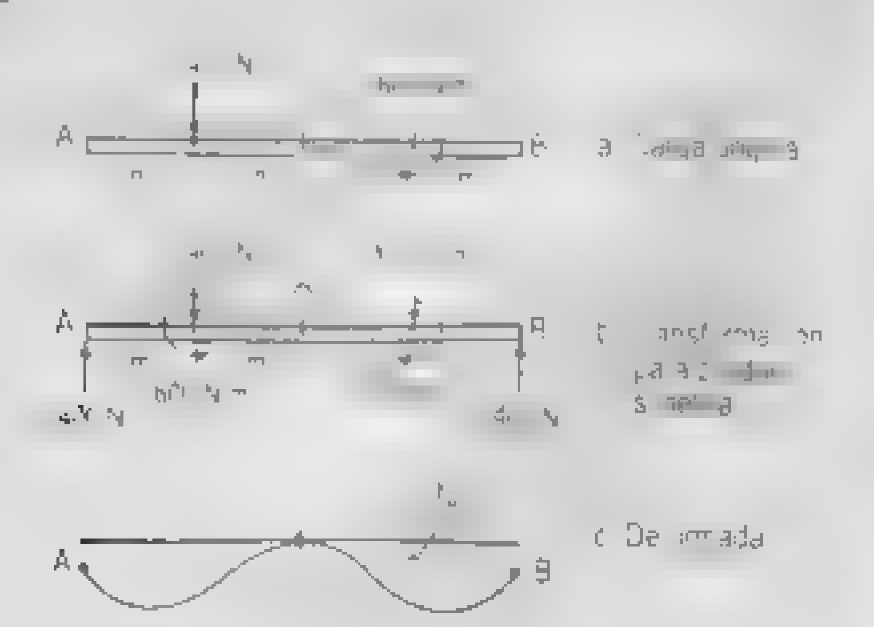
Como EI $t_{A/O}$ = (área)$_{AO}$ $\bar{x}_A$

E $t_{A/O}$ = ... 2 ... 3

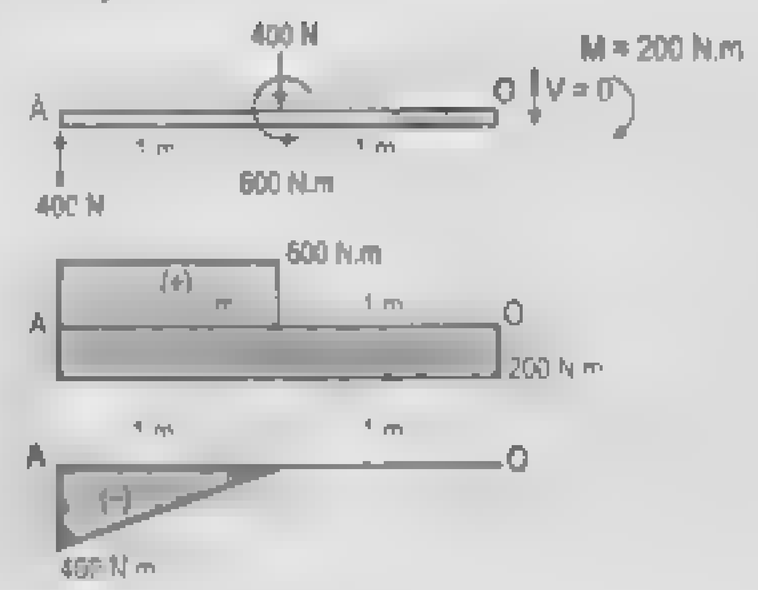
Como $t_{A/O}$ ... δ ⇒ EI(2δ) = 5880 N.m³ ⇒ |EIδ = 2940 N.m³



Resolución



Trabajando entre "A" y "O".



Sabemos que

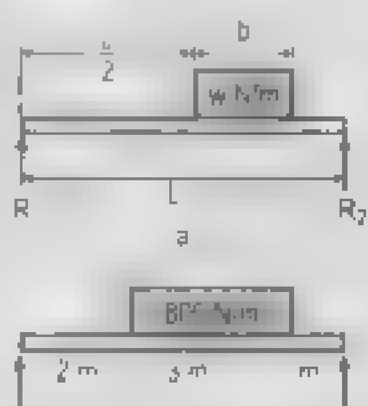
EI t_{AO} = (área)$_{AO}$ $\bar{x}_A$

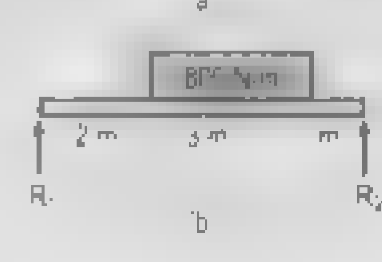
EI t_{AO} = (1)(600)(0,5) − (2)(200)(1) − $\frac{(1)(400)}{2}\left(\frac{1}{3}\right)(1)$ ⇒ EI t_A = −166,67 N.m³

El signo negativo se debe a que el punto "A" se encuentra por debajo de la tangente en "O"

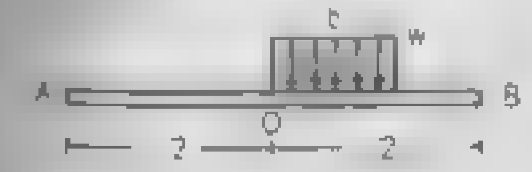
De gráfico de la deformada EI 2δ = −166,67 ⇒ EIδ = −83 335 N.m³

581 Demostrar que el valor de EI en el centro de la viga de la figura parte (a) es wb/48 (L³ − 2L b² + b³). Aplicar el resultado obtenido para hallar el valor del claro en el centro de la viga de la figura (b) descomponiendo la carga dada en dos partes a partir del centro de la viga, a uno y otro lado, y sumando los resultados



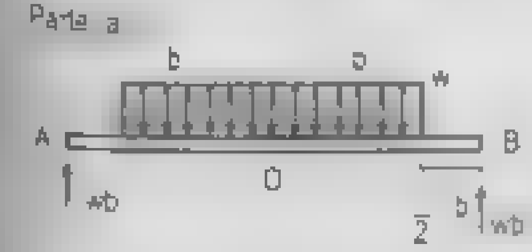


Resolución

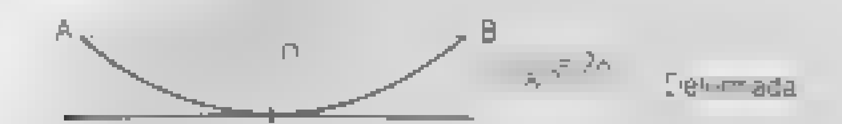


a. Carga original

Parte a



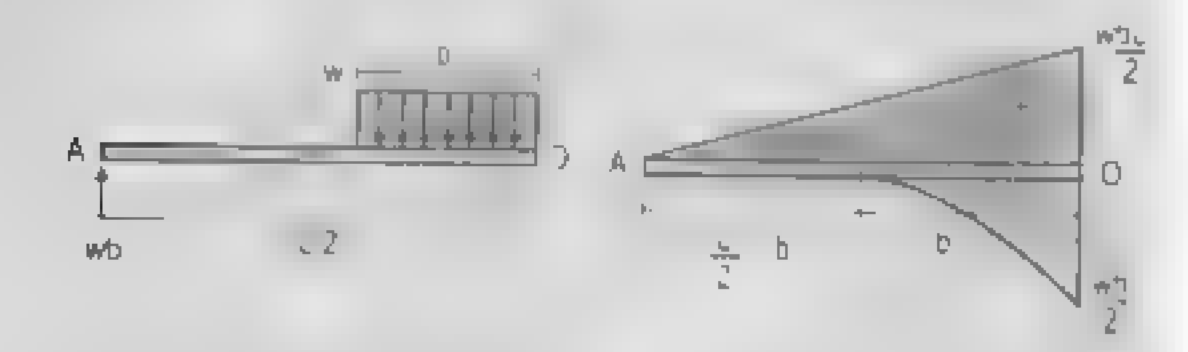
b. Transformación para producir simetría



La deflexión en el centro de la viga es

$EI\, t_{A/O} = (\text{área})_{AO}\, \bar{x}_A$

Para ello elaboramos los diagramas de momentos por partes



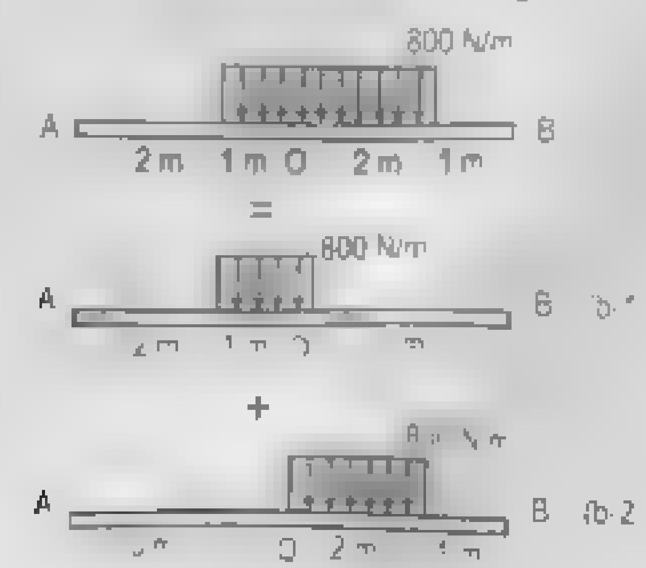
Reduciendo términos: $EIt_{A/O} = \dfrac{wb(L^3 - 2Lb^2 + b^3)}{24}$

Del gráfico de la deformada

$$\Rightarrow \quad EI\delta = \frac{wb(L^3 - 2Lb^2 + b^3)}{48}$$

Parte (b).

Por indicación del problema, separamos la carga en 2 partes como sigue



Para (b-1) $\quad b = 1\text{ m},\ w = 800\text{ N/m},\ L = 6\text{ m}$

$$EI\delta_1 = \frac{(800)(1)}{48}\left(6^3 - (2)(6)(1)^2 + (1)^3\right) \Rightarrow EI\delta_1 = 3416.67\text{ N m}^3$$

Para (b-2): $\quad b = 2\text{ m};\ w = 800\text{ N/m};\ L = 6\text{ m}$

$$EI\delta_2 = \frac{(800)(2)}{48}\left(6^3 - (2)(6)(2)2 + (2)^3\right) \Rightarrow EI\delta_2 = 5866.67\text{ N m}^3$$

Finalmente

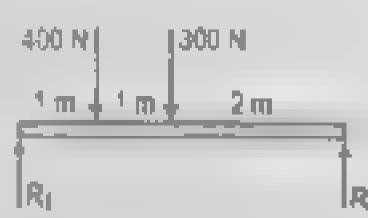
$EI\delta = EI\delta_1 + EI\delta_2$

$EI\delta = 3416.67 + 5866.07 \quad \Rightarrow \quad EI\delta = 9293.34\text{ N.m}^3$

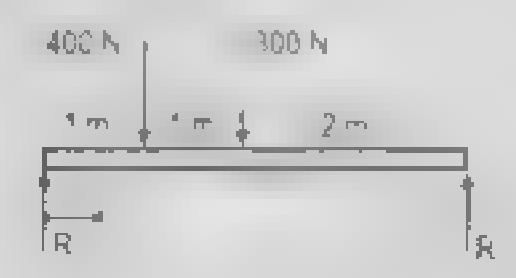
683, 684; 685. problemas ilustrativos.

Para resolver los problemas siguientes utilícese la tabla 6-2

Determinar el valor de EIδ bajo cada carga concentrada de la figura.



Resolucion:



Para la solución de este problema usaremos el caso 7 de la tabla 6-2

a Calculando la deflexión debajo de la carga de 400 N (x = 1 m)

$$EI\delta_1 = \frac{(400)(3)(1)}{(6)(4)}(4^2 - 1^2 - 3^2) = 300\text{ N.m}^3$$

$$EI\delta = \frac{(300)(2)(1)}{(6)(4)}(4^2 - 1^2 - 2^2) = 275\text{ N m}^3$$

$EI\delta = EI\delta_1 + EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 575\ N.m^3}$

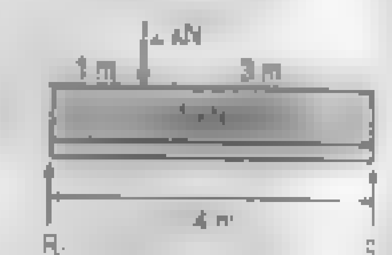
b) Calculando la deflexión debajo de la carga de 300 N (x = 2 m):

$$EI\delta_1 = \frac{(400)(3)}{(6)(4)}\left[\left(\frac{4}{3}\right)(2-1)^3 + (4^2-3^2)(2) - 2^3\right] = 366,67\ N.m^3$$

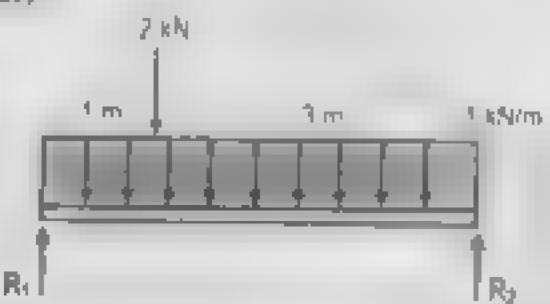
$$EI\delta_2 = \frac{(300)(2)(2)}{(6)(4)}(4^2 - 2^2 - 2^2) = 400\ N.m^3$$

$$EI\delta = EI\delta_1 + EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 766,67\ N.m^3}$$

687 Calcular la deflexión en el centro del claro, en la viga de la figura, con $E = 10 \times 10^9\ N/m^2$ e $I = 20 \times 10^6\ mm^4$



Resolución



Utilizando el caso (7) de la tabla 6-2 (carga puntual)

$$\delta = \frac{Pb}{48\,EI}(3L^2 - 4b^2)\quad a > b$$

$P = 2\ kN$; $b = 1\ m$; $a = 3\ m$; $L = 4\ m$

$E = 10 \times 10^9\ N/m^2$; $I = 20 \times 10^{-6}\ m^4$

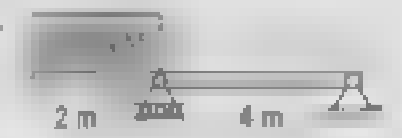
$$\delta = \frac{(2\times10^3)(1)}{(48)(10\times10^9)(20\times10^{-6})}[(3)(4)^2 - (4)(1)^2] \Rightarrow \delta_1 = 9,1667 \times 10^{-3}\ m$$

Utilizando el caso (8) de la tabla 6-2 (carga repartida)

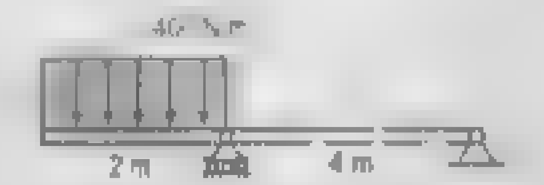
$$\delta = \frac{5wL^4}{384\,EI} \Rightarrow \delta_2 = \frac{(5)(1\times10^3)(4)^4}{(384)(10\times10^9)(20\times10^{-6})} = 0,01667\ m$$

$\delta = \delta_1 + \delta_2 \Rightarrow \delta = 0,02583\ m \therefore \boxed{\delta = 25,83\ mm}$

688 Determinar el valor de $EI\delta$ en el punto central entre apoyos de la viga de la figura



Resolución



La viga puede ser reemplazada por otra con las siguientes características

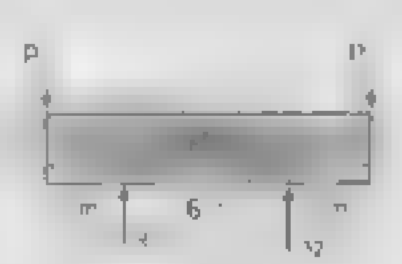
800 N.m

4 m

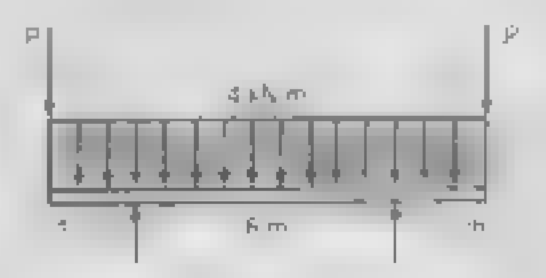
Aplicando el caso (11) de la tabla 6-2

$$EI\delta = \frac{M_0 L^2}{16} = \frac{(800)(4)^2}{16} \Rightarrow EI\delta = 800\ N.m^3$$

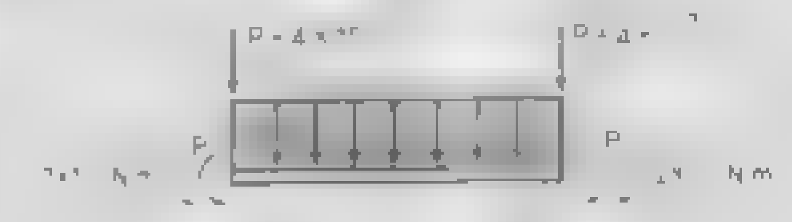
689 La viga de la figura tiene una sección rectangular de 100 mm de ancho por 200 mm de altura. Calcular el valor de P para que la deflexión en el centro valga 4 mm. $E = 10 \times 10^9\ N/m^2$



Resolución



Reemplazando la viga por una equivalencia



Analizando la deflexión en el centro debido a varias cargas

a) Debido a la carga repartida (caso 8)

$$EI\delta_1 = \frac{5wL^4}{384} = \frac{[illegible]}{384} = 67{,}5 \times 10^3 \text{ N.m}$$

b) Debido al momento en el extremo (caso 12)

$$EI\delta_2 = \frac{ML^2}{[illegible]} = \frac{(P + 2 \times 10^3)(\ldots)^2}{1[illegible]} \; [illegible] \text{ N.m}$$

Como también existe momento en el otro extremo, consideramos dos veces $EI\delta_2$: $EI\delta = EI\delta_1 - 2EI\delta_2$

El signo negativo se debe a que los momentos en los extremos producen deflexiones en el centro que se oponen al producido por la carga repartida

$EI\delta = 67{,}5 \times 10^3 - (2)(2.25)(P + 2 \times 10^3)$ (1)

Pero: $I = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{(0.1)(0.2)^3}{12} = 6{,}67 \times 10^{-5} \text{m}^4$

Reemplazando datos en (1):

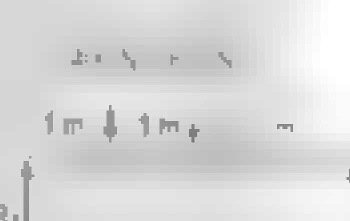
$(10 \times 10^3)(6\,667 \times 10^{-5})\,(0{,}04) = 67\,5 \times 10^3 - 4\,5(P + 2 \times 10^3)$

Operando tenemos

$P = 7073{,}778 \text{ N} \Rightarrow P = 7\,07 \text{ kN}$

690. La viga de la figura tiene una sección rectangular de 50 mm de ancho. Calcule la altura adecuada d de la viga si la deflexión, a la mitad del claro, no puede ser mayor que 20 mm, estando limitado el esfuerzo por flexión a un valor de 10 MN/m². Supóngase que E = 10 GN/m²

Resolución.



Aplicando el caso 7 de la tabla 6-2

$$EI\delta_1 = \frac{600\,(2)}{(48)}[3(5)^2 - 4(3)^2]$$

$EI\delta_1 = 975 \text{ N m}^3$, $EI\delta_2 = \frac{(400)(4)}{(48)}[3(5)^2 - 4(4)^2] \Rightarrow EI\delta_2 = 366{,}67 \text{ N m}^3$

$EI\delta = EI\delta_1 + EI\delta_2 \quad \therefore \quad EI\delta = 1341.67 \text{ N.m}^3$

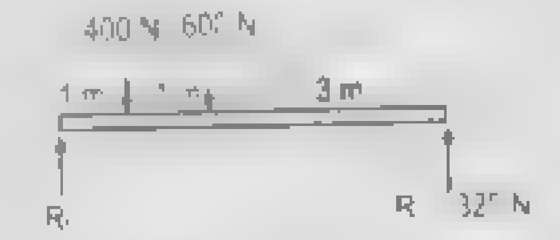
Re[illegible]ando los datos en la expresión anterior:

$(10 \times 10^9)\,(I)\,(0\,02) = 1341{,}67 \Rightarrow I = 6{,}708 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Com[illegible] $\frac{[illegible]}{12}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{12} = 6.708 \times 10^{-6}$

D[illegible] 117,2 mm

An[illegible]s por esfuerzos



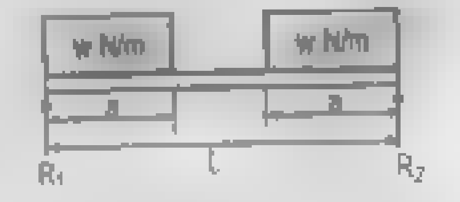
[illegible] M [illegible] N

A[illegible] $\frac{M}{S}$ S [illegible]

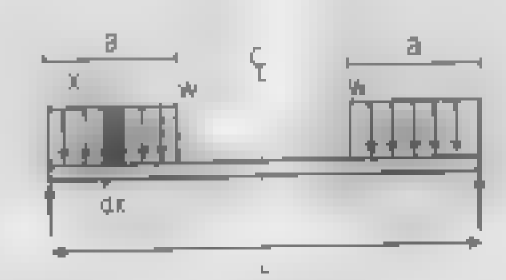
R[illegible] 10 × 10 [illegible] $\Rightarrow d = 107{,}33 \text{ mm}$

E[illegible] d = 117.2 mm

[illegible] [illegible] la deflexión en el centro del claro en la [illegible] aplicar el caso 7 e inte[illegible]



Resolución



Aplicamos el caso 7 de la tabla 6-2 para la carga de la izquierda.

$$EI\delta_1 = \Sigma \frac{Pb}{48}(3L^2 - 4b^2)$$

$$= \int_0^a \frac{(wdx)(x)}{48}\left[3L^2 - 4x^2\right] = \int_0^a\left[\frac{3wL^2x}{48} - \frac{4wx^3}{48}\right]dx$$

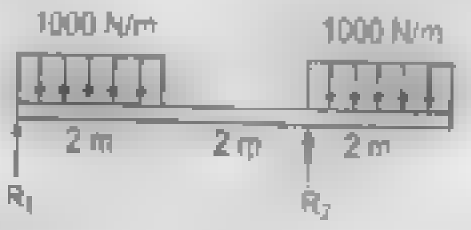
$$= \frac{3wL^2}{(2)(48)}(x^2)\Big|_0^a - \frac{4w}{(4)(48)}(x^4)\Big|_0^a \Rightarrow EI\delta_1 = \frac{3wL^2a^2}{(2)(48)} - \frac{wa^4}{(48)}$$

Debido a que existe simetría, la deflexión en el centro se duplica

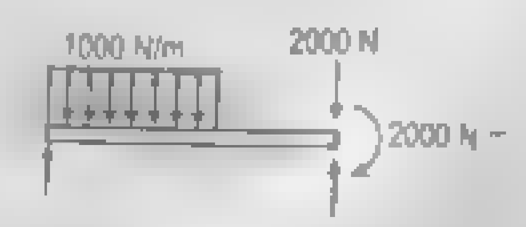
$EI\delta = 2EI\delta_1 \Rightarrow$

692. Calcular EIδ en el punto medio entre apoyos, en la viga con voladizo de la figura. *Indicación*: combinar el caso 11 y parte del caso 8.

Resolución:



El sistema equivalente es



Considerando el caso 8: si la viga estuviera cargada en su totalidad, la deflexión sería la indicada en la tabla 6-2, pero como sólo está cargada la mitad de la viga, la deflexión se reduce a la mitad (en el centro de luz).

$$EI\delta_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5wL^4}{384}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(5)(1000)(4)^4}{384} \Rightarrow EI\delta_1 = 1666.67\ N.m^3$$

Considerando el caso 11 para la deflexión debido al momento

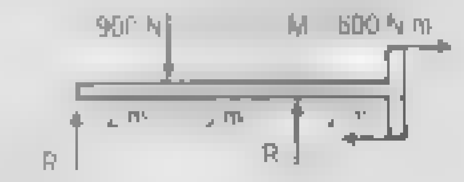
$$EI\delta_2 = \frac{ML^2}{16} = \frac{(2000)(4)^2}{16} \Rightarrow EI\delta_2 = 2000\ N.m^3$$

Entonces, la deflexión en el centro de luz es

$EI\delta = 1666.67 - 2000 = -333.33\ N.m^3$ ∴ $EI\delta = -333.33\ N.m^3$

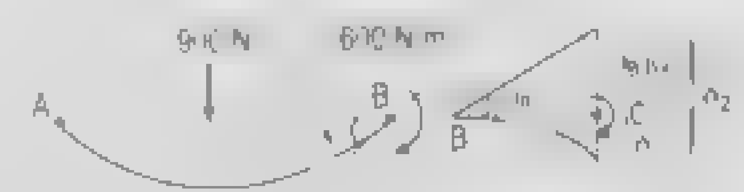
El signo negativo indica que el punto medio entre apoyos se ha desplazado hacia arriba.

693. En la figura calcular el valor de EIδ en el extremo derecho de la viga mostrada.



Resolución:

Dividiendo la viga por partes



$\theta_1 = \frac{Pb(L^2 - a^2)}{6EIL}$ Ángulo debido a la carga $\Rightarrow \theta_1 = \frac{(900)(2)(5^2 - 2^2)}{(6)(5)EI} = \frac{1260}{EI}$

$\theta_2 = \frac{ML}{3EI}$ Ángulo debido al momento $\Rightarrow \theta_2 = \frac{(600)(5)}{(3)EI} = \frac{1000}{EI}$

Por tanto: $\theta = \frac{1260}{EI} - \frac{1000}{EI} = \frac{260}{EI}$

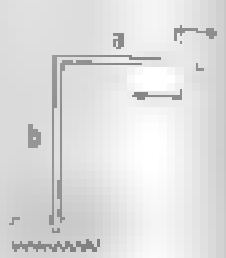
En el tramo BC

$$\delta_2 = \frac{ML^2}{2EI}\Bigg\}\begin{matrix}\text{deflexión debido al}\\ \text{momento en el volado}\end{matrix} \rightarrow \delta_2 = \frac{(600)(2)^2}{2EI} = \frac{1200}{EI}$$

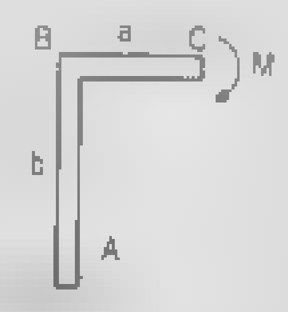
Reemplazando en (1): $\delta = \delta_2 - (\theta_B)(2) = \frac{1200}{EI} - \left(\frac{260}{EI}\right)(2)$

De lo cual: $\boxed{EI\delta = 680\ N\,m^3}$ descendente

694 La estructura de la figura es de sección constante y está perfectamente empotrada en su extremo inferior. Calcular la deflexión vertical producida en su punto de aplicación por el par M



Resolución:



Trabajando en el tramo AB

De la tabla 6-2, caso 5 tenemos: $\theta = \frac{Mb}{E}$

Debido a que existe continuidad en el nodo B

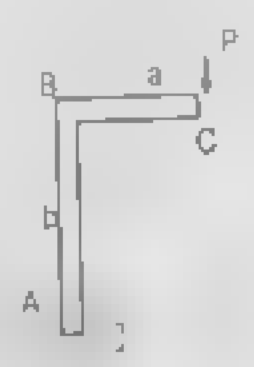
De la tabla 6-2, caso 5: $\delta_2 = \frac{Ma^2}{2E}$

Entonces

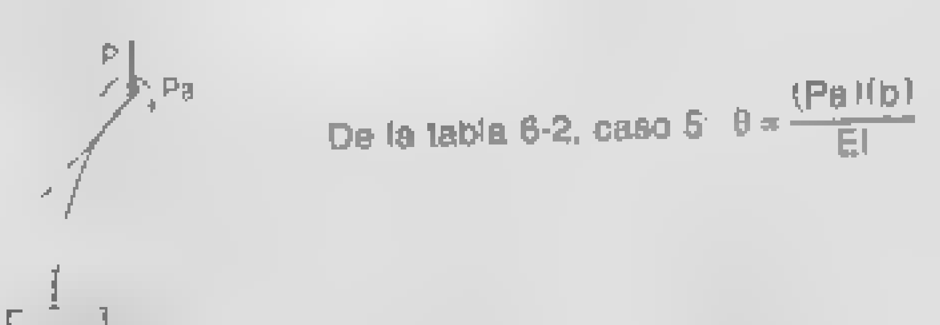
$$\delta = (\theta)(a) + \delta_2 \Rightarrow \delta = \left(\frac{Mb}{EI}\right)(a) + \frac{Ma^2}{2EI}$$

Resolver el problema anterior si se sustituye el par por una fuerza P vertical y hacia abajo

Resolución

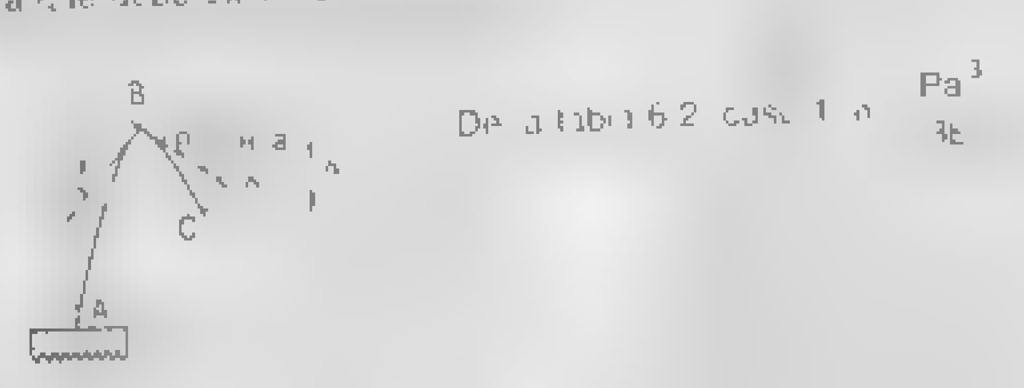


Trabajando en el tramo AB



De la tabla 6-2, caso 5: $\theta = \frac{(Pa)(b)}{EI}$

Debido a que debe existir continuidad en el nodo B



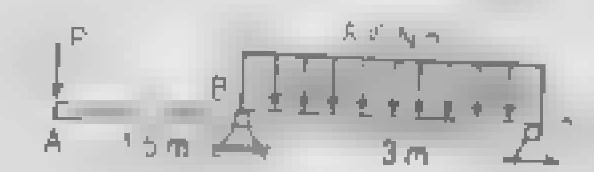
De la tabla 6-2, caso 1: $\frac{Pa^3}{3E}$

Entonces

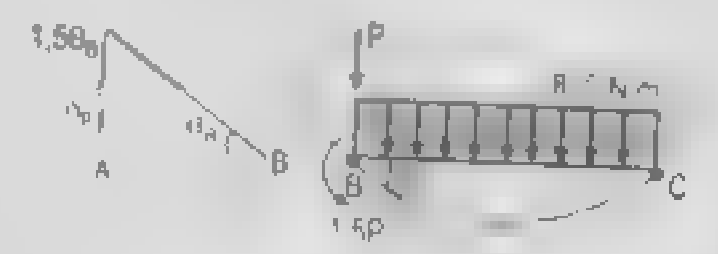
$$\delta = (\theta)(a) + \delta_1 \Rightarrow \delta = \frac{(Pa)(b)(a)}{EI} + \frac{Pa^3}{3EI}$$

696. En la figura, calcular el valor de P para el cual la deflexión debajo de esta fuerza sea nula.

Resolución



Analizando la viga por partes



En el tramo BC: considerando la carga repartida. $\theta_{B1} = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{(800)(3)^3}{24EI} = \frac{900}{EI}$

En el mismo tr[illegible] considerando el momento [illegible] $\frac{M_0 L}{3EI} = \frac{1,5P(3)}{3EI} = \frac{1,5P}{EI}$

Entonces: $\theta_B = \theta_{B1} - \theta_{B2} = \frac{900 - 1,5P}{EI}$ ... (1)

En el tramo AB: $\delta = \frac{(P)(1,5)^3}{3EI}$ ... (2)

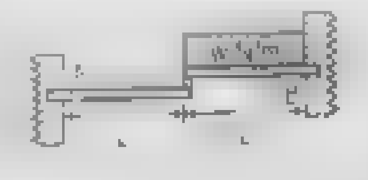
Por condición del problema, la deflexión debajo de la fuerza será nula

De (1) y (2)

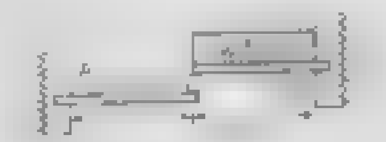
$(\theta)(1,5) = \delta_p \Rightarrow \frac{(900 - 1,5P)}{EI}(1,5) = \frac{(P)(1,5)^3}{3EI}$

De donde $\boxed{P = 400\ N}$

[illegible] una carga repartida sobre una de ellas, como se indica en la figura. Determinar los momentos en el empotramiento.



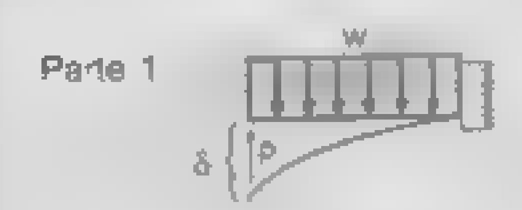
Resolución.



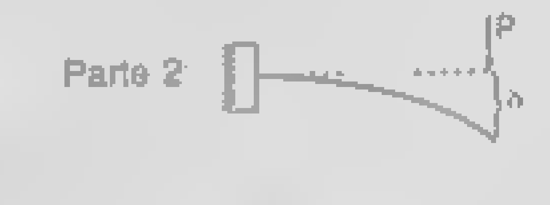
[illegible] rmada

Debido a la geometría del problema, ambos extremos de los volados se desplazan la misma distancia (δ). Pero al llevar a cabo el análisis dividimos el [illegible]

Parte 1



Parte 2

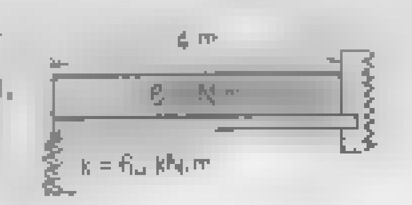


En la parte 2: usando el caso 1 de la tabla 6-2: $\delta = \frac{PL^3}{3EI}$ (1)

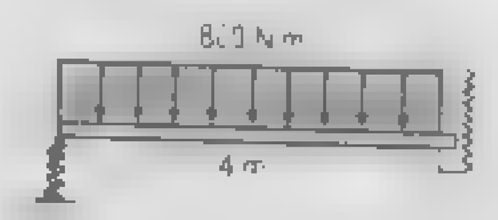
En la parte (1), usando los casos 3 ó 1 de la tabla 6 - 2: $\delta = \frac{wL^4}{8EI} - \frac{PL^3}{3EI}$ (2)

Como (1) = (2), entonces: $\frac{PL^3}{3EI} = \frac{wL^4}{8EI} - \frac{PL^3}{3EI} \Rightarrow \boxed{P = \frac{3wL}{16}}$

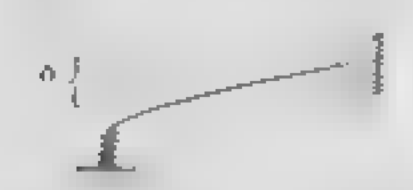
[illegible] do en un resorte de constante k = 60 kN/m. En la viga, E = 10 × 10⁹ N/m² e I = 60 × 10⁶ mm⁴. Calcular la deflexión en el extremo.



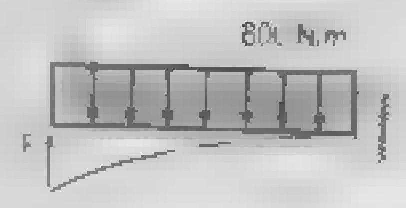
Resolucion



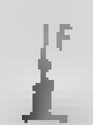
Deformada



Dividiendo el sistema



Resorte:



Para el resorte: $F = kx \Rightarrow F = (60 \times 10^3)(\delta)$

Para la viga de la tabla 6-2

$$\delta = \frac{wL^4}{8EI} - \frac{FL^3}{3EI} \Rightarrow \delta = \frac{(800)(4)^4}{8EI} - \frac{(60\times10^3)(\delta)(4)^3}{3EI}$$

$$\delta = \frac{25\,600}{EI} - \frac{1\,280\,000\delta}{EI} \Rightarrow EI\delta = 25\,600 - 1\,280\,000\delta$$

Reemplazando datos:

$$(10 \times 10^9)(60 \times 10^{-6})(\delta) = 25\,600 - 1\,280\,000\delta$$

De donde $\delta = 0.013617\ m$

Dos vigas de madera están colocadas en ángulo recto y en contacto en su punto medio. La viga superior A tiene una sección de 50 mm de ancho por 200 mm de altura y un claro de 3 m. Está simplemente apoyada en sus extremos. La viga inferior B tiene una sección de 80 mm de ancho por 200 mm de altura y está simplemente apoyada sobre un claro de 4 m. En el cruce, el conjunto soporta una carga de 10 kN. Determinar el esfuerzo normal máximo en cada viga.

Resolucion.

$$\frac{(0.05)(0,2)^3}{12} = 3,33\times10^{-5}\ m^4 \qquad \frac{(0,08)(0,2)^3}{12} = 5,33\times10^{-5}\ m^4$$

Reemplazando valores tenemos

$$F = \frac{(10\times10^3)(3)^3(5,33\times10^{-5})}{(5,33\times10^{-5})(3)^3 + (3,33\times10^{-5})(4)^3} \Rightarrow F = 4029.85\ N$$

$$F = 4.0298\ kN$$

Calculando los esfuerzos $\sigma = \frac{M}{S}$

Viga A

$M_{máx} = 4.48$ kN m

$S = 0.000333\ m^3 \Rightarrow \sigma_A = 13\,490\ kN/m^2$

Viga B.

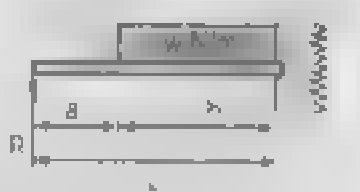
$\sigma_B = 7556.25\ kN/m^2$

CAPÍTULO 7

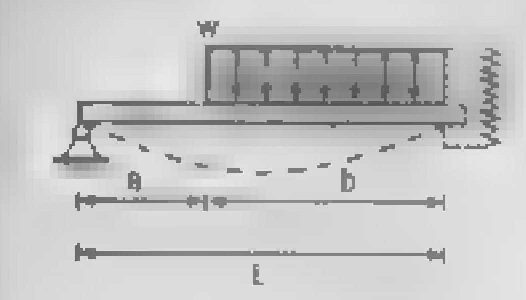
VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

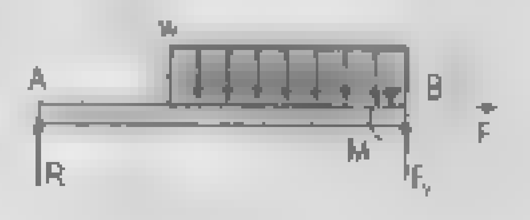
701 y 702: problemas ilustrativos

703 En la viga apoyada y empotrada de la figura, calcular R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



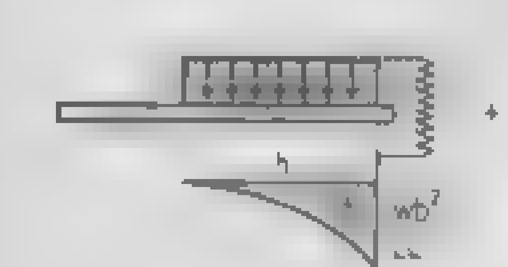
Resolución

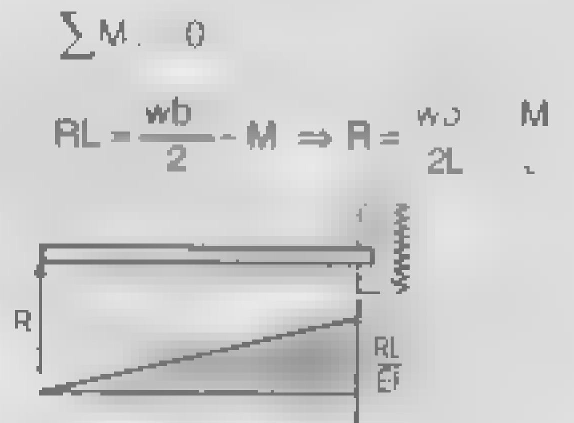




$\sum M = 0$

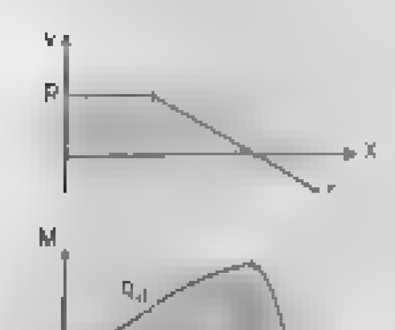
$RL = \frac{wb}{2} - M \Rightarrow R = \frac{wb}{2L} - \frac{M}{L}$





$\frac{1}{8}wb^3(4L - b) = RL^3 \Rightarrow R = \frac{wb^3}{8L^3}(4L - b)$

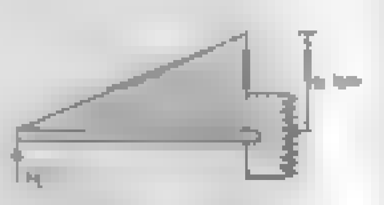
Diagramas



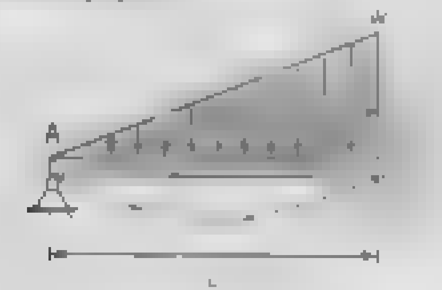
$\Sigma F_y = 0.$

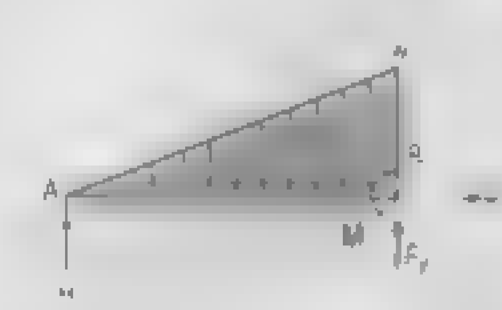
$$M = \frac{wb^2}{2} - RL \Rightarrow M = -\frac{wb^2}{8L^2}(2L-b)^2$$

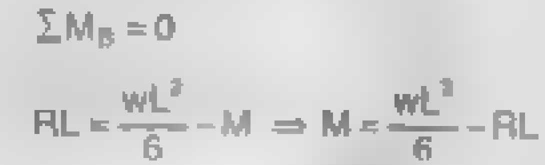
704 Calcular el valor de R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga apoyada y empotrada de la figura



Resolución

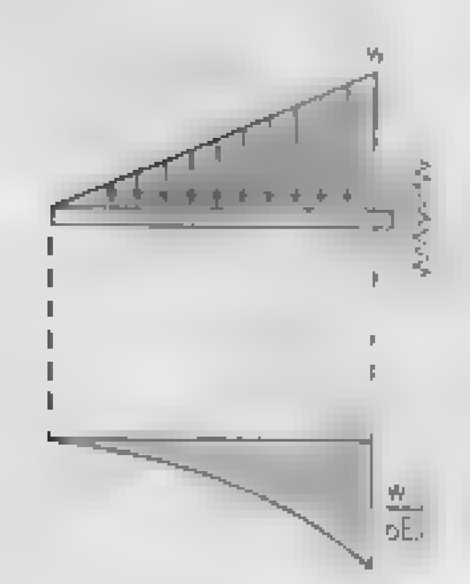


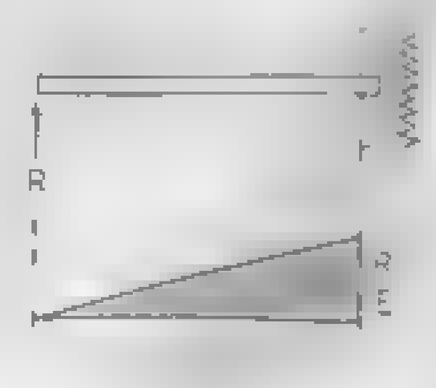




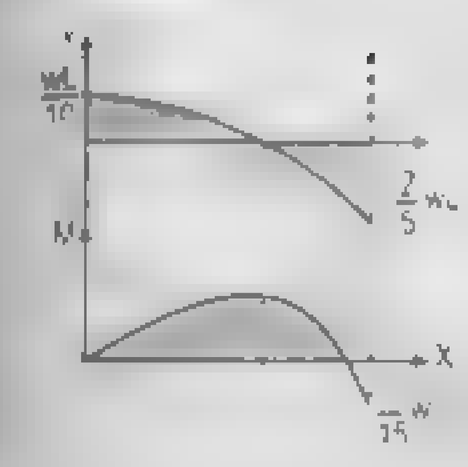
$\Sigma M_B = 0$

$$RL = \frac{wL^2}{6} - M \Rightarrow M = \frac{wL^2}{6} - RL$$



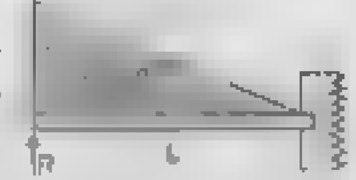


Diagramas

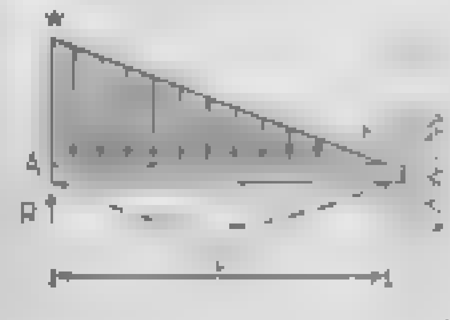


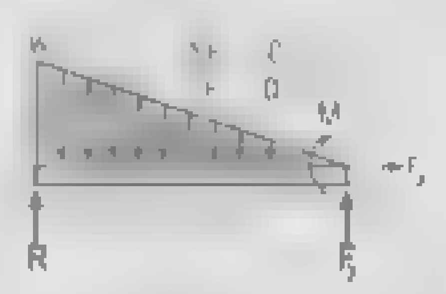
$\Sigma F_y = 0:$

En la viga de la figura, determinar la reacción R en el apoyo redundante y trazar los diagramas de cortante y de momento.

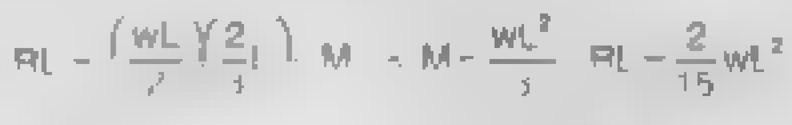


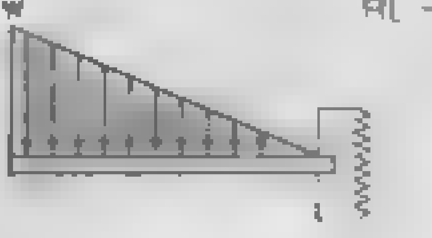
Resolución

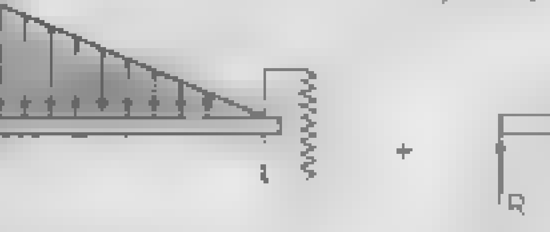


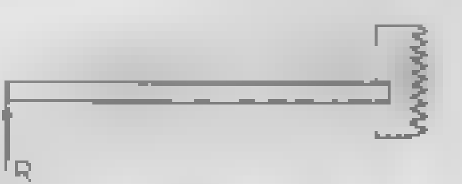


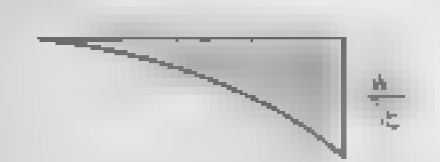
$\Sigma M_B = 0$



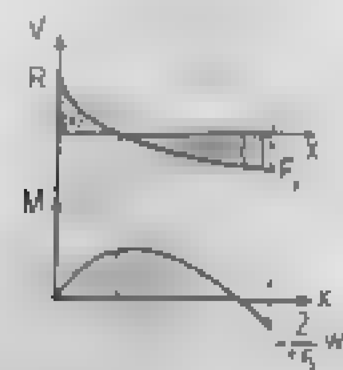








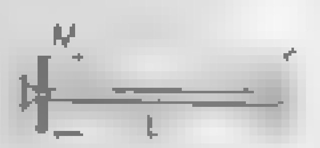
Diagramas



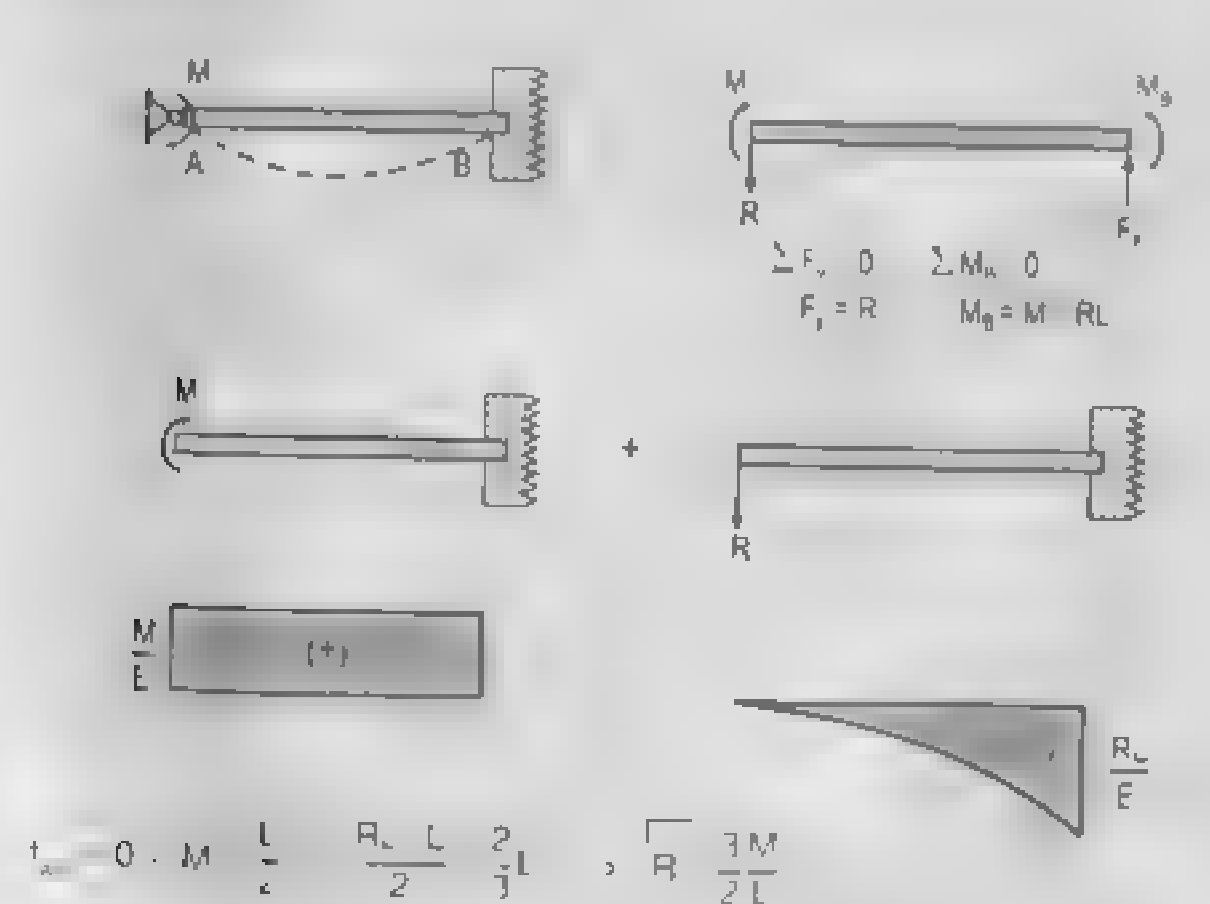
$\sum F_y \quad 0$

$F_y \quad \frac{wL}{2} \quad \frac{wL}{5} \quad \frac{3}{10}wL$

706 Se aplica un par M al extremo articulado de la viga de la figura. Calcular la reacción en este extremo y el momento de empotramiento.



Resolución



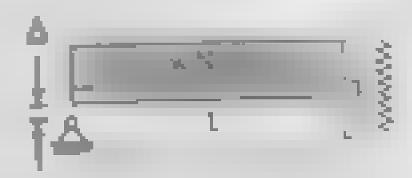
$\sum F_y \quad 0 \qquad \sum M_B \quad 0$

$F_y = R \qquad M_B = M \quad RL$

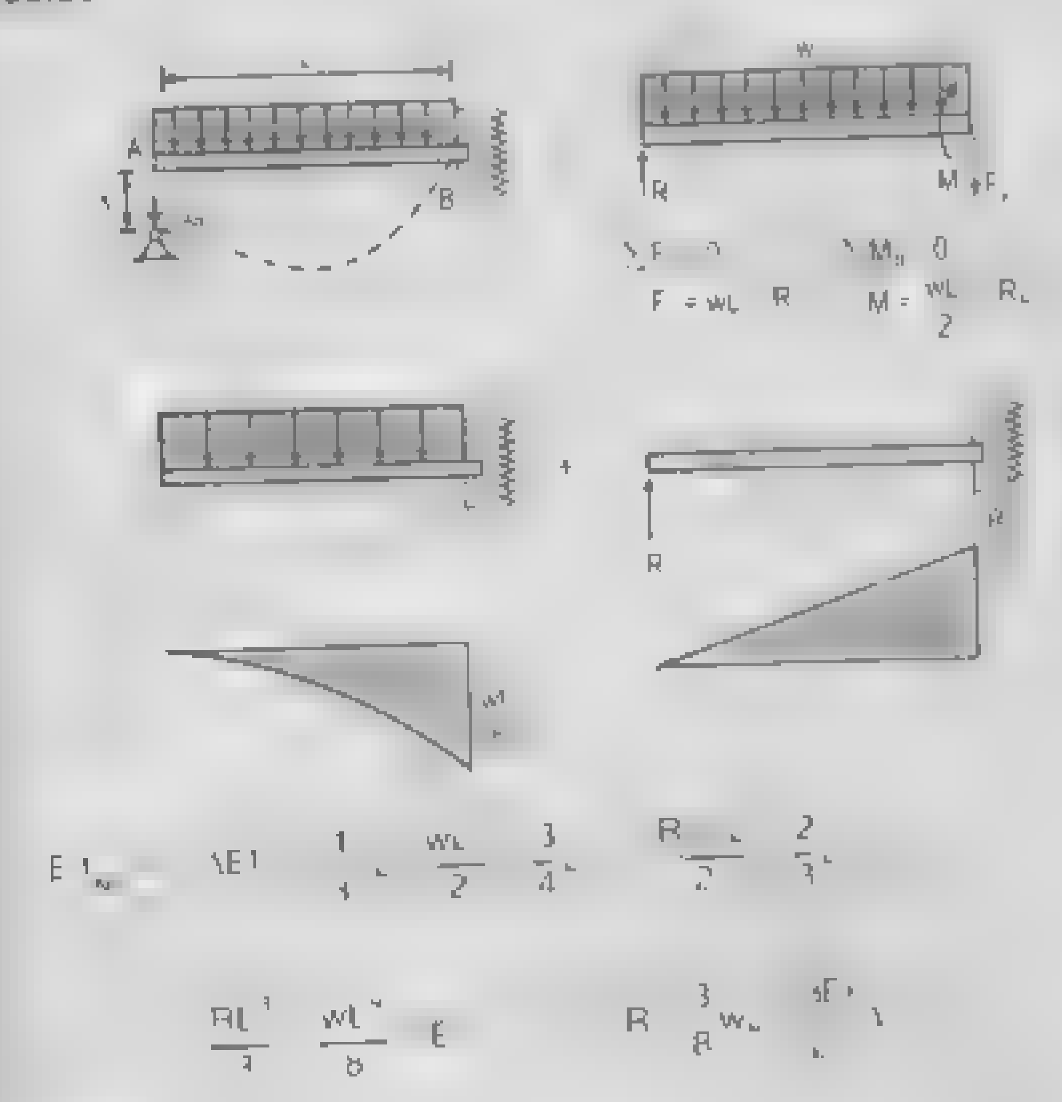
$t_{A/B} \quad 0 \cdot M \frac{L}{2} \qquad \frac{RL\ L}{2}\ \frac{2}{3}L \quad \Rightarrow \quad R \quad \frac{3M}{2L}$

$M_B \quad M - \frac{3}{2}M = \quad \frac{1}{2}M$

Determinar la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga estáticamente indeterminada de la figura.



Resolución



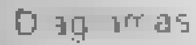
$\sum F \quad 0 \qquad \sum M_B \quad 0$

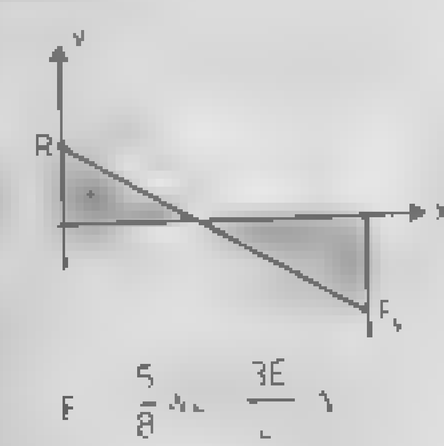
$F = wL \quad R \qquad M = \frac{wL^2}{2} \quad RL$

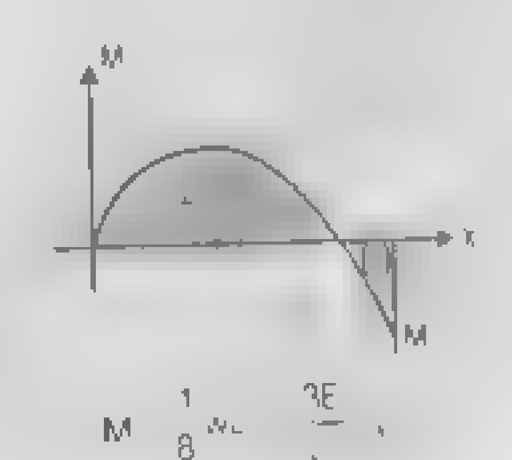
$E I\, t_{A/B} \qquad \frac{1}{3}L \quad \frac{wL^2}{2} \quad \frac{3}{4}L \qquad \frac{RL\ L}{2} \quad \frac{2}{3}L$

$\frac{RL^3}{3} \quad \frac{wL^4}{8} \qquad R \quad \frac{3}{8}wL$

Diagramas

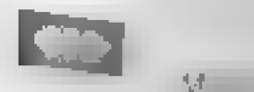




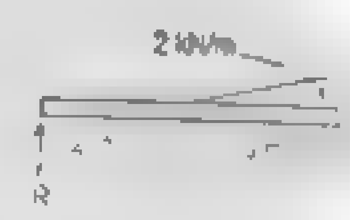


$F \quad \frac{5}{8}wL$

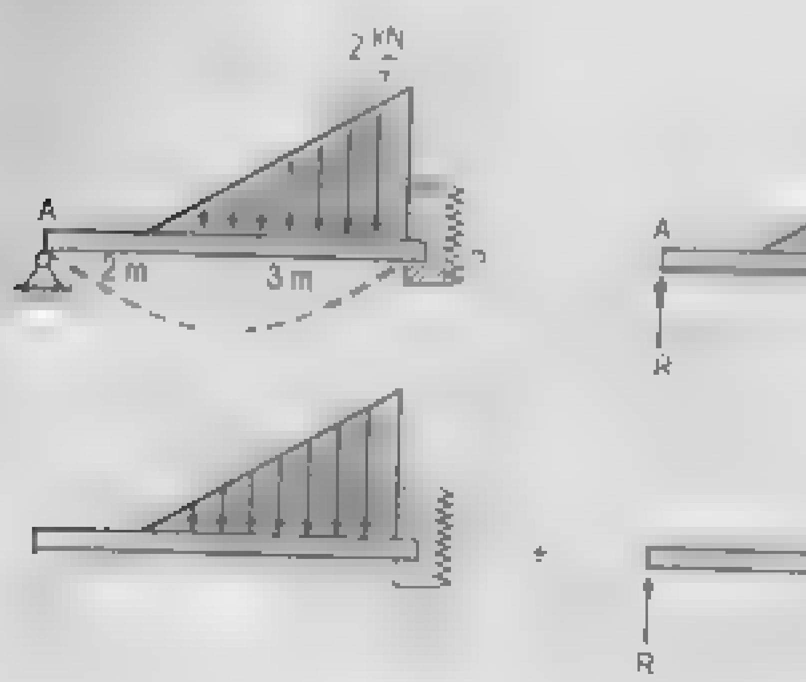
$M \quad \frac{1}{8}wL^2$

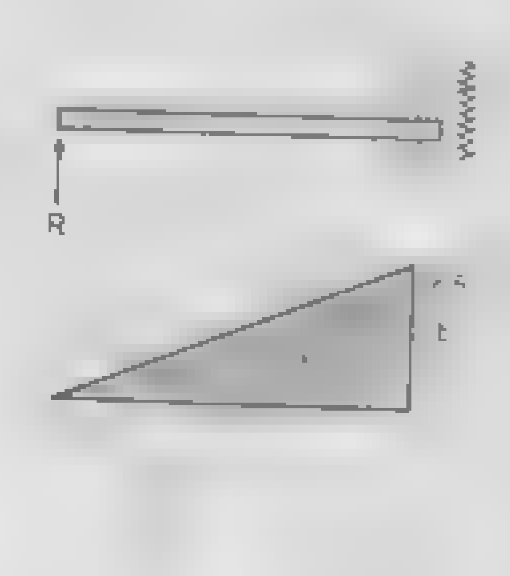


708. Calcular la reacción R en la viga de la figura.



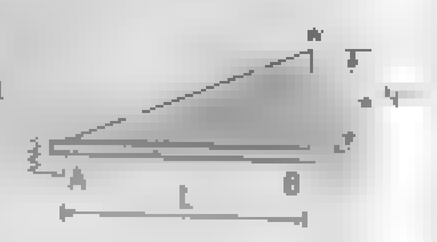
Resolución:



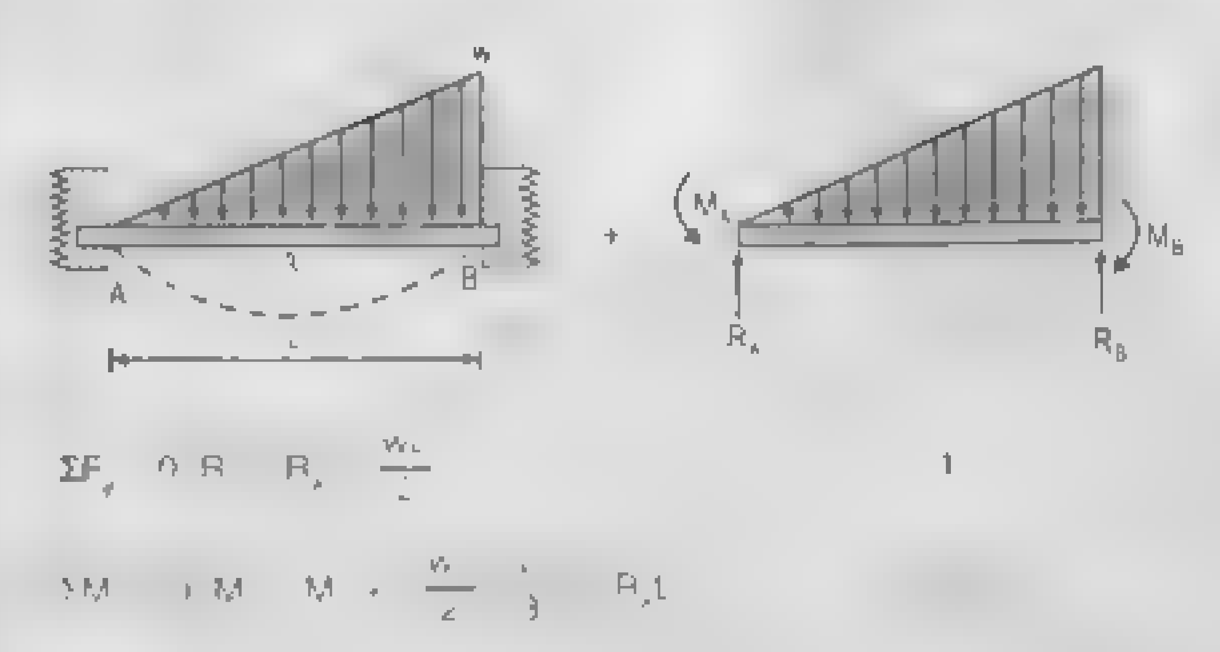


$t_{A/B} = 0 = \frac{300}{4}$ ... $\frac{R \cdot 5 \cdot 5}{2}$ ... R

709. Determinar los momentos de empotramiento en la viga doblemente empotrada de la figura.



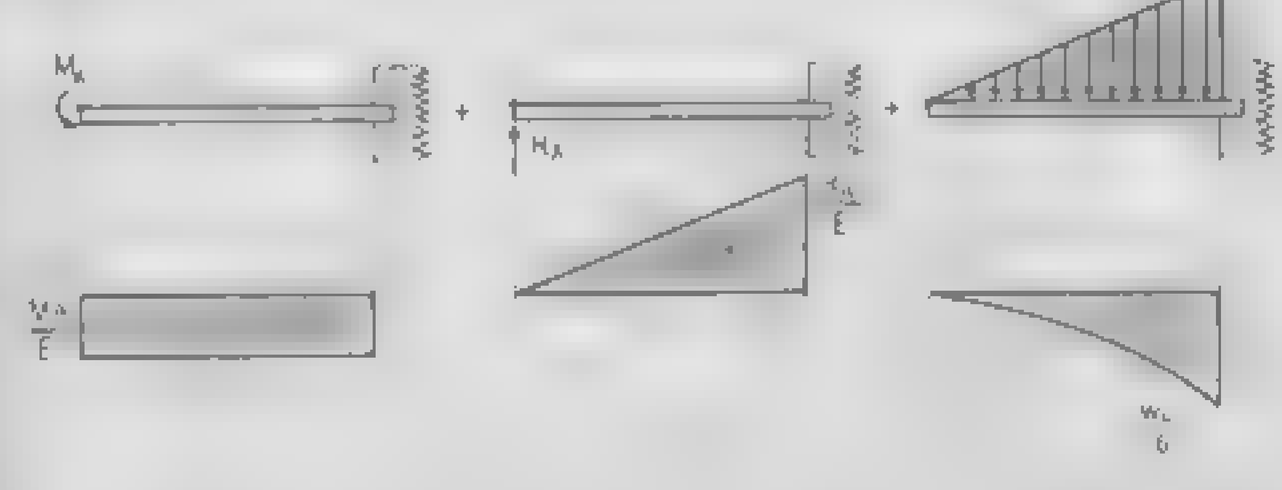
Resolución:



$\Sigma F_y = 0$: R_B ... R_A ... $\frac{wL}{2}$ ... (1)

ΣM ... M ... $\frac{w}{2}$ ... R_AL

Diagramas



... M_A ... $\frac{R_AL}{2}$ ... $\frac{wL}{24}$

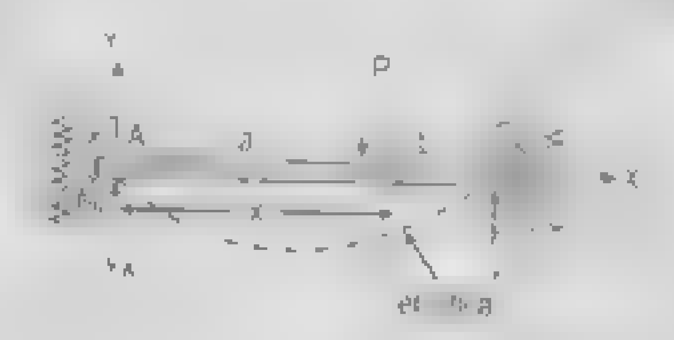
... $\frac{2}{3}$ ... $\frac{1}{4}$ ... $\frac{4}{5}$

... $\frac{2}{3}R_AL$ ... $\frac{1}{12}wL$ ... R_A ... $\frac{3}{20}wL$ ... M_A ... $\frac{1}{30}wL$

En (2): $M_B = \frac{wL^2}{20}$

710. Calcular los momentos de empotramiento en la viga de la figura.

Resolucion:



(a+b = L) donde el momento flector para una variable "x" es:

$$M = V_A x + M_A - P(x-a) \qquad (1)$$

Por el método de la doble integración

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = V_A x + M_A - P(x - [illegible])$$

$$EI\frac{dy}{dx} = V_A\frac{x^2}{2} + M_A x - \frac{P}{2}(x - [illegible])^2 \qquad (\beta)$$

$$EIy = \frac{V_A}{6}x^3 + \frac{M_A}{2}x^2 - \frac{P}{6}(x - [illegible])^3 \qquad (\gamma)$$

Para $x = L$, $\frac{dy}{dx} = 0$ e $y = 0$

Así (de (β) y (γ))

$$V_A\frac{L^2}{2} + M_A L - \frac{P}{2}(L-a)^2 = 0$$

$$\frac{V_A}{6}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 - \frac{P}{6}(L - [illegible])^3 = 0$$

Resolviendo:

$$\boxed{M_A = -\frac{Pab^2}{L^2}} \wedge V_A = \frac{Pb^2(3a+b)}{L^3}$$

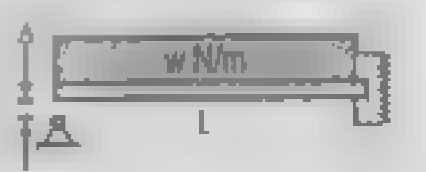
Tomando momentos en C

$$M_A + V_A L - Pb = M_c \qquad (2)$$

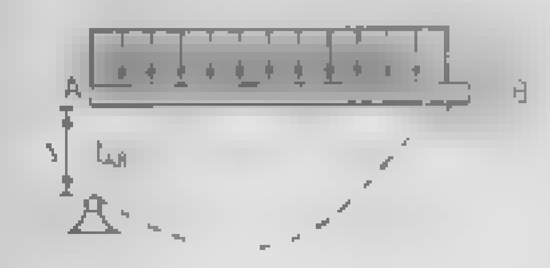
Reemplazando en (2): $-\frac{Pab^2}{L^2} + \frac{Pb^2}{L^2}(3a+b) - Pb = M_c$

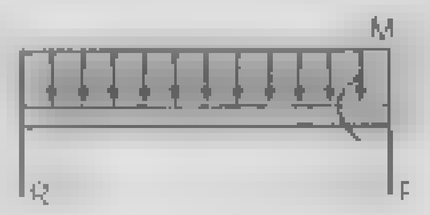
Simplificando: $M = \frac{P[illegible]}{L^2}$

711. En la viga mostrada en la figura hay inicialmente un espacio libre D entre el extremo [illegible] y el rodillo [illegible]. Calcular la reacción en este apoyo después de aplicar la carga w uniformemente distribuida.



Resolucion

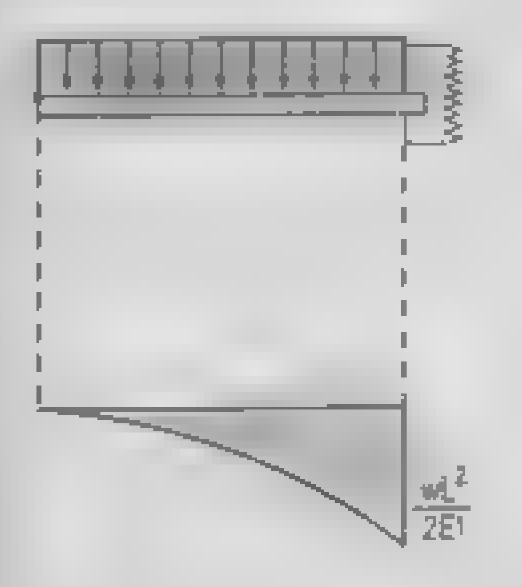




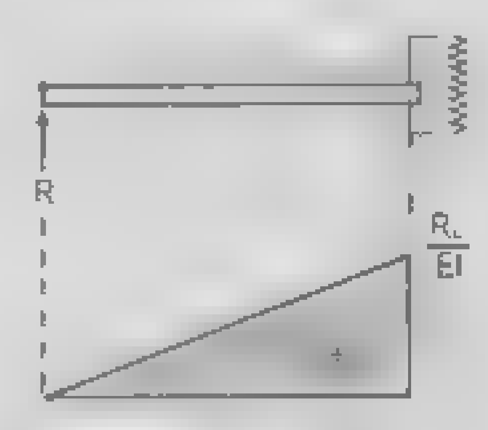
$\Sigma F_y = 0$ F [illegible] R

$\Sigma M_B = 0$ M [illegible] R

Por superposición



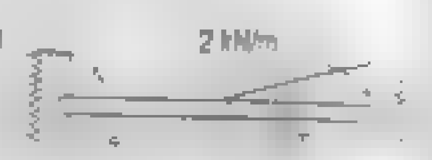
+



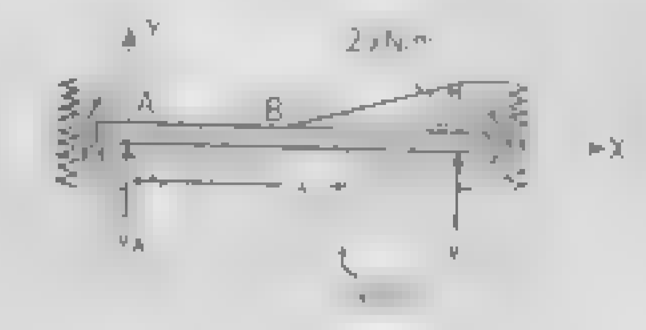
$$EI t_{A} = [illegible]$$

$$\frac{RL}{3} - \frac{wL}{8} = [illegible] \qquad R = \frac{3}{8}wL - [illegible]$$

712 Calcular los momentos de empotramiento en la viga



Resolución



Por el método de la doble integración, respecto a la variable "x" tomada de A

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+V_Ax-\frac{(x-2)^3}{9} \qquad ...(\alpha)$$

De (β) y (γ)

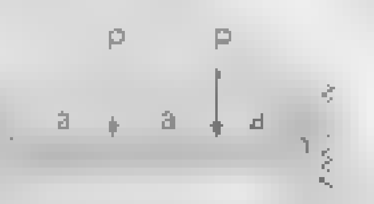
$$M_A(5)+\frac{V_A}{2}(5)^2 \qquad 0 \qquad \text{Resolviendo}$$

$$\frac{M_A}{2}(5)^2+\frac{V_A}{6}(5)^3 \qquad 0$$

Tomando momentos en C: $(\Sigma M_C=0)$

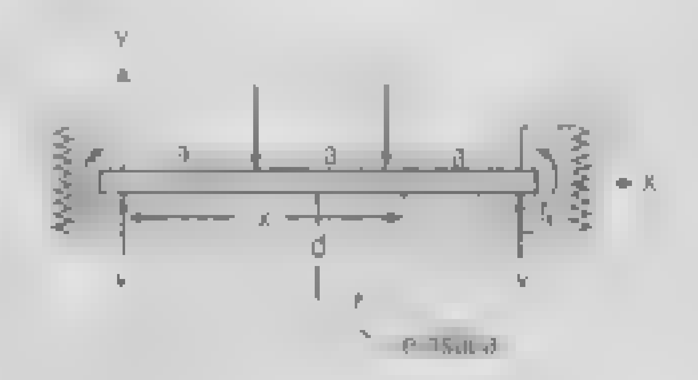
$$M_A+V_A(5)-\frac{1}{2}(2)(3)\left(\frac{1}{3}3\right)-M_C \Rightarrow$$

Calcular los momentos de empotramiento y el valor de ... por simetría las reacciones en los extremos son iguales y la pendiente es nula en el centro. Tomar como hiperestático el momento en el centro



Resolución

la simetría del sistema



$$EI\frac{dy}{dx}=Mx+\frac{V}{2}x^2 \quad \frac{P}{2}(x-a)^2-\frac{P}{2}(x-2a)^2+C_1$$

Como para x = 0: $\frac{dy}{dx}=0 \wedge y=0$. Así $C_1 = C_2 = 0$

Para x = 3a, $\frac{dy}{dx}=0 \wedge y=0$

Luego:

$$3Ma+\frac{9}{2}Va^2-2a^2P \quad \frac{a^2}{2}P=0$$

Resolviendo

$$\boxed{M=-\frac{2}{3}aP}\ ,\quad V = P \text{ (tal como lo teníamos inicialmente)}$$

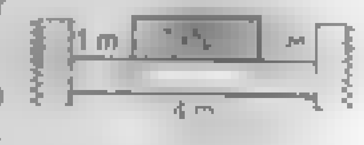
Para $x=\frac{3a}{2}$ (centro del claro)

$$EI\delta=\left(-\frac{2}{3}aP\right)\left(\frac{3a}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\frac{P}{6}\left(\frac{3a}{2}\right)^3-\frac{P}{6}\ \ldots$$

(no se toma el valor en $(x-2a)$)
Así

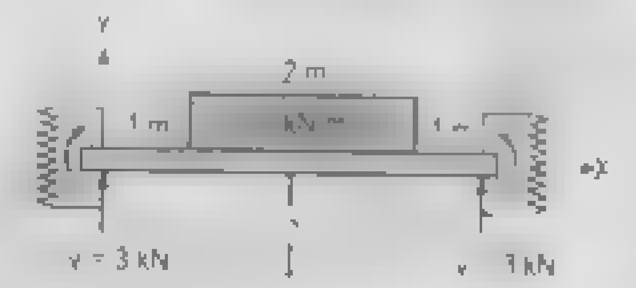
E... P ... (el signo menos es porque δ está debajo de la horizontal de ...)

714 En la viga doblemente empotrada de la figura, calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima. *Indicación:* emplear vigas en voladizo equivalentes con el empotramiento en el centro y voladas hacia los extremos.

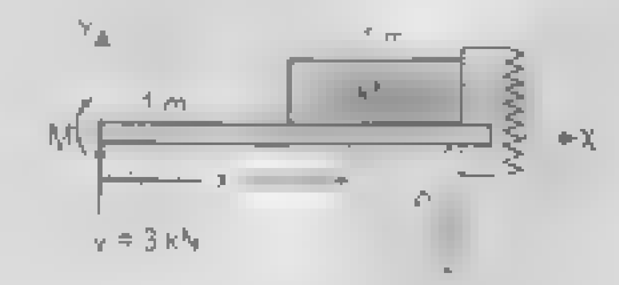


Resolución:

Tom... en la parte izquierda del sistema



Por la simetría del sistema: V = 3 kN
Sistema equivalente



Por el método de la doble integración.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M+3x-\frac{3}{2}(x-1)^2$$

$$EI\frac{dy}{dx}=Mx+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2(3)}(x-1)^3+C_1=0 \qquad (\alpha)$$

$$EIy=\frac{M}{2}x^2+\frac{3x^3}{2\cdot 3}-\frac{3}{\ldots}(x-1)^4+C_2=0 \qquad (\beta)$$

Para $x=0$: $\frac{dy}{dx}=y=0$. Así $C_1=C_2=0$, para $x=2$: $\frac{dy}{dx}=0$

En (α)

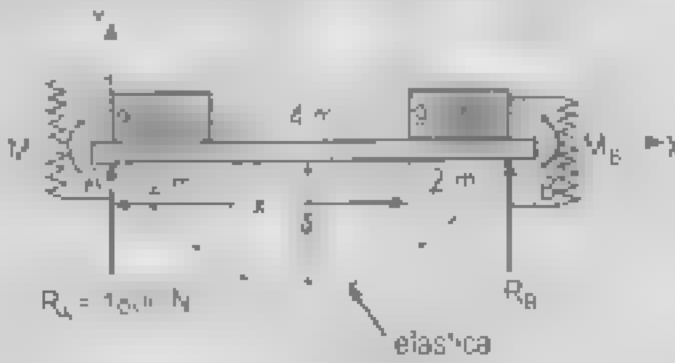
$$M\ldots-\frac{3}{2}(2)^2-\frac{3}{\ldots}(2-1)^3=0 \Rightarrow M=-\frac{11}{4}\ kN\cdot m \qquad M=-2750\ N\cdot m$$

Para $x=2$, $y=\delta$, en (β): $EI\delta=\left(-\frac{11}{4}\ldots\right)\ldots\ kN\ldots$

71. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga doblemente empotrada de la figura. *Indicación:* considerar como magnitudes hiperestáticas la fuerza cortante y el momento flexionante en el centro. Obsérvese que la fuerza cortante que actúa en el centro es nula. ¿Por qué?

Resolución:

C... sistema ... M_A ... M ... R_A ... R ... 18... N



La ecuación de la elástica es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+18\ldots x-18\ldots(x-1)-\frac{900}{2}(x-6)^2 \qquad (\alpha)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = M_A + 900x^2 - 900(x-1)^2 - 150(x-6)^3 + C$$

$$EIy \quad \frac{M_A}{2}x^2 + 300x^3 \quad 300(x-1)^3 - \frac{75}{2}(x-6)^4 + C_1x + C_2 \qquad \ldots ($$

En (β), si $x = 4$, $\frac{dy}{dx} = 0$ (centro del claro); si $x = 8$, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$8M_A + 64(900) - 49(900) - 8(150) + C_1 = 0$$

En (γ), si $x = 8$, $y = 0$

$$\frac{-1500}{2}(64) + 300(8)^3 \quad 300(7)^3 - \frac{75}{2}(2)^4 - 300(8) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 300 \text{ N m}^3$$

En (γ), si $x = 4$, $y = \delta$: (no se toma el término $(x-6)$)

$$EI\delta = -\frac{1500}{2}(4)^2 + 300(4)^3 - 300(3)^3 - (300)(4) + 300$$

$$EI\delta = -1800 \text{ N.m}^3$$

Si tomamos momentos en el centro el resultado es nulo

716, 717 y 718 problemas ilustrativos

deformables

719. En la viga de la figura determinar la reacción R y el valor de

Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema

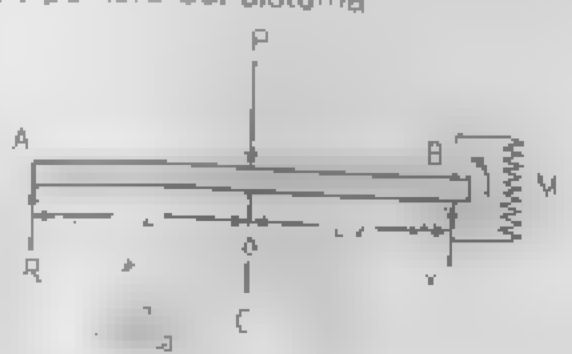
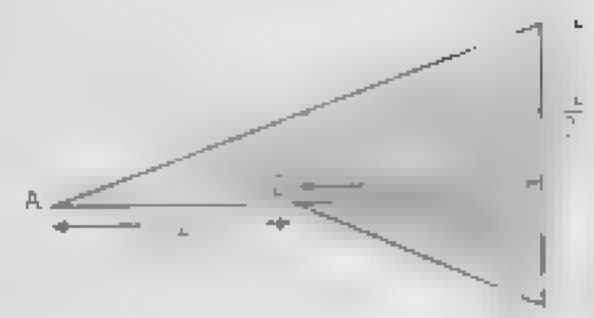


diagrama de momentos por partes



el método del área de momentos

$$\ldots = 0 \Rightarrow \boxed{R = \frac{5P}{16}}$$

δ la desviación de la elástica en C (centro del claro) con respecto a la tangente en B, tenemos

$$EIt_{C/B} = EI\delta = (\text{área})_{CB}\,\bar{x}_C$$

$$\ldots \left(P\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\,\frac{L}{2}\right)$$

…ndo $\boxed{EI\delta = -\frac{7}{768}PL^3}$ El signo menos indica que la deflexión es hacia abajo

la reacción R y trazar los diagramas de cortante y momento flexionante en la viga de la figura

Resolución

Diagrama de momentos por partes:

La desviación de la elástica en A con respecto a la tangente en B es nula por el método del área de momentos.

$$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A = 0$$

Así: $\frac{1}{2}(RL)(L)\left(\frac{2}{3}L\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{6}\right)(L)\left(\frac{4}{5}L\right)=0 \quad \Rightarrow \quad R=\frac{wL}{10}$

Por las ecuaciones de la estática

$$\sum Fy = 0: \; R + V - \frac{wL}{2} = 0 \Rightarrow V = \frac{2}{5}wL$$

$$\sum M_B = 0: \; RL - \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) - M = 0$$

Simplificando: $M = -\frac{wL^2}{15}$

Diagrama de fuerzas cortantes

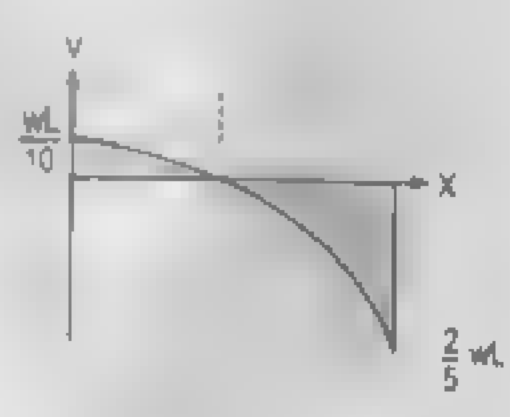
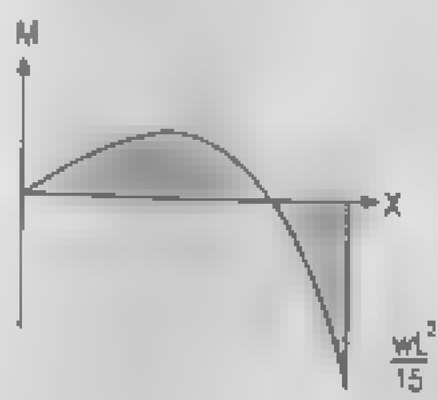
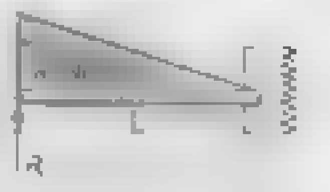


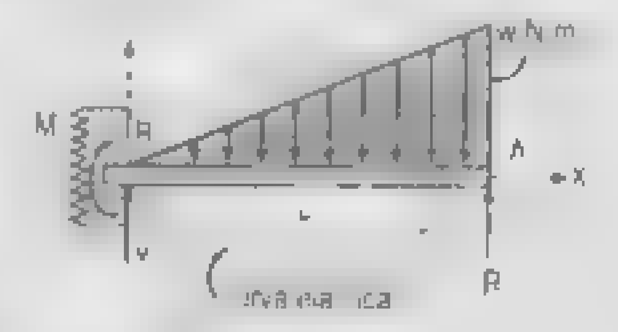
Diagrama de momentos



721 En la viga apoyada y empotrada de la figura determinar la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



Resolución:
Invirtiendo el diagrama de cuerpo libre

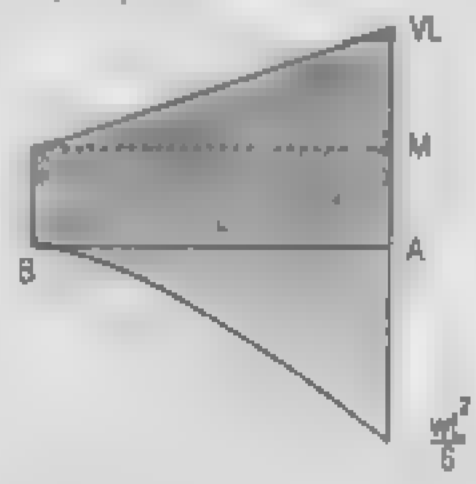


Por las ecuaciones de la estática

$$\sum M_A = 0 = M + VL - \frac{wL^2}{6} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \; V + R - \frac{wL}{2} \quad (2)$$

Diagrama de momentos por partes



La desviación de la elástica en A con respecto a la tangente en B es nula por el método del área de momentos

$$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A = 0$$

Así: $\frac{(VL)(L)}{2}\left(\frac{L}{3}\right)+(ML)\left(\frac{L}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{6}L\right)\left(\frac{L}{5}\right)=0 \quad (3)$

Resolviendo (1), (2) y (3)

$V = \frac{9}{40}wL$; $M = \frac{7}{120}wL^2$; $R = \frac{11}{40}wL$

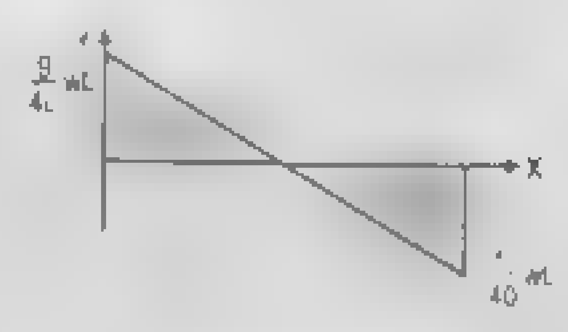
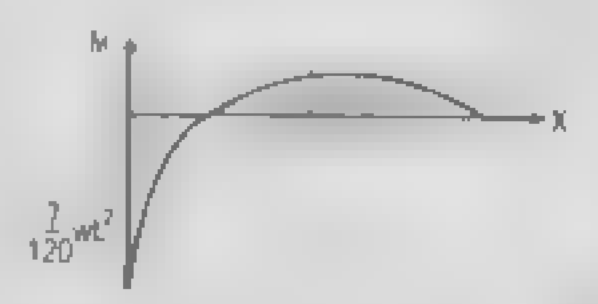
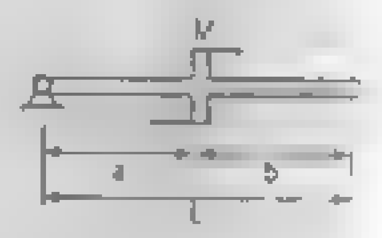


Diagrama de fuerzas cortantes

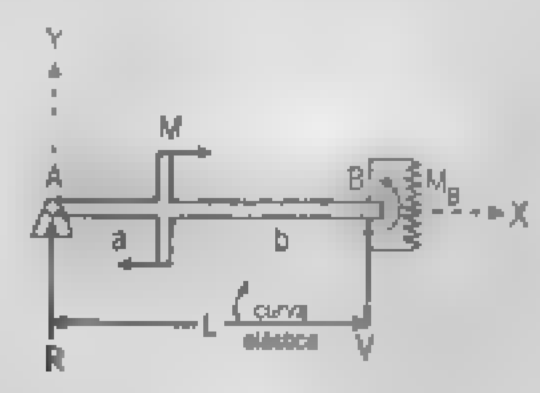
Diagrama de momentos.



722 En la viga de la figura, calcular la reacción R en el extremo apoyado y el momento de empotramiento. Comprobar el resultado obtenido haciendo b = L y compararlo con el resultado del problema 706



Resolución:
Del diagrama de cuerpo libre del sistema.

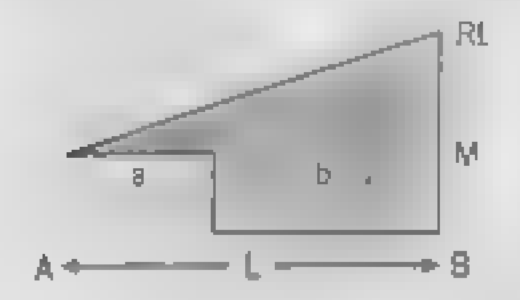


Por las ecuaciones de la estática

$\Sigma F_y = 0 = R + V$ (1)

$\Sigma M_B = 0 = RL + M + M_B$ (2)

Diagrama de momentos por partes



La desviación de la elástica en A con respecto a la tangente en B es nula, por el método del área de momentos: $EIt_{A/B} = 0 = (\text{área})_{AB}\, x_A$

Así $\frac{1}{2} RL \cdot L \cdot \frac{2L}{3} - Mb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0$

Simplificando: $R = \frac{3}{2}\frac{b}{L^3}(2a + b)M$ ... (3)

El signo menos indica que R se ha tomado en la dirección contraria

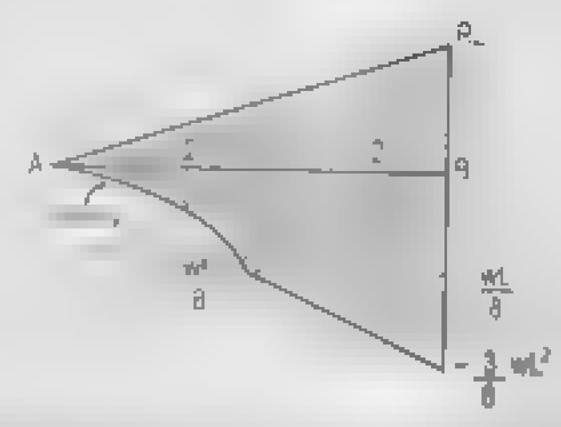
En (2) $|M_B| = \frac{\quad}{2L} M$

72(Hallar la reacción R y el momento de empotramiento en la viga de la figura

Resolución.
Del diagrama de cuerpo libre:

Donde $\Sigma M_B = 0 = RL - w\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\frac{L}{2}\right) - M$ (1)

Diagrama de momentos por partes



[illegible] en A [illegible] respecto a la tangente en B es [illegible] por el método del área de momentos

[illegible]

donde $\frac{1}{2}(RL.L)\left(\frac{2}{3}L\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{8}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$ [illegible]

[illegible] $= 0$

Simplificando: $R = \frac{4}{128}w$ [illegible] ...(2

[illegible] $M = \frac{7}{128}wL$ [illegible]

724 El empotramiento de la viga de la figura no es perfecto, de manera que el aplicar la carga uniforme w permite un cierto giro $wL^3/48EI$ de la sección empotrada. Si los apoyos están al mismo nivel, determinar R.

Resolución.

Del diagrama de cuerpo libre del sistema

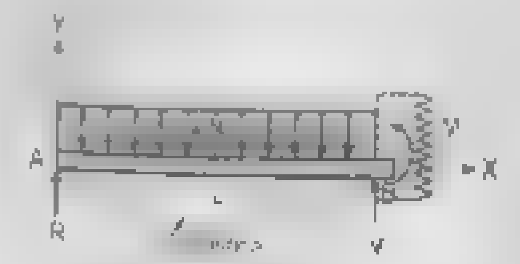
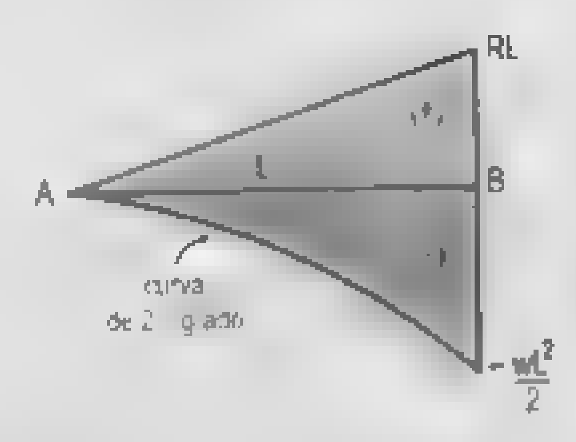


Diagrama de momentos por partes.



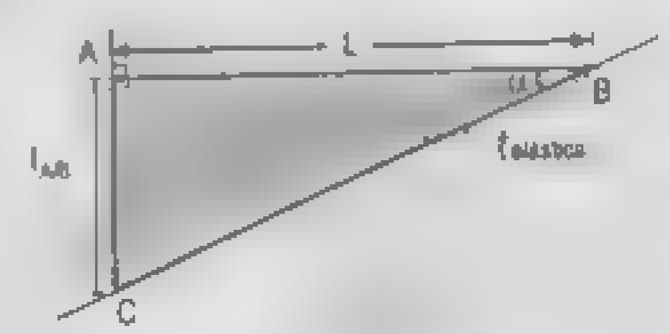
Donde la deflexión de A respecto a la tangente que pasa por B es.

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A$$

Así $t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[\frac{RL}{2}L\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{2}\right)L\left(\frac{3}{4}L\right)\right]$

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{RL^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) \qquad ...(1)$$

Como el empotramiento (en B) no es perfecto, es decir, si se traza una tangente en B genera un ángulo respecto a la horizontal AB que es justo el ángulo de desviación o giro.



Sea ese ángulo igual a "α", en el triángulo ABC

$$\tan\alpha = \frac{t_{A/B}}{L} \qquad ...(2)$$

Como "α" es pequeño, podemos aproximar

$$\tan\alpha = \alpha \qquad ...(3)$$

Por el dato: $\alpha = \frac{wL^3}{48EI}$ ...(4)

Ahora (1), (3) y (4) en (2): $\frac{wL^3}{48EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R}{3} \quad \frac{w}{8}\right)$

Simplificando: $R \quad \frac{w}{16}$

Por el método de la doble integración obtendríamos el resultado de manera más rápida. $EI\frac{d^2y}{dx^2} = Rx - \frac{wx^2}{2}$; $x \in \langle 0;L \rangle$

Integrando 1.ª vez: $EI\frac{dy}{dx} = \frac{Rx^2}{2} - \frac{wx^3}{6} + C_1$ ...(1)

Integrando 2.ª vez: $EIy = \frac{Rx^3}{6} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$ ...(2)

Como el punto A está al mismo nivel de B; "y" es igual tanto para x ... x igualando ambas ecuaciones: (en (2))

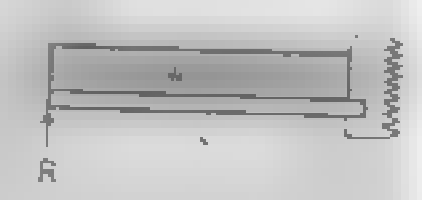
$$\frac{R}{6}(0)^3 - \frac{w}{24}(0)^4 + C_1(0) + C_2 = \frac{R}{6}L^3 - \frac{w}{24}(L)^4 + C_1(L) + C_2$$

Simplificando: $C_1 = \frac{wL^3}{24} - \frac{RL^2}{6}$ ...(3)

Como $\frac{dy}{dx} = \theta = \frac{wL^3}{48EI}$ ...(4)

(3) (4) en (1) (para x=L): $EI\frac{wL^3}{48EI} = \frac{RL^2}{2} - \frac{wL^3}{6} + \frac{wL^3}{24} - \frac{RL^2}{6}$ $\boxed{R = \frac{wL}{16}}$

725 Si el apoyo izquierdo de la viga del problema anterior sufre un asentamiento de valor δ, demostrar que la reacción en él experimenta una disminución igual a $3EI\delta/L^3$.



Resolución

... el punto A sufre un asentamiento igual a "δ"

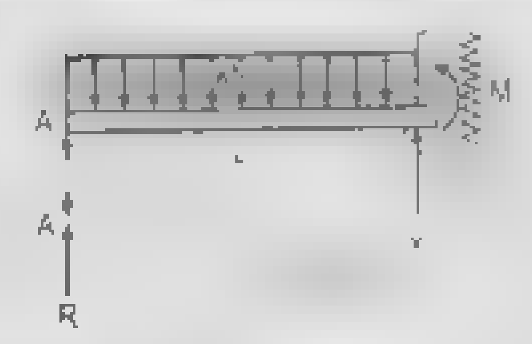
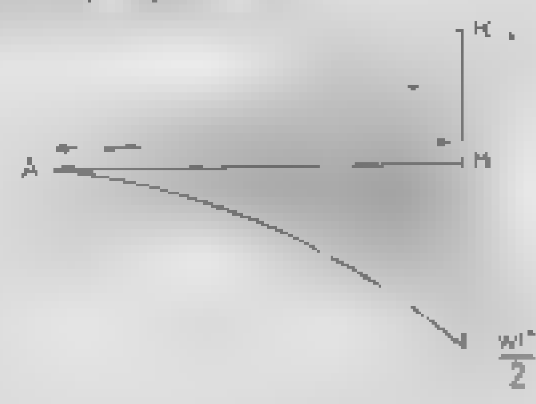


Diagrama de momentos por partes

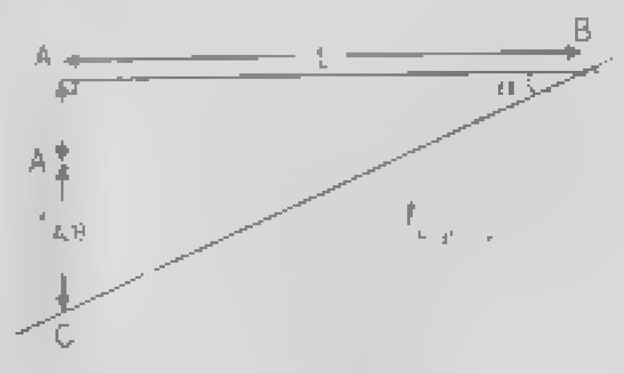


La deflexión de A respecto a la tangente que pasa por B es

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[(\text{área})_{AB}\ \bar{x}_A\right]$$

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{RL^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) \quad ...(1)$$

Del diagrama de la elástica



En el triángulo ABC

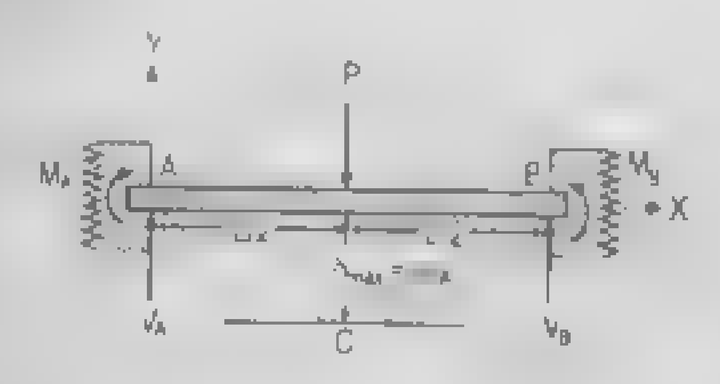
Como $\alpha = \frac{wL^3}{48EI}$, tenemos. $\tan\alpha = \frac{t_{A/B} - \delta}{L}$

De lo visto anteriormente ... tan ... en (1) $\frac{wL^3}{48E}$ ... $E\left(\frac{1}{3}\frac{R_1L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) = 0$

Simplificando $R = \frac{?}{6}wL$ ...

726 Una viga de longitud L empotrada en sus dos extremos, soporta una carga concentrada P en el centro. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima.

Resolucion:
Del diagrama de cuerpo libre



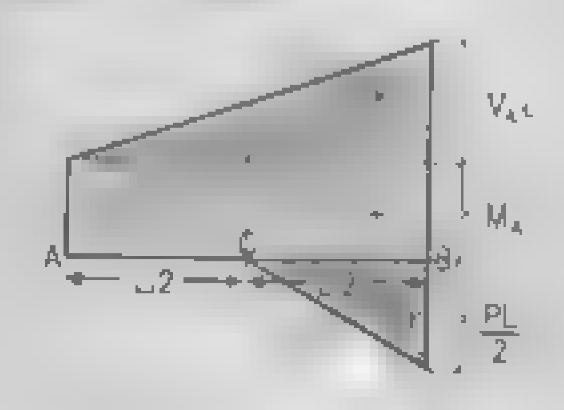
Por la simetria del sistema de empotramiento perfecto:

$M_A = M_B \wedge V_A = V_B$ ...(1)

Ademas $\sum F_y = 0$ $V_A + V_B = P$ ...(2)

Luego $V_A = \frac{P}{2} = V_B$ ...(3)

Diagrama de momentos por partes



Por el empotramiento perfecto la variación total de la pendiente entre A y B es nula, así

$$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB} \Rightarrow \frac{(V_AL)L}{2} + (M_A)(L) - \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

De (3) $M_A = -\frac{PL}{8} = M_B$

La deflexión máxima, δ_{max}, ocurre en el centro del claro por la simetría del sistema así:

$$EIt_{C/A} = EI\delta_{max} = (\text{área})_{AC}\,\bar{x}_C \Rightarrow$$

$$EI\delta_{max} = \frac{1}{2}\left(V_A\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{L}{2}\right) + (M_A)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{L}{2}\right)$$

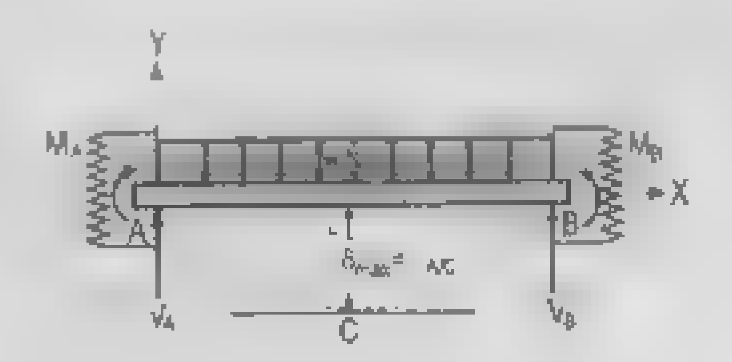
Reemplazando valores y simplificando. $EI\delta_{max} = -\frac{PL^3}{192}$

El signo menos indica que está por debajo de la horizontal, en valor absoluto

$$EI\delta = \frac{PL^3}{192}$$

727 Repetir el problema 726 si en lugar de la carga concentrada se aplica una carga uniforme de w N/m sobre toda su longitud.

Resolución:
Del diagrama de cuerpo libre:

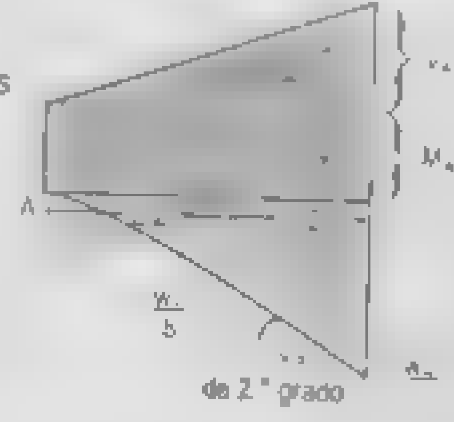


Por la simetria del sistema: $M_A = M_B \wedge V_A = V_B$ ...(1)

Por las ecuaciones de la estática. $\sum F_y = 0 \div V_A + V_B - wL$ (2)

[illegible] (3)

Diagrama de momentos por partes



Por [illegible] nula, así

$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB}$ o $\frac{(V_A L)(L)}{2} + (M_A)(L) - \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{2}\right)$

De (3): $M_A = \frac{-wL^2}{12} = M_B$

La deflexión máxima ocurre en el centro del claro

$EIt_{C/A} = EI\delta_{máx} = (\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C$

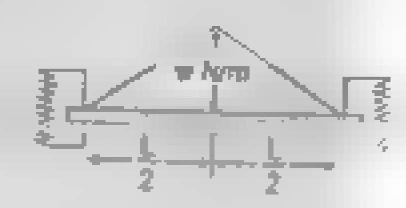
[illegible]

Evaluando y simplificando: $EI\delta_{max} = \frac{wL}{384}$

[illegible] AB [illegible]

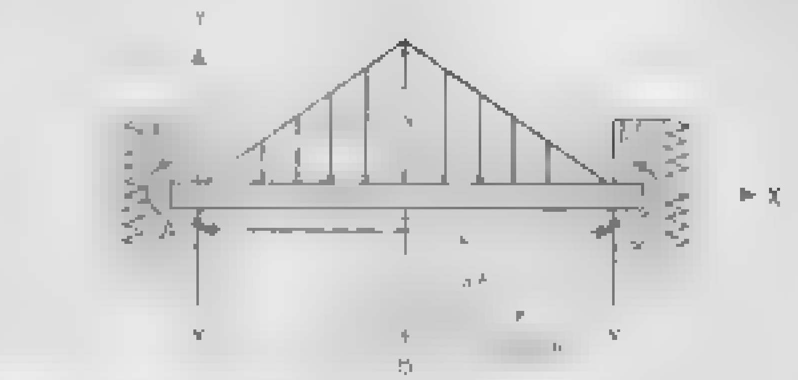
En valor absoluto: $EI\delta = \frac{wL^4}{384}$

728. Determinar los momentos de empotramiento y la deflexión en el centro en la viga doblemente empotrada de la figura.



Resolución:

Diagrama de cuerpo libre

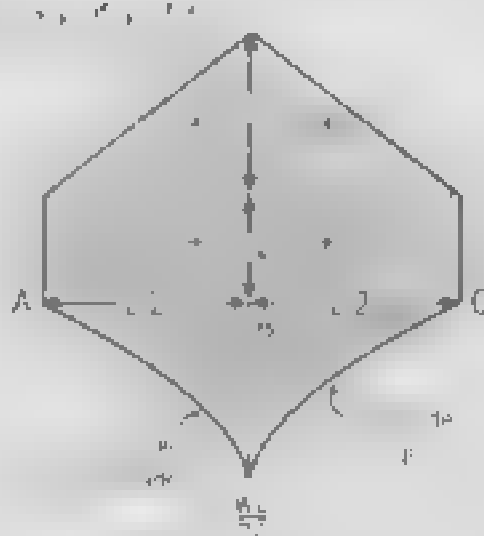


[illegible] M_A M_B [illegible] (1)

[illegible] V [illegible] $\frac{wL}{2}$ (2)

[illegible] (3)

Diagrama [illegible]



Por el empotramiento perfecto la variación total de la pendiente entre A y C es nula, así

$EI\theta_{AC} = 0 = (\text{área})_{AC} = 2(\text{área})_{AB}$ o

[illegible] $= 0$

[illegible] $M_A = \frac{5}{96}wL^2 = M_B$

La deflexión máxima ocurre en el centro del claro:

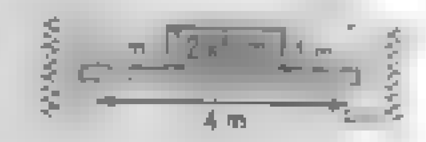
$$EIt_{B/A} = EI\delta_{máx} = (área)_{AB} \cdot \bar{x}_B \quad o$$

$$EI\delta_{máx} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_A L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{L}{2}\right) + (M_A)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\frac{L}{2}\right)$$

Evaluando y simplificando: $EI\delta_{máx} = \frac{-7}{3840} wL^4$

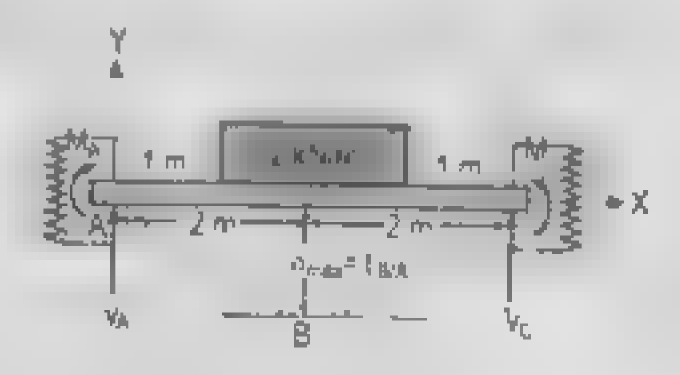
En valor absoluto: $\boxed{EI\delta = \frac{7}{3840} wL^4}$

729 En la viga doblemente empotrada de la figura calcular los momentos de empotramiento y el máximo valor de $EI\delta$



Resolución:

Diagrama de cuerpo libre:



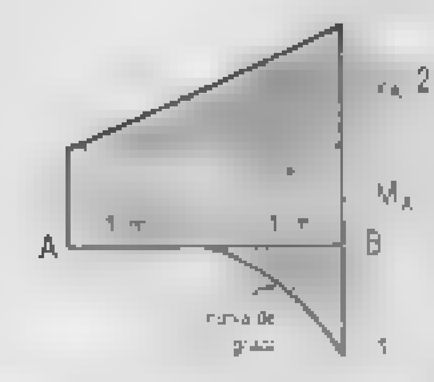
Por la simetría del sistema.

$M_A = M_C \wedge V_A = V_C$ ...(1)

$\Sigma F_y \quad 0 = V_A + V_C - 2(2)$ kN ...(2)

De (1) y (2): $\boxed{V_A = 2 \text{ kN} = V_C}$ ...(3)

En el diagrama de momentos por partes solo lo haremos hasta el punto medio "B" que es además donde alcanza la deflexión máxima aprovechando la simetría del sistema.



La variación de la pendiente entre A y C es nula, lo mismo podemos afirmar entre A y B, así

$$EI\theta_{AB} = 0 = (área)_{AB} \quad o \quad \frac{1}{2}(2V_A)(2) + 2M_A - \frac{1}{3}(1)(1) = 0$$

De (3) y evaluando: $\boxed{M_A = -\frac{11}{6} \text{ kNm} = M_C}$

La deflexión máxima es

$$EIt_{B/A} = EI\delta_{máx} = (área)_{AB} \cdot \bar{x}_B \quad o$$

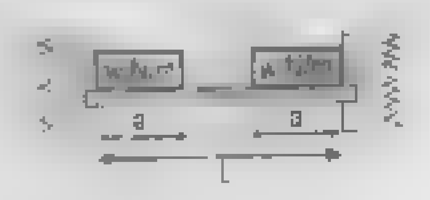
$$EI\delta_{máx} = \frac{1}{2}(2V_A)(2)\left(\frac{1}{3}2\right) + (2M_A)\left(\frac{1}{2}2\right) - \frac{1}{3}(1)(1)\left(\frac{1}{4}\right.$$

$$EI\delta_{máx} = -\frac{13}{12} \text{ kNm}^3$$

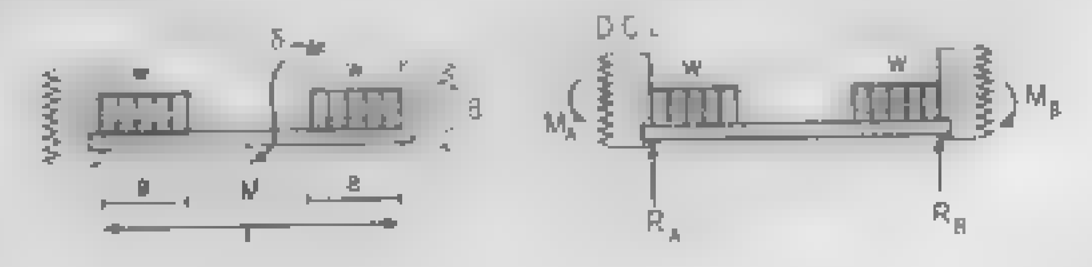
El signo menos indica que apunta hacia abajo de la horizontal; en valor absoluto: $\boxed{EI\delta = \frac{13}{12} \text{ kNm}^3}$

(Los valores del texto son aproximados)

730 Determinar los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga de la figura

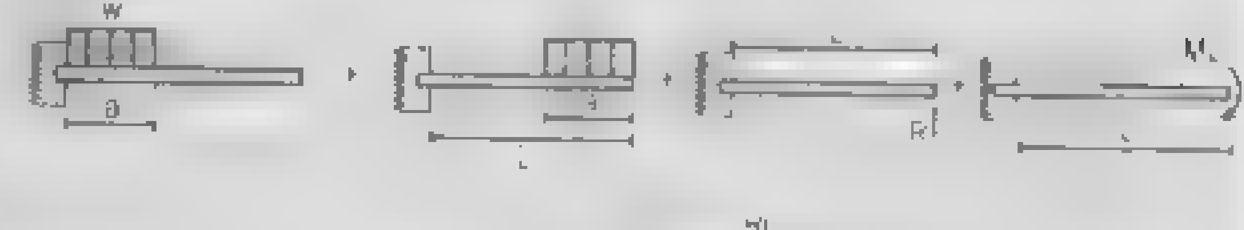


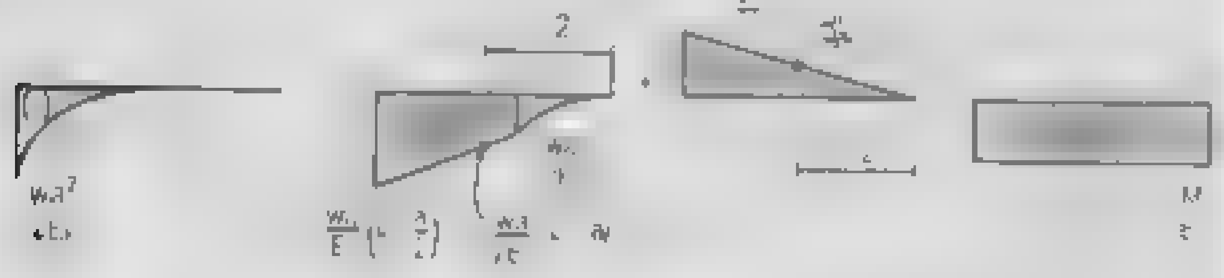
Resolución



$\sum F_y = 0$ [illegible]

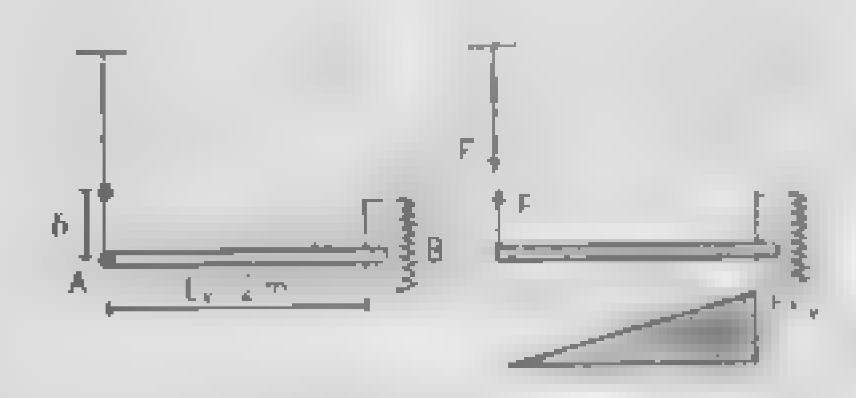
$\sum M_A = 0$ [illegible]





731 La viga mostrada en la figura está conectada a una barra vertical. Si la viga se mantiene horizontal a una cierta temperatura, determinar el incremento del esfuerzo en la barra si la temperatura en este se abate 50°C. Tanto la viga como la barra estan construidas de acero con E = 200 x 10⁹ N/m². Para la viga use I = 60 x 10⁶ mm⁴

Resolución



$$\delta = \delta_T - \delta_M = \alpha L_b \Delta T - \frac{FL_b}{EA_b}\ ;\ EI\delta = EIt_{AB} = \frac{FL_v^{\,2}}{2}\left(\frac{2}{3}L_v\right) = \frac{FL_v^{\,3}}{3}$$

$$\alpha L_b \Delta T - \frac{FL_b}{EA} = \frac{FL_v^{\,3}}{3EI} \Rightarrow \alpha L_b \Delta T = F\left(\frac{L_b}{EA_b} + \frac{L_v^{\,3}}{3EI}\right)$$

$$\frac{F}{A_b} = \sigma = \frac{\alpha L_b \Delta T}{A_b\left(\frac{L_b}{EA_b} + \frac{L_v^{\,3}}{3EI}\right)} = \frac{\alpha L_b \Delta T E}{\left(L_b + \frac{L_v^{\,3} A_b}{3I}\right)}$$

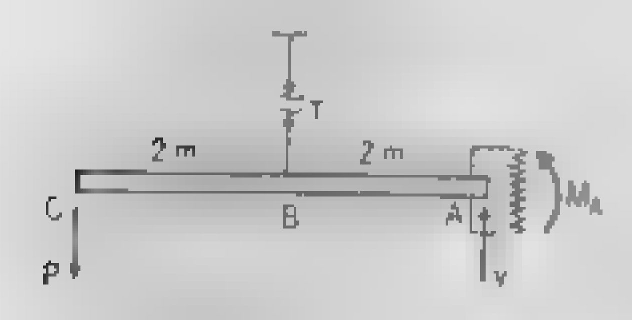
Reemplazando valores

$$\sigma = \frac{11{,}7\times10^{-6}\times10\times50\times200\times10^{9}}{10 + \frac{2^3\times50\times10^{-6}}{3\times60\times10^{-6}}} \Rightarrow \boxed{95{,}7\times10^{6}\,\frac{N}{m^2}}$$

732 El punto medio de la viga de acero de la figura está conectado a la barra vertical de aluminio. Determinar el valor máximo de P si el esfuerzo en la barra no ha de ser mayor que 150 MN/m²

Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre



Datos

$L = 5$ m

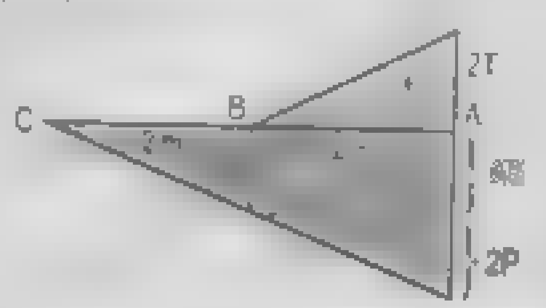
$A = 40$ mm²

$E_A = 70 \times 10^9$ N/m²

$I_{Ac} = 50 \times 10^6$ mm⁴

$E_{Ac} = 200 \times 10^9$ N/m²

Area de momentos por partes



donde

$$E_{Ac}I_{Ac}t_{B/A} = \frac{1}{2}(2)(2T)\left(\frac{2}{3}\right) - \left[(2P)(2)(1) + \frac{(2)}{2}(2P)\left(\frac{2}{3}\right)(2)\right]$$

$$\Rightarrow E_{Ac}I_{Ac}t_{B/A} = \frac{20}{3}P - \frac{8}{3}T \qquad \ldots (1)$$

Por la elongación de la barra de aluminio

$$\delta = \frac{TL}{AE_A} \qquad \ldots (2)$$

Pero como $t_{B/A} = \delta$

Entonces

$$\frac{E_{Ac}I_{Ac}}{E_{Al}A}TL = \frac{20P}{3} - \frac{8}{3}T \qquad \ldots (3)$$

Además, como el esfuerzo máximo de la barra es

$$\sigma_{máx} = 150 \text{ MN/m}^2$$

Así: $\sigma_{máx} = \frac{T}{A}$ $\qquad \ldots (4)$

(4) en (3)

$$\frac{E_{Ac}I_{Ac}}{E_{Al}A} A \ldots [illegible] \ldots \frac{20}{3}P - \frac{8}{3} \ldots A$$

Colocando los datos

$$\frac{200 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{70 \times 10^9 \text{ N/m}^2} 50 \times 10^6 \text{mm}^4 \left(150 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \ldots [illegible]\right.$$

Simplificando

$P = 18\,471.42$ N $\quad \Rightarrow \quad$ [illegible]

Si se reemplaza la carga P del problema 732 por un par M en sentido contrario [illegible]

Resolución:

Del diagrama

Datos

[illegible]

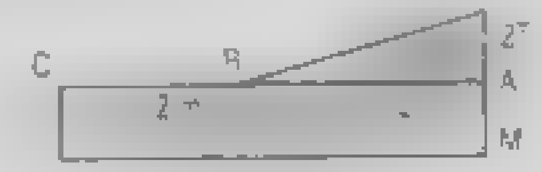
$E_{Al} = 70 \times 10^9$ N/m

I [illegible] 50×10^6 mm⁴

$E_{Ac} = 200 \times 10^9$ N/m

$\sigma = 100$ MN/m²

Area de momentos por partes



donde

$$E_{Ac}I_{Ac}t_{B/A} = \frac{1}{2}(2)(2\ldots) \ldots [illegible] \ldots M \ldots \frac{8}{3}T \qquad \ldots (1)$$

En la barra, su elongación por efecto de T es

$\delta = \frac{TL}{E_{Al} A_{Al}}$ ...(2) y como $l_{BA} = \delta$, entonces

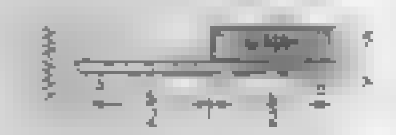
$\frac{E_{Ac} I_{Ac}}{E_{Al} A_{Al}} TL = 2M - \frac{8}{3}$ Reemplazando los datos: $T = \frac{M}{(10{,}262\ m)}$ .. (3)

Como el esfuerzo máximo de la barra es

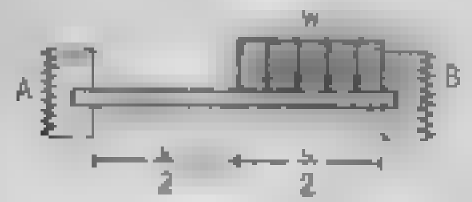
$\sigma = \frac{T}{A_{Al}} \Rightarrow 100 \times 10^6 \frac{N}{m^2} = \frac{M}{(10{,}262\ m)(40\ mm^2)} \Rightarrow M = 41\,048\ N\,m$

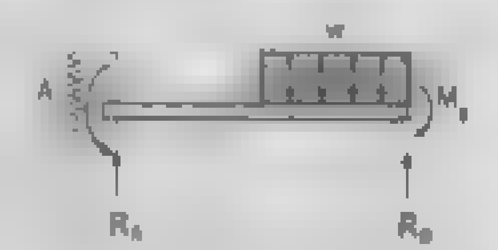
o $M = 41{,}048\ kN\,m$

734. Determinar los momentos de empotramiento en la viga de la figura perfectamente empotrada en sus extremos.



Resolución



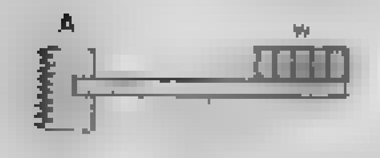
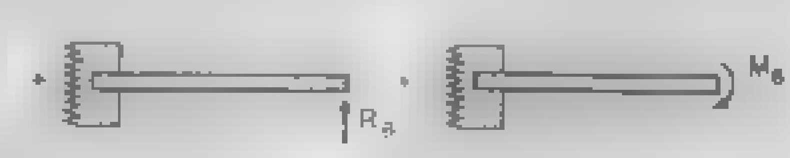
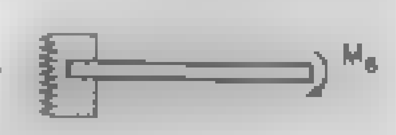


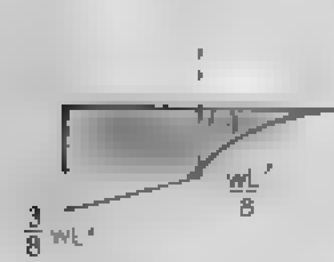
Equilibrio:

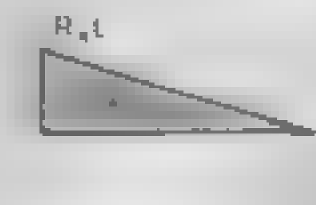
$\Sigma F_y = 0: \quad R_A + R_B = w\frac{L}{2}$ ...(1)

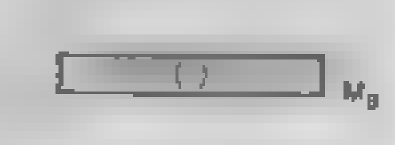
$\Sigma M_A = 0: \quad M_A - M_B + R_B L - w\frac{L}{2}\left(\frac{3}{4}L\right) = 0$

$M_A = M_B + \frac{3}{8}wL^2 - R_B L$ ...(2)







$EI\theta_{AB} = 0 = \frac{3}{16}wL^2 \cdot \frac{1}{16}wL^2 \ldots \frac{L}{2} \ldots \frac{1}{3}\frac{wL^2}{8}\frac{L}{2} \ldots \frac{R_B L^2}{2} - M_B L$

$M_B = \frac{7}{48}wL^2 + \frac{R_B}{2}L$ (3)

$EI t_{AB} = 0 = \frac{wL^2}{8}\frac{L}{2}\frac{L}{4} \ldots \frac{1}{2}\frac{1}{4}wL^2 \frac{L}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{L}{2}\right)$

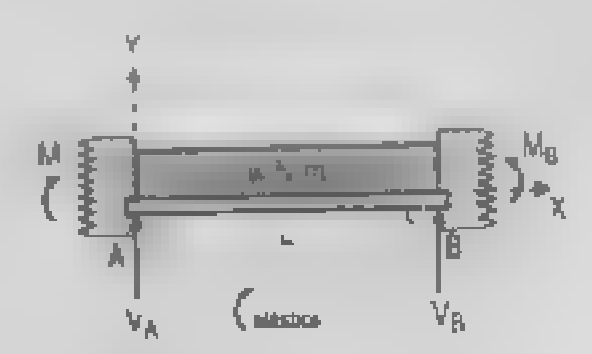
$\frac{1}{3}\frac{wL^2}{8}\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}\frac{1}{4}\frac{L}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}R_B L \cdot \frac{L}{3} \ldots \frac{M_B L^2}{2}$

$M_B = \frac{5}{64}wL^2 \ldots \frac{1}{3}R_B L$ (4)

De (3) y (4): $R_B = \frac{13}{32}wL$; $\boxed{M_B = \frac{11}{192}wL^2}$, en (2) $\boxed{M_A = \frac{5}{192}wL^2}$

735 La viga de la figura está perfectamente empotrada en A, pero solo parcialmente empotrada en B, donde la pendiente vale $wL^3/48EI$, dirigida hacia arriba a la derecha. Calcular los momentos de empotramiento.

Resolución.

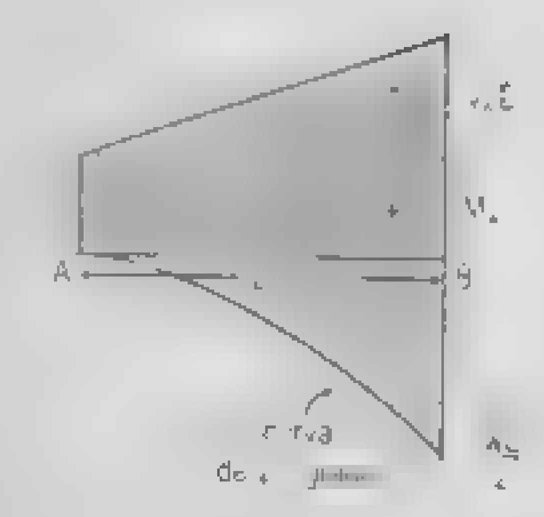


Por las ecuaciones de la estática

$\Sigma M_A = 0 = M_B + V_B L - \frac{wL^2}{2} - M_A$. (1)

$\Sigma F_y = 0 = V_A + V_B - wL$ (2)

Diagrama de momentos por partes



donde

$$EIt_{AB} = \frac{1}{2}(V_AL)(L)\left(\frac{2}{3}L\right) + (M_A)(L)(\ldots) - \ldots\left(\frac{wL^2}{2}\right)(L)\left(\frac{3}{4}L\right) = (\text{área})_{AB}\,\bar{x}$$

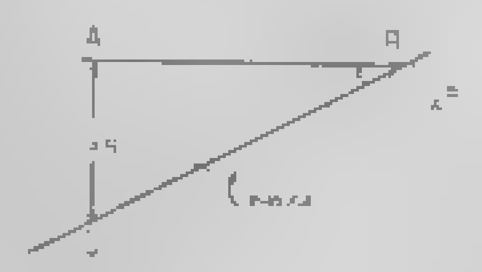
$$\text{ó}\quad EIt_{AB} = \frac{V_AL^3}{3} + \frac{M_AL^2}{2} - \frac{wL^4}{8} \qquad \ldots(3)$$

Además

$$EIt_{B/A} = \frac{1}{2}(V_AL)(L)\left(\frac{1}{3}L\right) + (M_A)(L)\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{2}\right)(L)\left(\frac{1}{4}L\right) = (\text{área})_{AB}\,\bar{x}$$

$$\text{ó}\quad EIt_{B/A} = \frac{V_AL^3}{6} + \frac{M_AL^2}{2} - \frac{wL^4}{24} \qquad \ldots(4)$$

Diagrama de la elástica



Del triángulo rectángulo ABC: $\tan\alpha = \frac{t_{A/B}}{L}$ ... (5)

Por ser α pequeño $\Rightarrow \tan\alpha = \alpha$ ... (6)

del dato: $\alpha = \frac{wL^3}{48EI}$ ... (7)

Reuniendo todos los valores en (5)

$$\frac{wL^3}{48EI} = \frac{\frac{1}{EI}\left(\frac{V_AL^3}{3} + \frac{M_AL^2}{2} - \frac{wL^4}{8}\right)}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{wL^4}{48} = \frac{V_AL^3}{3} + \frac{M_AL^2}{2} - \frac{wL^4}{8} \qquad (\alpha)$$

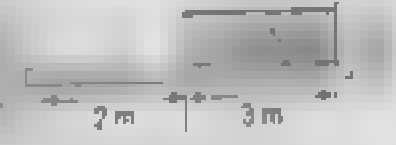
Además $t_{B/A} = 0$, así (4) es nulo

$$\frac{V_AL^3}{6} + \frac{M_AL^2}{2} - \frac{wL^4}{24} = 0 \qquad (\beta)$$

Resolviendo (α) y (β): $\boxed{M_A = -\frac{wL^2}{8}}$; $\boxed{V_A = \frac{5}{8}wL}$

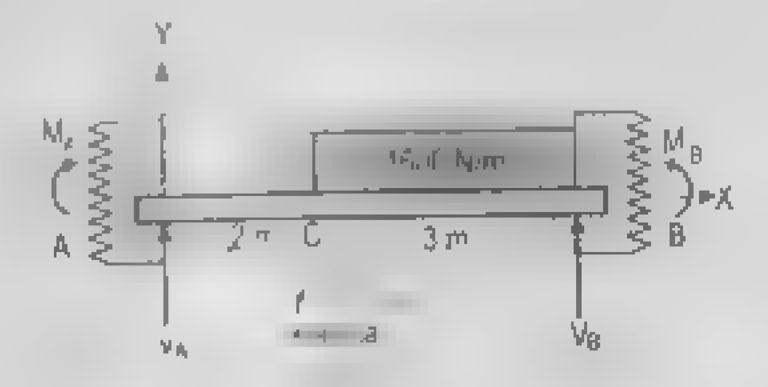
En (1) y (2): $\boxed{M_B = 0}$; $\boxed{V_B = \frac{3}{8}wL}$

56. Para la viga mostrada en la figura calcular los valores de la fuerza cortante y del momento flexionante en los empotramientos, y bosqueje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



Resolución

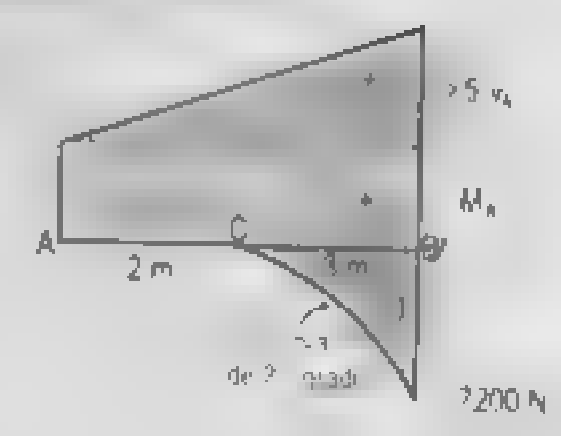
Diagrama de cuerpo libre



$$\sum F_y = 0 = V_A + V_B - 1600(3) \qquad (1)$$

$$\sum M_B = 0 = M_A + 5V_A - (1600)(3)\left(\frac{3}{2}\right) - M_B \qquad (2)$$

Diagrama de momentos por partes



Como la variación de la pendiente entre A y B es nula, entonces.

$$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB} \quad 0 \quad \frac{1}{2}(5V_A)(5) + M_A(5) - \frac{1}{3}(7200)(3) = 0 \quad ...(\alpha)$$

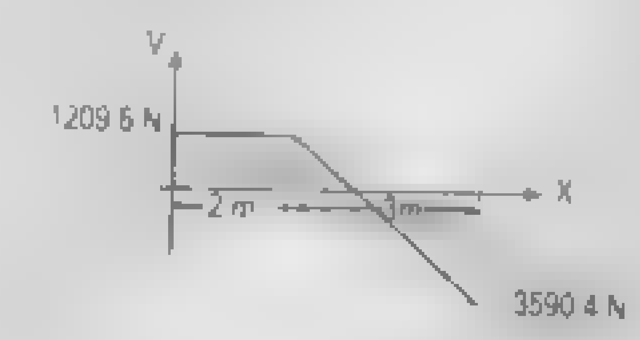
La desviación de A respecto a la tangente que pasa por B es nula, así

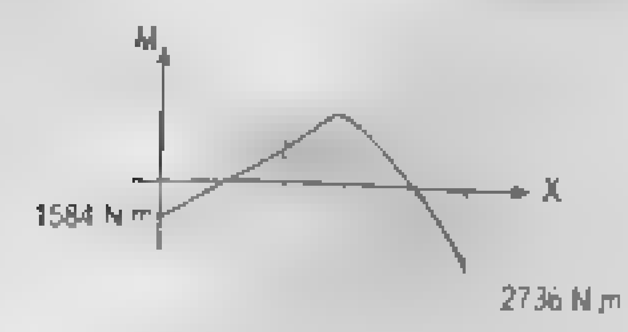
$$EIt_{A/B} = 0 = (\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A \quad 0$$

$$\frac{1}{2}(5V_A)(5)\left(\frac{2}{3}5\right) + M_A(5)\left(\frac{5}{2}\right) \quad \frac{1}{3}(7200)(3)\left(2 \quad \frac{3}{4}3\right) \quad (\beta)$$

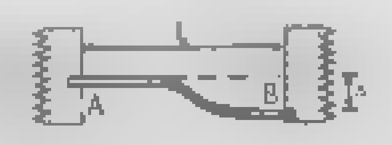
Resolviendo (α) y (β): $\boxed{V_A = 1209{,}6\ N}$, $\boxed{M_A = -1584\ N\,m}$

En (1) y (2). $\boxed{V_B = 3590.4\ N}$; $\boxed{M_B = -2736\ N\,m}$



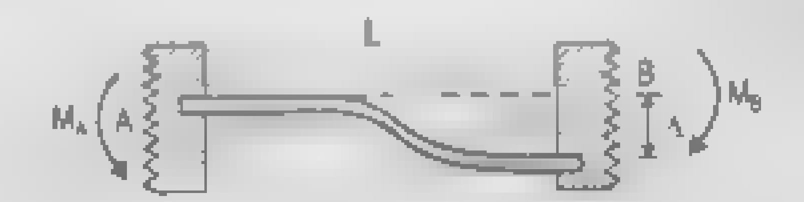


3° En la viga perfectamente empotrada de la figura el empotramiento B ha tenido un asentamiento vertical de valor Δ.

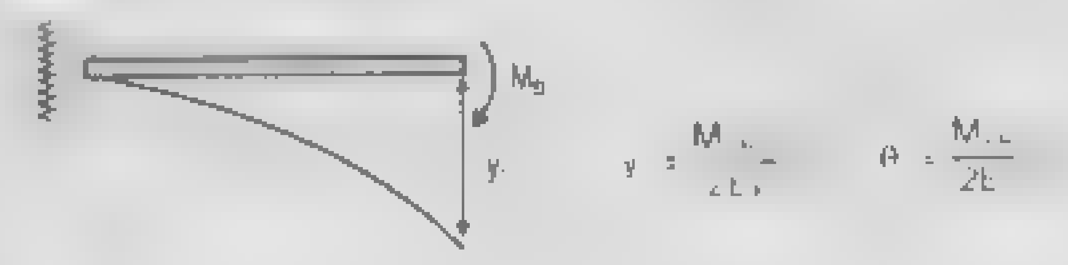


Comprobar que $M_B = -M_A = 6EI\Delta/L^2$

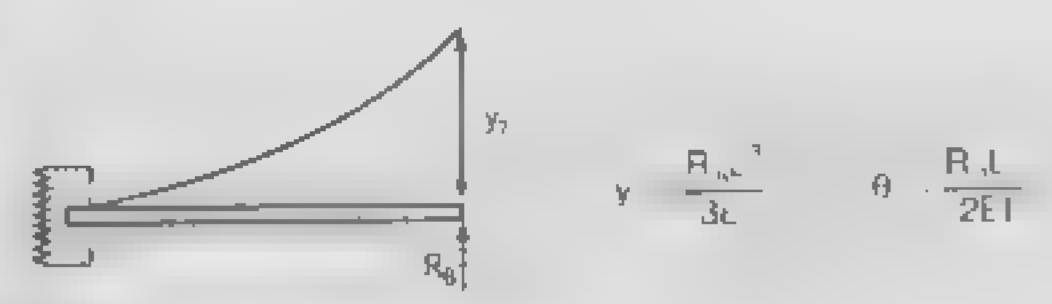
Resolución:



Por superposición



$y = \frac{M_B L^2}{2EI} \qquad \theta = \frac{M_B L}{2E}$



$y = \frac{R_B L^3}{3E} \qquad \theta = \frac{R_B L}{2EI}$

Si se conoce que

$$y \quad y \quad \Delta \ \Rightarrow \ \frac{M_B L}{2EI} \quad \frac{R_B L}{3E} \quad \Delta \qquad (1)$$

$$\theta \cdot \theta \quad 0 \ \Rightarrow \ \frac{R_B L^2}{2E} \quad \frac{M_B L}{EI} \quad 0 \ \Rightarrow R_B L \quad 2M_B = 0 \qquad R_B = \frac{2}{L}M_B \qquad (2)$$

Despejando de (1) en (2)

$$\frac{M_B L^2}{2EI} \quad \frac{2}{L}M_B \frac{L^3}{3EI} = \Delta \ \Rightarrow \ M_B \quad \Delta \frac{6EI}{L} \ \Rightarrow M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

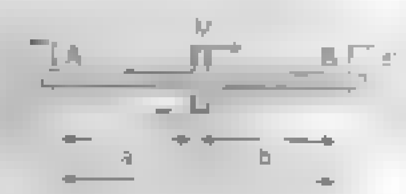
Además $\qquad M_B \quad M_A \quad \frac{6EI\Delta}{L} \qquad (3)$

También $\Sigma M_A = 0 \ \Rightarrow M_A = M_B - R_B L \qquad ($

Reemplazando (2) (3) en (I)

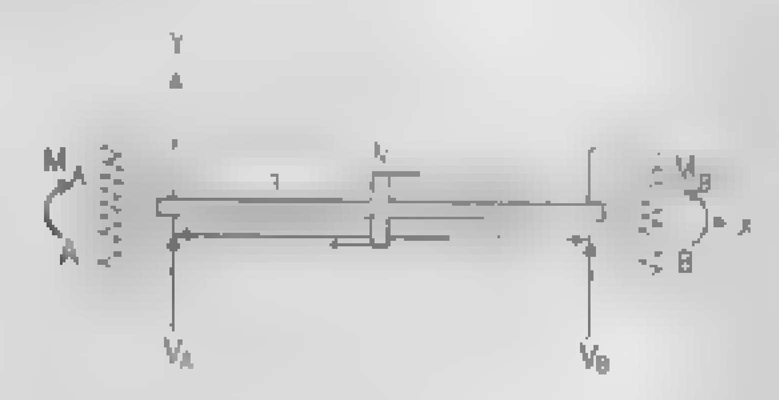
$$M_A + \frac{6EI\Delta}{L^2} + \frac{12\Delta EI}{L^2} \Rightarrow M_A = \frac{6\Delta EI}{L^2} \qquad M_B \qquad \underline{M_A = 6EI\Delta/L^2}$$

738 Una viga doblemente empotrada se somete a la acción de un par M aplicado como indica la figura. Determinar los momentos de empotramiento.



Resolución:

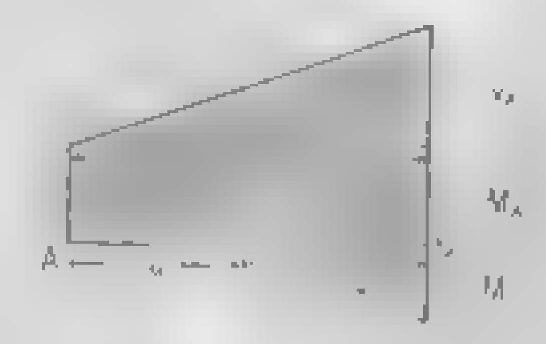
Diagrama de cuerpo libre



$$\sum F_y = 0 = V_A + V_B \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0 = M_A + M + V_A L - M_B \qquad (2)$$

Diagrama de momentos por partes



La variación entre la pendiente en A y B es nula, por el empotramiento perfecto. Luego

$$EI\theta_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB} \quad 0 \quad \frac{1}{2}(V_A L)(L) + M_A(L) + Mb = 0 \qquad ...(\alpha)$$

La desviación de A respecto a la tangente que pasa por B es nula, luego

$$EIt_{AB} = 0 = (\text{área})_{AB}\,\bar{x}_A \quad 0 \quad \frac{1}{2}(V_A L)(L)\left(\frac{2}{3}L\right) + M_A(L)\left(\frac{L}{2}\right) + Mb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 \qquad (\beta)$$

Resolviendo (α) y (β), $\boxed{M_A = \frac{Mb}{L}\left(\frac{3a}{L} - 1\right)}$ $V_A = -\frac{6Mab}{L^3}$

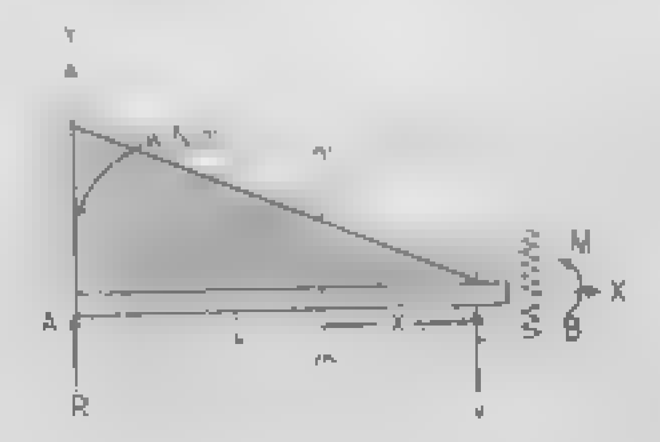
En (1) y (2). $V_B = \frac{6Mab}{L^3}$, $\boxed{M_B = \frac{-Ma}{L}}$

Considerar como reacciones hiperestáticas o redundantes los momentos en los empotramientos

Determinar el momento de empotramiento en la viga del problema 705

Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre



Por el método de la doble integración (tomando momentos)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M + Vx - \frac{w}{6L}x^3 \qquad (1)$$

Integrando 1.ª vez

$$EI\frac{dy}{dx} = Mx + \frac{Vx^2}{2} - \frac{wx^4}{24L} + C_1 \qquad ...(2)$$

Integrando 2.ª vez

$$EIy = \frac{Mx^2}{2} + \frac{Vx^3}{6} - \frac{wx^5}{120L} + C_1x + C_2 \qquad (3)$$

En A tenemos $\sum M_A = 0$, es decir, en (1) para x = L: $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Así: $M + VL - \frac{wL^2}{6} = 0$ ...(α)

Si x = 0, $\frac{dy}{dx} = 0$, en (2)

$C_1 = 0$ ...(β)

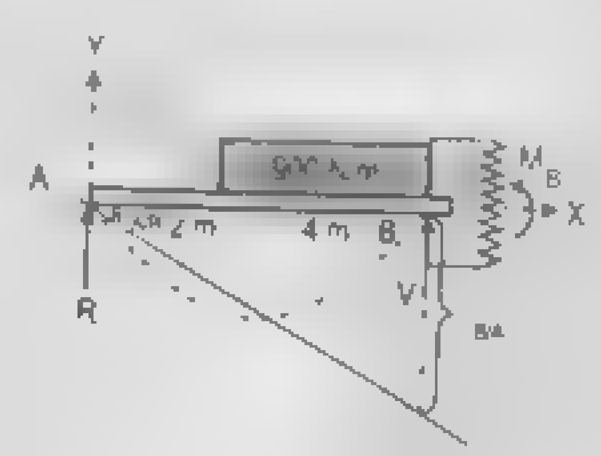
Por estar al mismo nivel A y B, la ecuación (3) es igual para x = 0 y x = L

$$\frac{M(0)^2}{2} + \frac{V(0)^3}{6} - \frac{w(0)^5}{120L} + C_1(0) + C_2 = \frac{ML^2}{2} + \frac{VL^3}{6} - \frac{wL^5}{120L} + C_1(L) + C_2 \quad ...(\gamma)$$

Resolviendo (α),(β) y (γ): $M = \frac{-7}{120}wL^2$

740 Calcular el momento de empotramiento en la viga de la figura.

Resolución:
Del diagrama de cuerpo libre

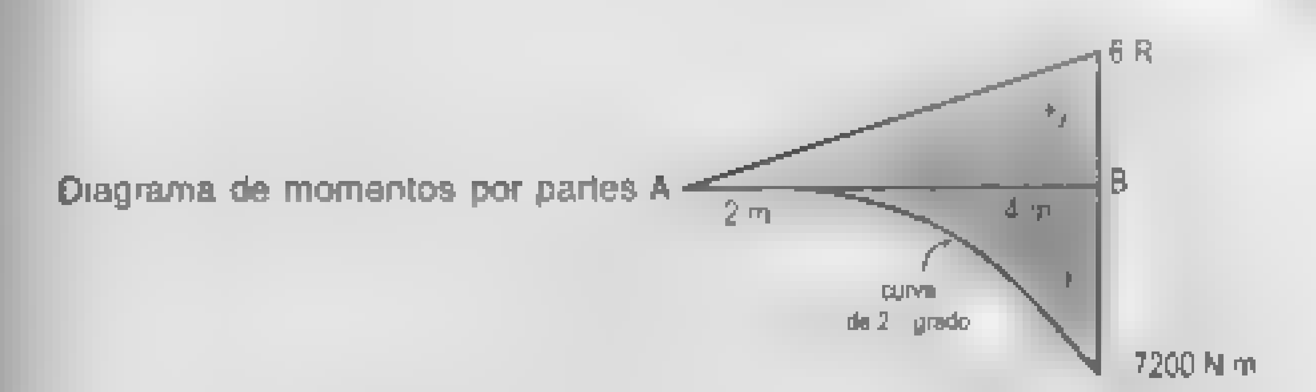


$\sum F_y = 0 = R + V - 3600$ ...(1)

$\sum M_A = 0 = M + 6V - 14\,400$ ...(2)

De la elástica: $\theta_{A/B} = \frac{t_{B/A}}{6}$ ...(3)

Diagrama de momentos por partes



Así. $EI\theta_{A/B} = \frac{(6R)}{2}(6) - \frac{1}{3}(4)(7200)$ ...(4)

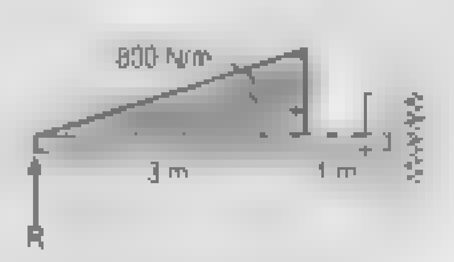
$EIt_{B/A} = \frac{(6R)(6)}{2}(2) - \frac{1}{3}(4)(7200)(1)$ ...(5)

Resolviendo (1), (2), (3), (4) y (5)

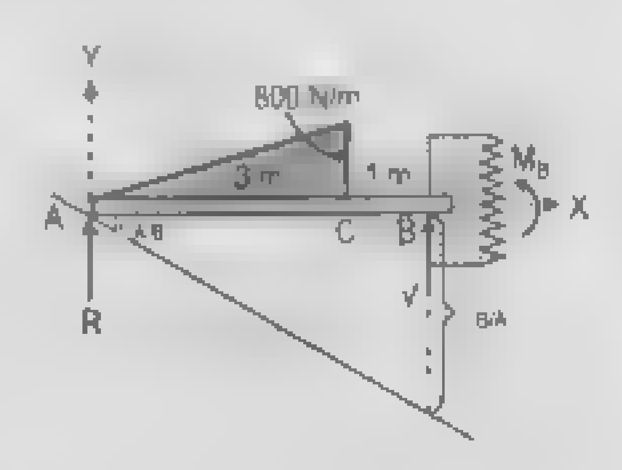
R = 666, 67 N , V = 2933,33 N

M = −3200 N m

741 Determinar el momento de empotramiento en la viga de la figura.



Resolución:
Del diagrama de cuerpo libre

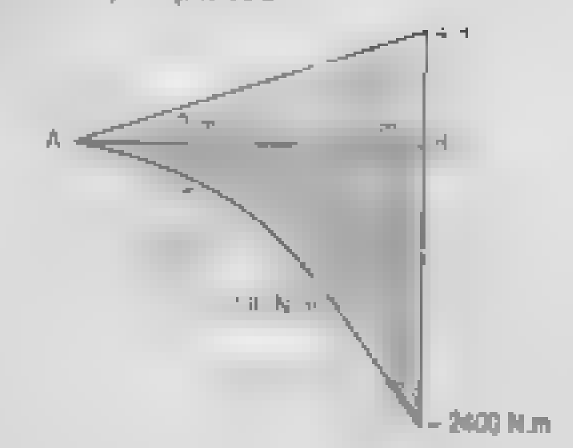


$\sum Fy = 0 = R + V - 1200$ (1)

$\sum M_A = 0 = M + 4V - 2400$ ...(2)

De la elastica $\theta_{A/B} = $ ...(3)

Diagrama de momentos por partes



Donde

$$EI\theta_{A/B} = \frac{1}{2}(4R)(4) - \frac{1}{4}(3)(1200) \quad (1200)(1) - \frac{(1)(1200)}{2} \;...(4)$$

$$EIt_{B/A} = \frac{1}{2}(4R)(4)\frac{4}{3} \quad \frac{1}{4}(3)(1200)\left(1 \quad \right) \quad (1200)(1)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{1}{2}\Big)(1200)\left(\frac{1}{3}\right) ...(5)$$

Resolviendo (1), (2) (3), (4) y (5)

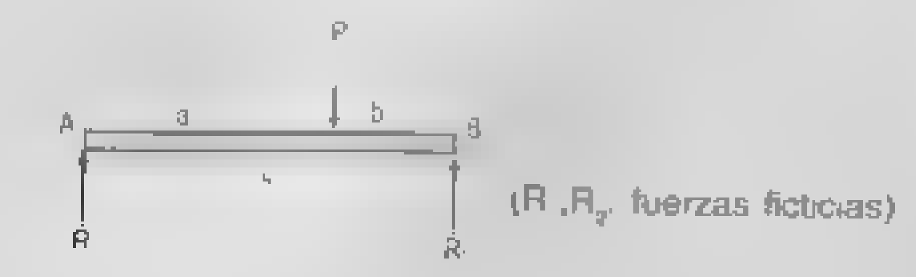
$R = 401{,}25$ N; $V = 798{,}75$ N; M $_795$ N.m

742. Calcular los momentos en los extremos en la viga del problema 710

Resolución.

Por el método de la viga conjugada.

Realizando los sistemas isostáticos



(R_1, R_2, fuerzas ficticias)

$\sum F_y$ R R

$\sum M$ (R_{1L} P R $\frac{Pb}{L}$ ...(1)

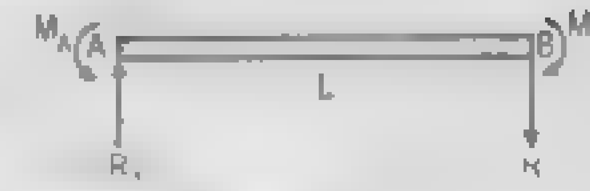
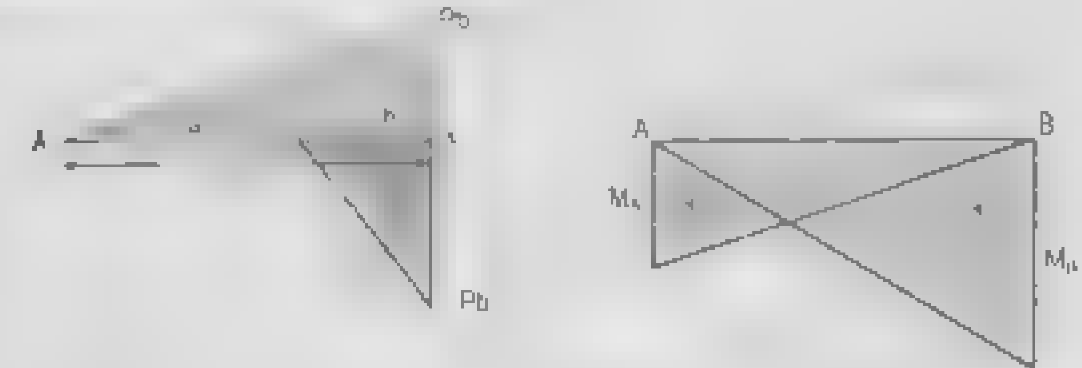


Diagrama de momentos por partes



Como los empotramientos son perfectos y no hay deflexión

$EI\theta_{A/B} = 0 \wedge EIt_{B/A} = 0$

$$\frac{PbL}{2} \quad \frac{Pb}{2} + \frac{M_AL}{2} + \frac{M_BL}{2} = 0 \quad ...(2)$$

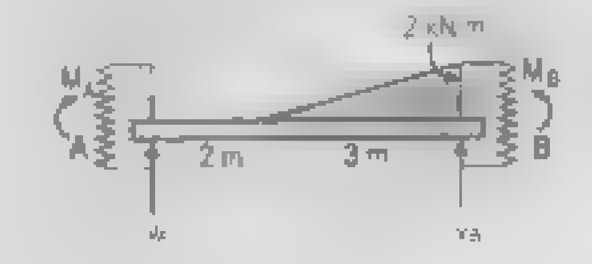
$$\frac{PbL}{2}\;\frac{L}{3} \quad \frac{Pb}{2} \quad \frac{b}{3} \quad \frac{M}{2} \quad \frac{L}{3} \quad \frac{M\,L}{2}\;\;3 \quad ...(3)$$

Resolviendo (2) y (3): $\left|M_A = -\frac{ab^2}{L^2}P\right|$, $\left|M_B = -\frac{a^2b}{L^2}P\right|$

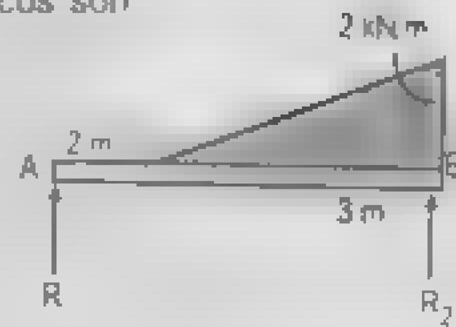
743. Calcular los momentos en los extremos en la viga del problema 712

Resolución.

Por el método de la viga conjugada

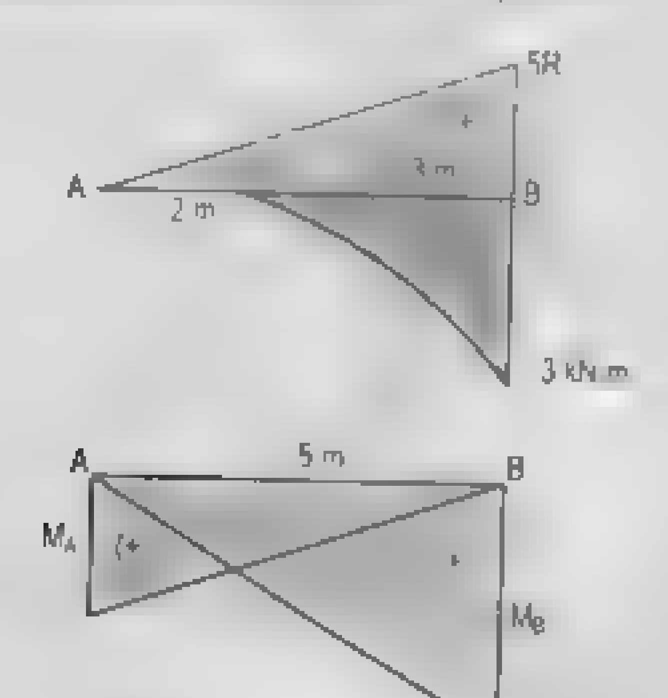


Los sistemas isostáticos son



$$\sum M_B = 0 = 5R_1 - \frac{3\cdot 2}{2}(1) \Rightarrow R_1 = \frac{3}{5}\ \text{kN} \qquad (1)$$

Realizando los diagramas de momentos por partes



Como $EI\theta_{A/B} = 0$

$$\frac{(5R_1)(5)}{2} - \frac{1}{4}(3)(3) + \frac{5M_A}{2} + \frac{5M_B}{2} = 0$$

Como $EIt_{B/A} = 0$

$$\frac{(5R_1)(5)}{2}\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{4}(3)(3)\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{2}M_A\left(\frac{2}{3}5\right) + \frac{5}{2}M_B\left(\frac{5}{3}\right) = 0$$

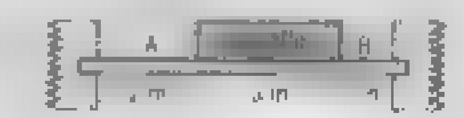
Resolviendo

$$M_A + M_B = 2{,}1\ \text{kN m}$$

$$M_A + \frac{M_B}{2} = 1{,}338\ \text{kN m}$$

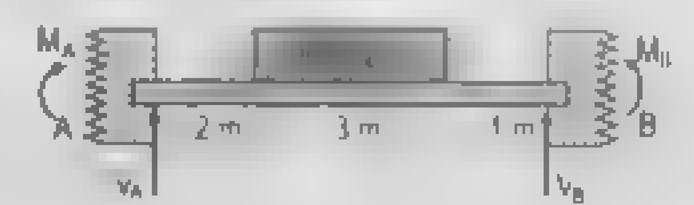
Donde $\boxed{M_A = -0{,}576\ \text{kN.m}}$; $\boxed{M_B = -1{,}524\ \text{kN m}}$

744 **Calcular los momentos de empotramiento en la viga de la figura**

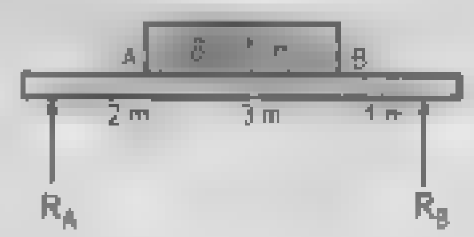


Resolución.

Por el método de la viga conjugada



Los sistemas isostáticos



$$\sum M_B = 0 = 6R_A - (2400)(2{,}5) \Rightarrow R_A = 1000\ \text{N}$$

$$\sum M_A = 0 = 6R_B - (2400)(3{,}5) \Rightarrow R_B = 1400\ \text{N}$$

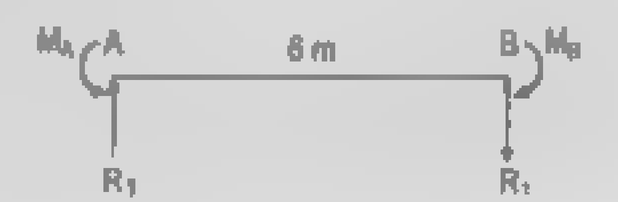
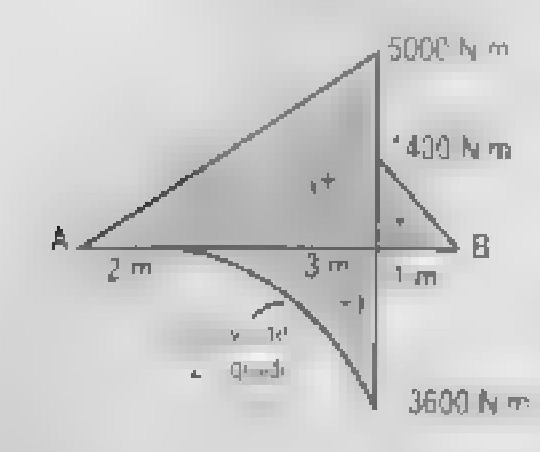
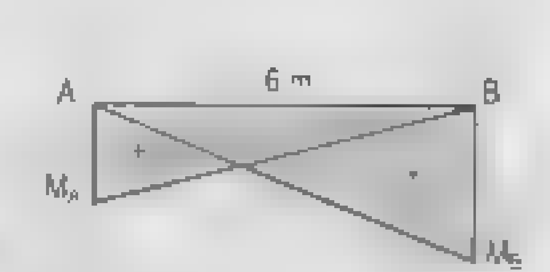


Diagrama de momentos por partes





$EIt_{A/B}=0$

$$(5000)\left(\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{1400}{2}\right)(1)-\frac{1}{3}(3)(3600)+\frac{6M_A}{2}+\frac{6M_B}{2}=0 \qquad (1)$$

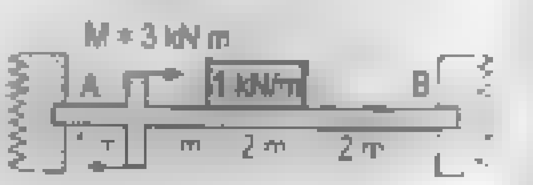
$EIt_{B/A}=0$

$$5000\left(\frac{5}{2}\right)\left(1+\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{1400}{2}\right)(1)\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{3}(3)(3600)\left(1+\frac{3}{4}\right)$$

$$+\frac{6M_A}{2}\cdot\frac{2}{3}6+\frac{6M_B}{2}\cdot\frac{6}{3}=0 \qquad (2)$$

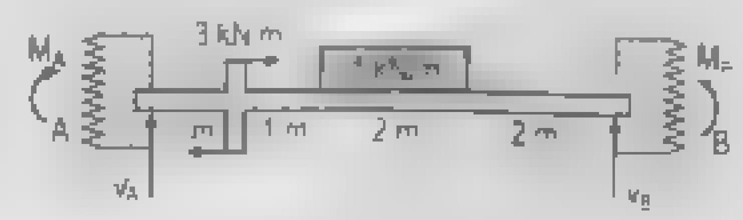
Resolviendo: $\boxed{M_A=-\frac{4150}{3}\ \text{N.m}}$, $\boxed{M_B=-\frac{5450}{3}\ \text{N.m}}$

745. La viga doblemente empotrada de la figura soporta la carga uniformemente distribuida sobre parte de su claro, además del par indicado. Determinar los momentos de empotramiento.



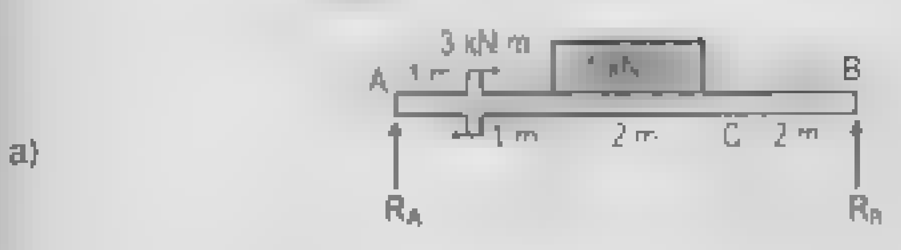
Resolución

Por el método de la viga conjugada



Los sistemas isostáticos son

a)



$$\Sigma F_y=0=R_A+R_B-2$$

$$\Sigma M_B=0=6R_A+3-2(3)\Rightarrow R_A=\frac{1}{2}\ \text{kN} \ \text{ y } \ R_B=\frac{3}{2}\ \text{kN}$$

b)

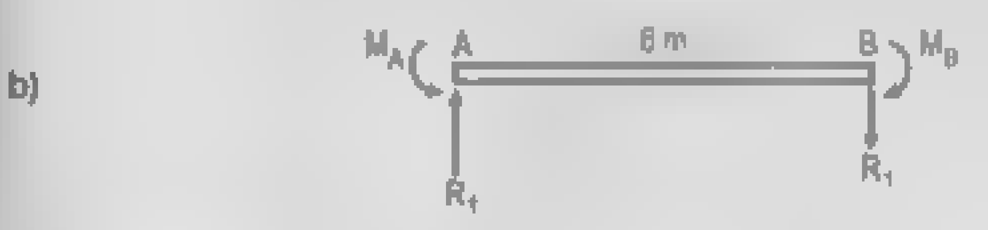
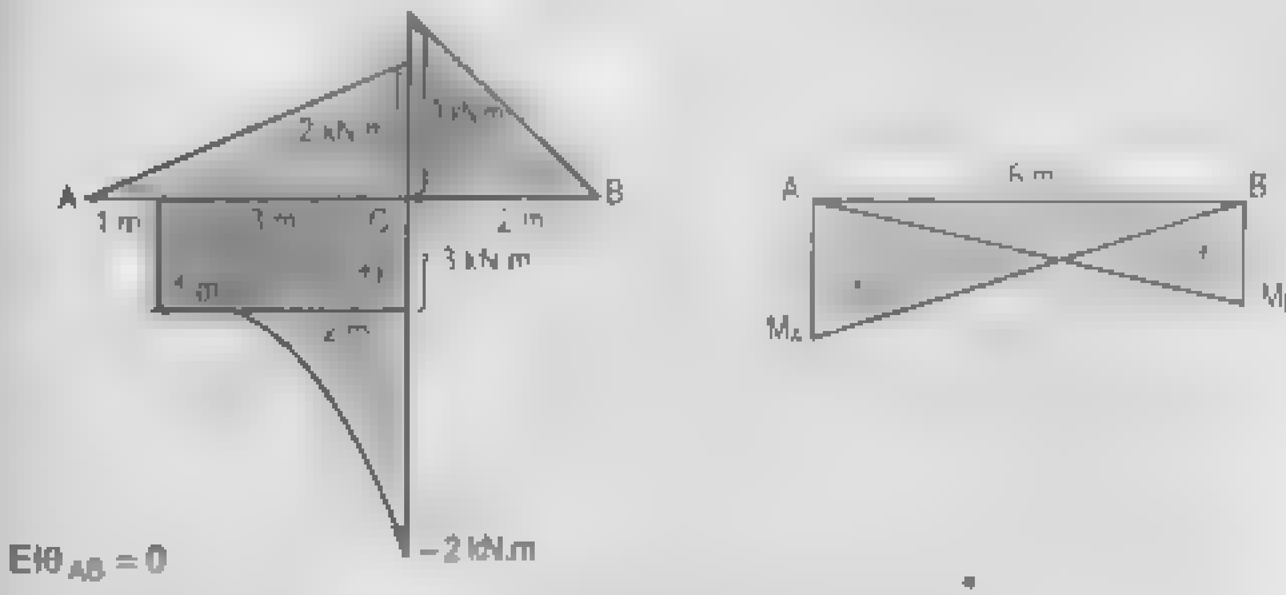


Diagrama de momentos por partes



$EI\theta_{AB}=0$

$$\frac{(2)(4)}{2}+\frac{(3)(2)}{2}+(3)(3)-\frac{1}{3}(2)(2)+\frac{6M_A}{2}+\frac{6M_B}{2}=0$$

$EIt_{B/A}=0$

$$\frac{(2)(4)}{2}\left(2+\frac{4}{3}\right)+\frac{(3)(2)}{2}\left(\frac{2}{3}2\right)+(3)(3)(2)\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}(2)(2)\left(2+\frac{2}{4}\right)$$

$$+\frac{6M_A}{2}\cdot\frac{2}{3}6+\frac{6M_B}{2}\cdot\frac{1}{3}6=0$$

Resolviendo.

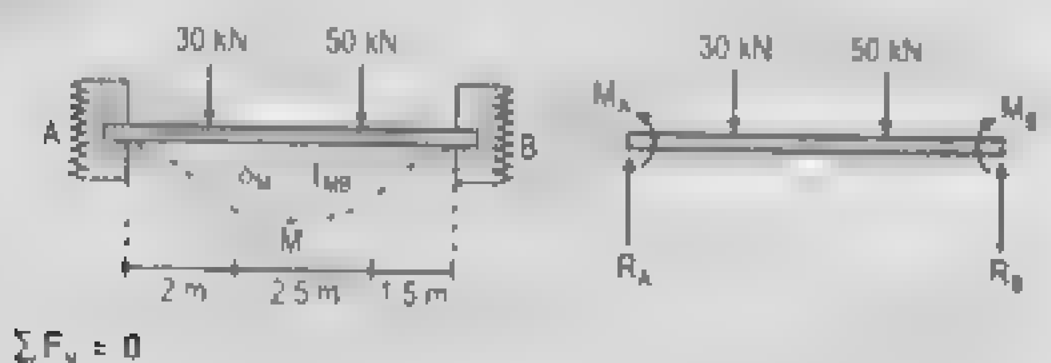
$$\boxed{M_A = -\frac{97}{36}\ \text{kN.m}}\ ;\ \boxed{M_B\ \ \frac{79}{36}\ \text{kN.m}}$$

Los valores del texto son aproximados.

746, 747 problemas ilustrativos.

748. Una viga doblemente empotrada de 6 m de longitud soporta una carga concentrada de 30 kN a 2 m del extremo izquierdo y otra de 50 kN a 1,5 m del derecho. Elegir un perfil apropiado para soportar estas cargas sin exceder un esfuerzo de 120 MPa. Calcular la deflexión en el centro si E = 200 GN/m²

Resolución:



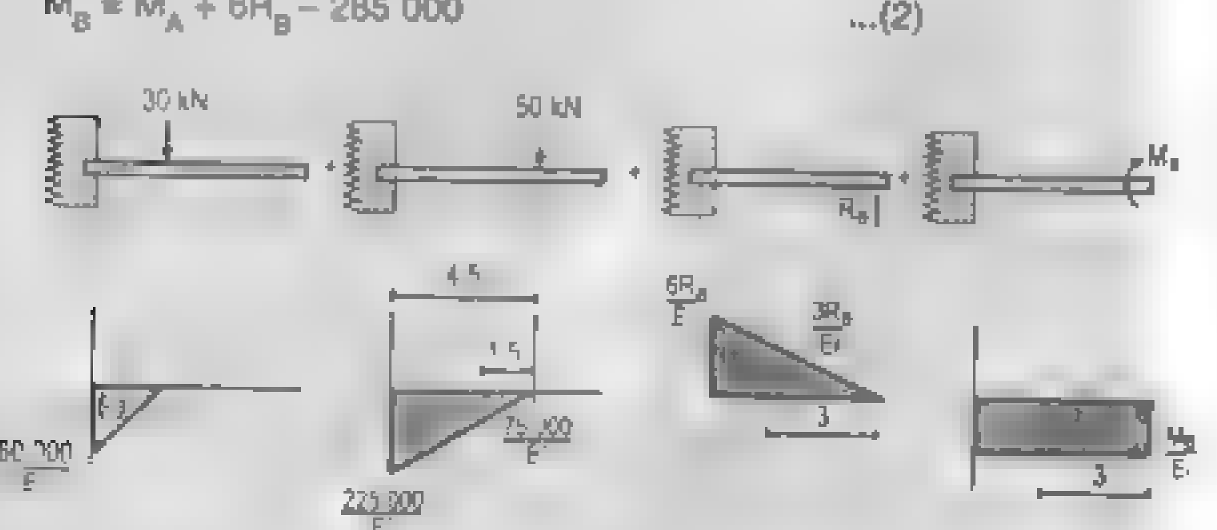
$\sum F_y = 0$

$R_A + R_B = 80\ 000$ ...(1)

$\sum M_A = 0$

$M_B = M_A + 6R_B - 30\times10^3\times2 - 50\times10^3\times4{,}5$

$M_B = M_A + 6R_B - 285\ 000$ ...(2)



$$\theta_{AB} = 0 = \frac{60\ \ 10^3\ \ 2}{2} - \frac{229\ \ 10^3\ \ 4{,}5}{2} + \frac{6R_B\ \ 6}{2} - M_B\times6$$

$\rightarrow\ M_B = 3R_B - 94\ 375$ ...(3)

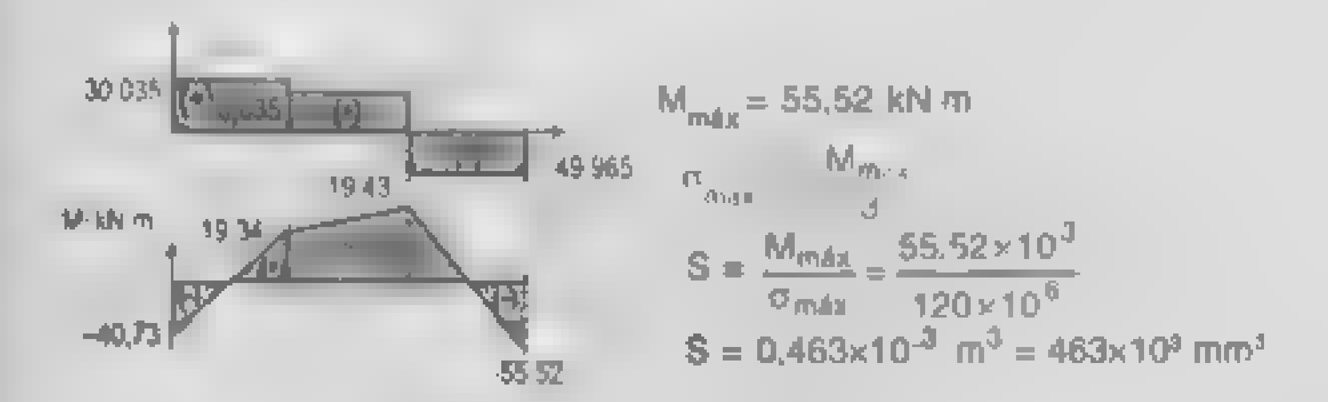
$$t_{AB}\ \ 0\ \ \frac{60\times10^3\times2}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times2\right)\ \frac{225\times10^3\times4{,}5}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times4{,}5\right)$$

$$+\frac{6R_B\times6}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times6\right)\ \ M_B\times6\times(3)\qquad ...(4)$$

$M_B = 2R_B - 44\ 410$

De (3) y (4). $R_B = 49{,}965$ kN ; M_B 55, 520 kN m

De (1) y (2): $R_A = 30{,}035$ kN ; $M_A = 40{,}73$ kN.m



$M_{máx} = 55{,}52$ kN m

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{S}$$

$$S = \frac{M_{máx}}{\sigma_{máx}} = \frac{55{,}52\times10^3}{120\times10^6}$$

$S = 0{,}463\times10^{-3}\ m^3 = 463\times10^3\ mm^3$

Seleccionamos. $\boxed{W360\times33}$

$S = 474\times10^3\ mm^3$, $= 82\ 7\times10^6\ mm^4\ \left(\frac{1\ m}{10^3\ mm}\right)^4$

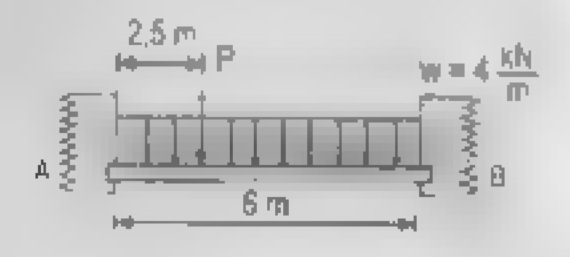
$EI = 200\times10^9\ \frac{N}{m^2}\times82{,}7\times10^{-6}\ m^4 = 16{,}54\times10^6\ N.m^2$

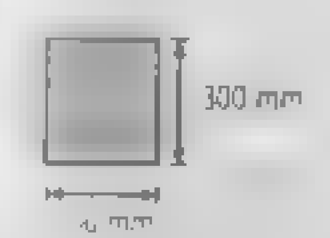
$$EIt_{MB} = \frac{75\times10^3\times1{,}5}{2}(0{,}5) + \frac{3\times(49{,}965\times10^3\ \ 3}{2}(1\ \ \ 55{,}52\times10^3\times3\ 1{,}5$$

$t_{MB} = -3{,}2\times10^{-3}\ m = -3{,}2\ mm\ \therefore\ \boxed{|t_{MB}| = \delta_M = 3{,}2\ mm}$

749 Una viga de madera de 150 mm de ancho por 300 mm de altura y 6 m de longitud está perfectamente empotrada en sus extremos. Soporta una carga uniforme de 4 kN/m sobre todo su claro y una carga concentrada P a 2.5 m del extremo izquierdo. Calcular P si el esfuerzo admisible es de 10 MN/m² y la deflexión en el centro no debe sobrepasar 1/360 del claro. E=10 GN/m²

Resolucion.





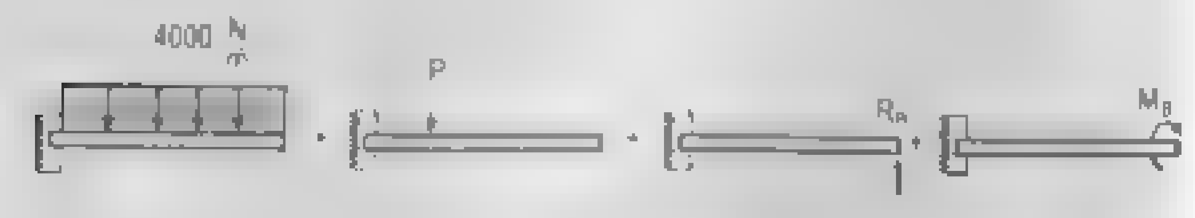
$\sigma_{adm.} = 10\ \dfrac{MN}{m^2}$, $\delta_{M\,máx} = \dfrac{6}{360}\times 1000\text{ mm} = 16{,}7\text{ mm}$; $E = 10\ \dfrac{GN}{m^2}$

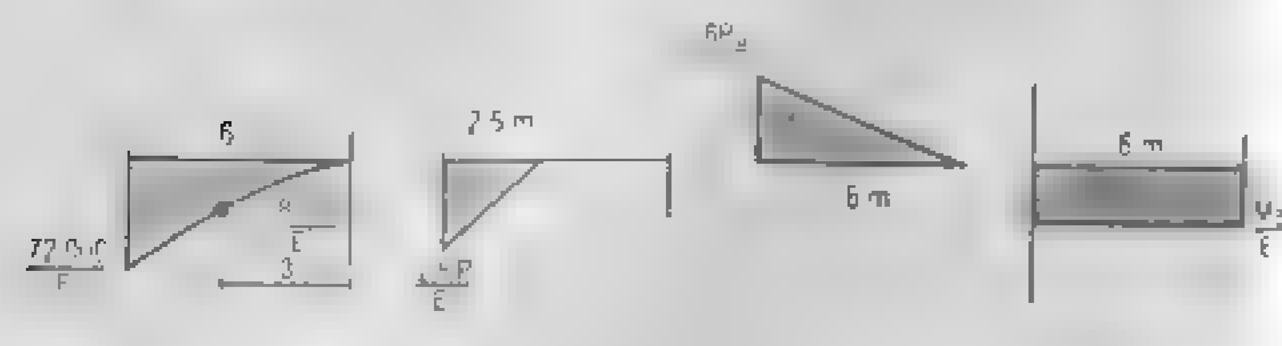
$I_{xx} = \dfrac{1}{12}(0{,}15)(0{,}3)^3 = 337{,}5\times10^{-6}\,m^4$; $S_{XA} = 2250\times10^{-6}\,m^3$

Equilibrio

$\sum F_y = 0$: $R_A + R_B = 24\,000 + P$ (1)

$\sum M_A = 0$: $M_A - M_B + R_B\times 6 - P\times 2{,}5\ \ 72\,000 = 0$ ... (2)





$$EI\theta_{AB} = 0 = \frac{6\times72\,000}{3} - \frac{2{,}5\times2{,}5\,P}{2} + \frac{6\times6R_B}{2} - 6M_B$$

$M_B = 3R_B - 24\,000\ \ 0.5208P$ ...(3)

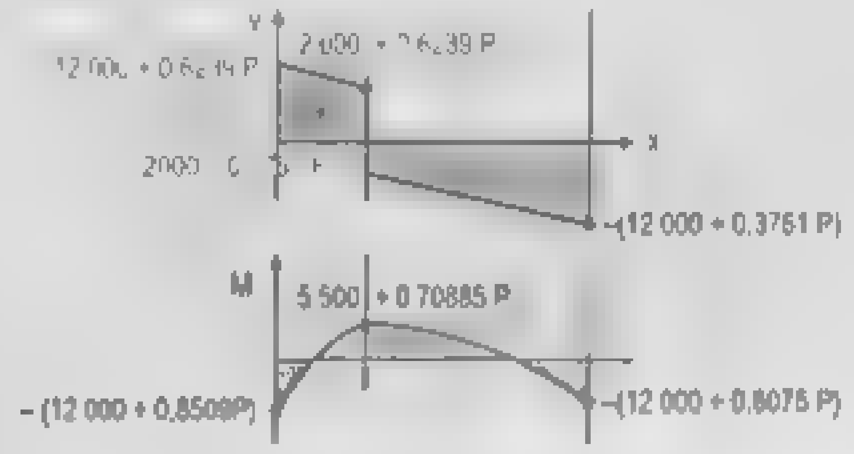
$EI\ _B$ ... $\dfrac{6\times72\,000}{3}\left(\dfrac{6}{4}\right)\ \dfrac{2{,}5\times2{,}5P}{2}\left(\dfrac{2{,}5}{3}\right)\ \dfrac{6\times6R_B}{2}\ \ 2\ \ 6M_B\ \ 3$

$M_B = 2R_B - 12\,000\ \ 0{,}1447P$ ...(4)

$\Rightarrow$ $R_B = 12\,000 + 0.3761P$ $M_B = 12\,000 + 0.6075P$

$R_A = 12\,000 + 0{,}6239P$ $M_A = 12\,000 + 0{,}8509P$

Cálculo por resistencia



$M_{máx} = -(12\,000 + 0.8509P)$

$\sigma = \dfrac{M_{máx}}{S} \Rightarrow 10\times10^6 = \dfrac{1200 + 0.8509P}{2250\times10^{-6}}$ $P_{máx1}$ 12.3 kN

Cálculo por rigidez

$EI = 10\times10^9\times337{,}5\times10^{-6} = 3\,375\times10^6\ N\,m^2$

$-\delta_u = t_{u/B} = -16{,}7\times10^{-3}\,m \Rightarrow EIt_{u/B} = -56{,}36\times10^3$

$EIt_{u/B} = -56{,}36\times10^3$ $\dfrac{18\,000\ \ 3}{3}\ \ \dfrac{3}{4}\ \ \dfrac{3(12\,000\ \ 0.3761P)\ 3}{2}\ 1,$

$-3(12\,000 + 0.6075P)(1{,}5)$

$P_{máx2} = 468$ kN $\therefore$ $P_{máx}$ 12.3 kN

750. Una viga de acero W200×36 de 5 m de longitud y empotrada en sus extremos soporta una carga concentrada de 20 kN a 1 m del extremo izquierdo y otra de 30 kN a 2 m del extremo derecho. Calcular el máximo esfuerzo normal y la deflexión en el centro. Despreciar el peso propio de la viga y emplear E = 200 GPa

Resolución:

Para el perfil W200x36

$I_x = 34,4 \times 10^6\ mm^4$, $S_{xx} = 342 \times 10^3\ mm^3$

Del sistema

Por la tabla 7-2 tenemos: $M_A = \sum -\frac{Pab^2}{L^2} \wedge M_B = \sum -\frac{Pa^2b}{L^2}$

donde $M_A = \frac{20(1)(4)^2}{5^2} + \frac{30(3)(2)^2}{5^2}$ kN.m $\Rightarrow M_A = 27,2$ kN.m

También $M_B = \frac{20(1)^2(4)}{5^2} + \frac{30(3)^2(2)}{5^2}$ kN.m $\Rightarrow M_B = 24,8$ kN.m

Así el momento flexionante máximo es: $M_{máx} = 27,2$ kN.m

Para el esfuerzo normal máximo

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{S}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{27,2\ kN.m}{342 \times 10^3\ mm^3} \Rightarrow \boxed{\sigma_{máx} = 79,53\ GPa}$$

Para el centro del claro, de la tabla 7-2

$$EIy = \sum \frac{Pb^2}{48}(3L - 4b)$$

$$EIy = \frac{20(1)^2\left[3(5) - 4(1)\right]}{48} + \frac{30(2)^2\left[3(5) - 4(2)\right]}{48}$$

$$(200\ GPa)(34,4 \times 10^6\ mm^4)\ y = \frac{1060}{48}\ kN.m^3$$

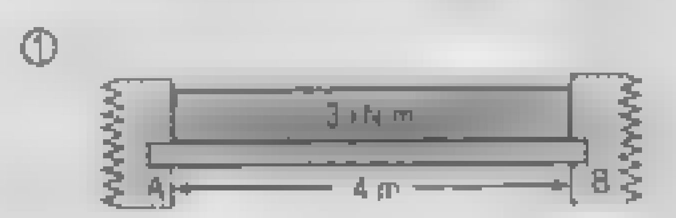
Operando $\boxed{y = 3,2\ mm}$

751. Una viga de madera de sección rectangular soporta las cargas indicadas en la figura. Determinar la sección necesaria si el esfuerzo admisible es de 10 MN/m². Calcular el valor del esfuerzo cortante máximo.

Resolución:

El sistema tiene tres cargas superpuestas y en cada uno los momentos son

①

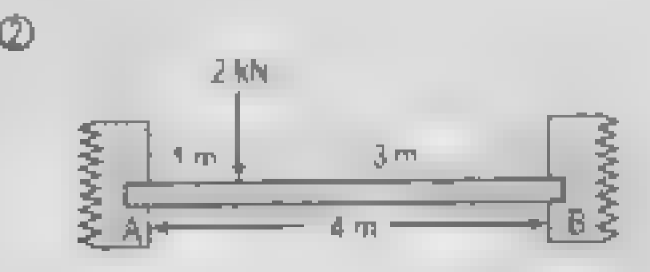


Por el caso 3:

$$M_{A_1} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-3(4)^2}{12}\ kN.m = -4\ kN.m$$

$$M_{B_1} = \frac{wL^2}{12} = 4\ kN.m$$

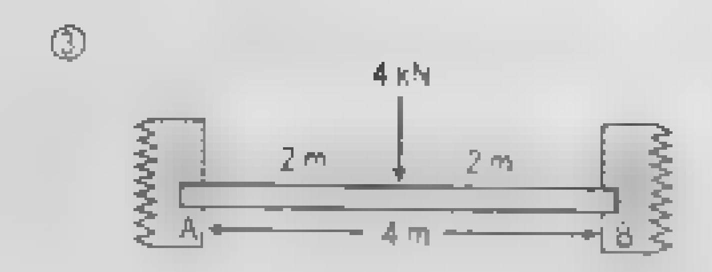
②



Por el caso 1: P = 2 kN, a = 1 m b = 3 m

Así: $M_{A_2} = \frac{-Pab^2}{L^2} = \frac{-2(1)(3)^2}{4^2} = -1,125$ kN.m

$$M_{B_2} = \frac{-Pa^2b}{L^2} = \frac{2(1)^2(3)}{4^2} = 0,375\ kN.m$$



Por el caso 2: P = 4 kN, a = b = 2 m, L = 4 m

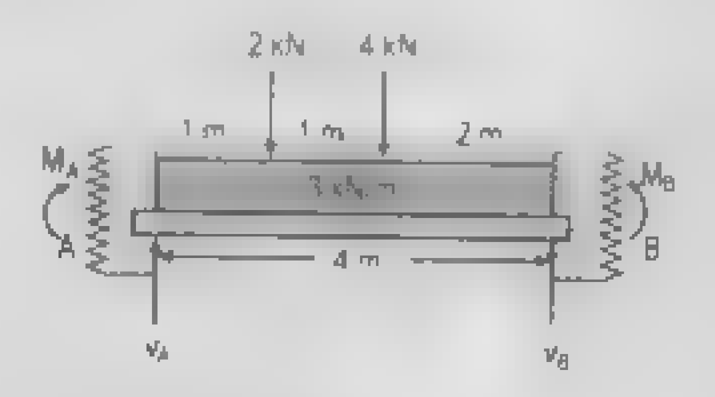
Así: $M_{A_3} = M_{B_3} = \frac{-PL}{8} = \frac{-(4)(4)}{8} = -2$ kN.m

Sumando para el total de la superposición

$$M_A = \sum^{3} M_{Ai} = (-4 - 1{,}125 - 2)\ \text{kN.m} \Rightarrow M_A = -7{,}125\ \text{kN.m}$$

$$M_B = \sum^{3} M_{Bi} = (-4 - 0.375 - 2)\ \text{kN.m} \Rightarrow M_B = -6{,}375\ \text{kN.m}$$

Del diagrama de cuerpo libre del sistema



Donde: $\sum F_y = 0 = V_A + V_B - 3(4) - 2 - 4$ ... (α)

$\sum M_A = 0 = M_B + 4V_B - 3(4)(2) - 2(1) - 4(2) - M_A$ ... (β)

Resolviendo (α) y (β)

$V_A = 9{,}6875$ kN , $V_B = 8{,}3125$ kN

Donde la fuerza cortante máxima es. $V_{máx} = V_A = 9.6875$ k.N

Como $\sigma_{adm} = \frac{V_{máx}}{A}$ as $A = \frac{9.6875\ \text{kN}}{10\ \text{MN/m}^2}$ $\Rightarrow A = 968.75\ \text{mm}^2$

El esfuerzo cortante máximo para una viga de sección rectangular es

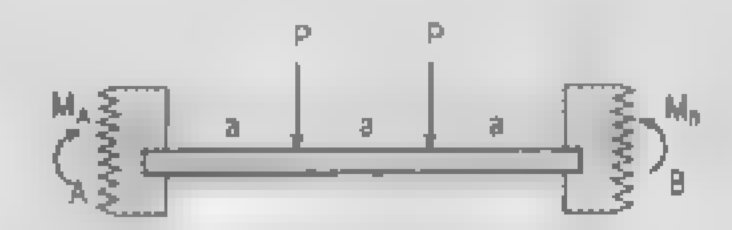
$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V_{max}}{A}$$

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{9.6875\ \text{kN}}{968{,}75\ \text{mm}^2} \Rightarrow \tau_{máx} = 15\ \text{MN/m}^2$$

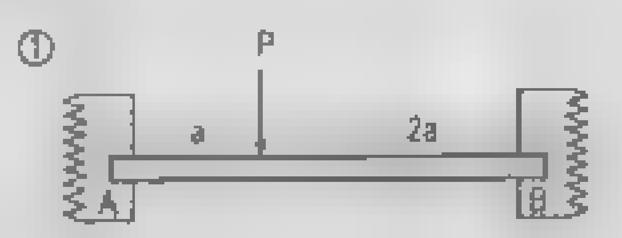
752 Con los datos de la tabla 7-2 comprobar los valores de los momentos de empotramiento y la deflexión en el centro de la viga del problema 713.

Resolución

Del sistema



Son dos cargas superpuestas



Por el caso 1:

$$M_{A_1} = \left[\frac{-Pab^2}{L^2}\right] = \frac{-Pa(2a)^2}{(3a)^2} = -\frac{4}{9}Pa \qquad (\alpha)$$

$$M_{B_1} = \left[\frac{-Pa^2b}{L^2}\right] = \frac{-Pa^2(2a)}{(3a)^2} = \frac{-2Pa}{9} \qquad (\beta)$$

(midiendo desde B)

$$EI_{y_{centro}} = \left[\frac{Pb^2}{48}(3L - 4b)\right] = \frac{Pa^2}{48}(9a - 4a) \qquad (\gamma)$$

Por el caso 1

$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-P(2a)(a)^2}{(3a)^2} = -\frac{2}{9}Pa \qquad (\alpha_2)$$

$$M_{B_2} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{P(2a)^2 a}{(3a)^2} = \frac{4}{9}Pa \qquad (\beta_2)$$

$$EI_{y(centro)} = \frac{Pb^2}{48}(3L - 4b) = \frac{Pa^2(9a - 4a)}{48}$$

$$EI_{y(centro)} = \frac{5}{48}Pa^3 \qquad (\gamma_2)$$

Sumando por la superposición de cargas: $M_A = M_{A_1} + M_{A_2} = -\frac{4}{9}Pa - \frac{2}{9}Pa$

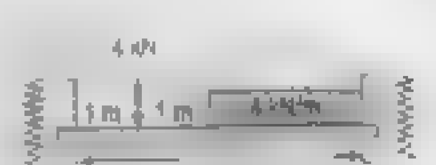
Luego: $M_A = -\frac{2}{3}Pa$

También: $M_B = M_{B_1} + M_{B_2} = \frac{2}{9}Pa + \frac{4}{9}Pa$

Luego: $M_B = \frac{2}{3}Pa$

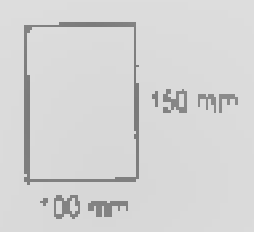
Sumando $(\gamma_1)+(\gamma_2)$: $EI_{y(centro)} = \frac{5Pa^3}{48} + \frac{5Pa^3}{48} = \frac{5}{24}Pa^3$

753 Una viga de madera de 100 mm de ancho por 150 mm de altura soporta las cargas de la figura. Calcular el esfuerzo cortante máximo



Resolución

Como la sección de la viga es



Donde: $I = \left[\frac{bh^3}{12}\right] = \frac{(100)(150)^3}{12}\ mm^4$

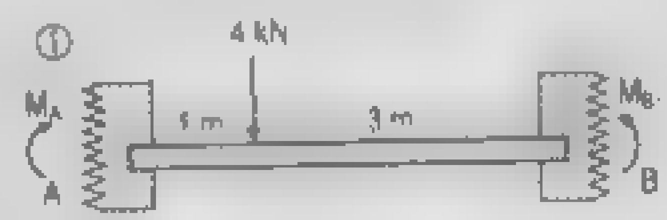
Así: $I = 28\,125\,000\ mm^4$ (α)

También

$A = [b.h] = (100)(150)\ mm^2$

$A = 15\,000\ mm^2$ (β)

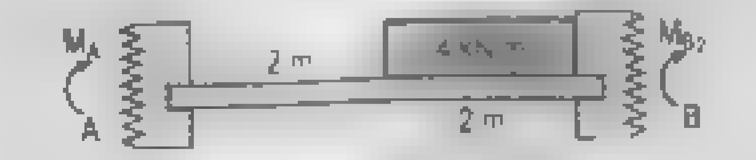
Del sistema, tiene dos cargas superpuestas.



Por el caso 1:

$$M_{A_1} = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{4(1)(3)^2}{(4)^2} = 2{,}25\ kN.m$$

$$M_{B_1} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{4(1)^2(3)}{4^2} = -0{,}75\ kN.m$$



Por el caso 4:

$$M_{A_2} = \frac{5}{192} wL^2 = \frac{5}{192}(4)(4)^2 = 1.67 \text{ kN m}$$

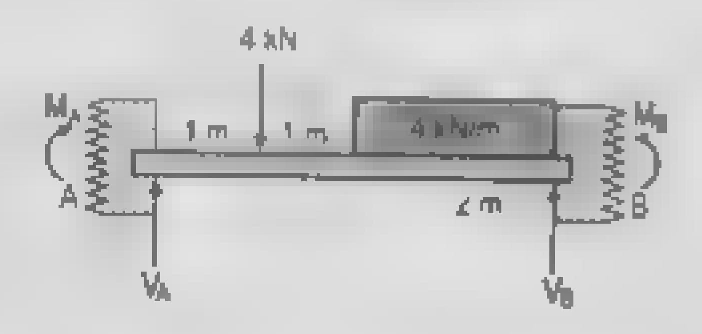
$$M_{B_2} = \frac{11}{192} wL^2 = \frac{11}{192}(4)(4)^2 = 3.67 \text{ kN m}$$

Sumando por la superposición

$$M_A = M_{A_1} + M_{A_2} = (-2,25 - 1,67) = -3,92 \text{ kN m}$$

$$M_B = M_{B_1} + M_{B_2} = (-0,75 - 3,67) = -4,42 \text{ kN m}$$

Del sistema.



La mayor reacción o fuerza cortante está en la sección de mayor moment así $V_B = V_{máx}$

Tomando momentos en A.

$$\Sigma M_A = 0 = M_B + 4V_B - 4(1) - 8(3) - M_A \qquad ...(1)$$

Resolviendo:

$$V_B = \frac{1}{4}(4 + 24 + M_A - M_B)$$

$$V_B = V_{max} = 7.125 \text{ kN} \qquad (2)$$

Para una sección rectangular el esfuerzo cortante máximo es

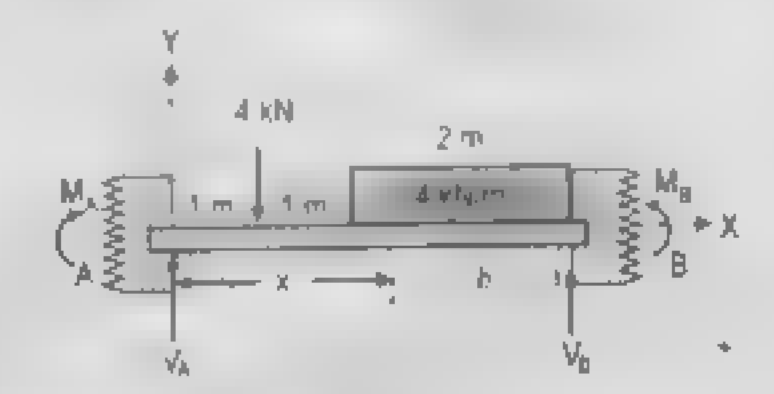
$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A}$$

$$\text{As } \tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{7.125}{15\,000} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = 712.5 \text{ kN/m}^2}$$

...4 En el problema anterior calcular el esfuerzo normal máximo si el empotramiento derecho sufre un asentamiento de 20 mm con respecto al extremo izquierdo pero sin rotación alguna. $E = 10 \times 10^9$ N/m²

Resolución.

Al sufrir un asentamiento, obviamente los momentos varían, así



Por el método de la doble integración

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_A + V_A x - 4\langle x-1\rangle - 2\langle x-2\rangle^2 \qquad (1)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = M_A x + V_A\frac{x^2}{2} - 2\langle x-1\rangle^2 - \frac{2}{3}\langle x-2\rangle^3 + C \qquad (2)$$

$$EIy = M_A\frac{x^2}{2} + V_A\frac{x^3}{6} - \frac{2}{3}\langle x-1\rangle^3 - \frac{1}{6}\langle x-2\rangle^4 + C_1x + C_2 \qquad (3)$$

Por el empotramiento perfecto. (en (2))

Si $x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$; luego $C_1 = 0$

$x = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

Así: $4M_A + 8V_A - 2(3)^2 - \frac{2}{3}(2)^3 = 0 \qquad ...(\alpha)$

Por el desplazamiento vertical (en (3))

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$; luego $C_2 = 0$
Si $x = 4 \Rightarrow y = -20$ mm (dato del problema)

Se toma el negativo porque está debajo de la línea de referencia

$$EIy = 8M_A + \frac{32}{3}V_A - \frac{2}{3}(3)^3 - \frac{1}{6}(2)^4 \qquad ...(\beta)$$

Del problema anterior

$$I = 28\,125\,000\ mm^4$$

Además: $E = 10\times10^9\ N/m^2$ (dato)

Así

$$EI_y = 10^{10}\frac{N}{m^2}(28\,125\,000\ mm^4)\ 20\ mm \Rightarrow EI_y = 5\,625\ kN\,m^2 \quad (\gamma)$$

Resolviendo (α), (β) y (γ)

$$M_A = -6{,}024\ kN.m \quad ; \quad V_A = -5{,}928\ N\,m$$

Llevando a (1) para x = 4

$$M_A + 4V_A - 4(3) - 2(2)^2 = M_B \Rightarrow M_B = -2{,}311\ kN\,m$$

Como $\Sigma F_y = 0$, así

$$V_A + V_B - 4 - 6 = 0 \Rightarrow V_B = 6{,}072\ kN$$

Por lo tanto: $V_B = V_{máx} = 6{,}072\ kN$

Pero el esfuerzo normal máximo viene expresado por

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} \text{ donde } c = \frac{h}{2} = \frac{150}{2}\ mm$$

Reemplazando: $\sigma_{máx} = \dfrac{(6.024\ kN.m)(75\ mm)}{(28\,125\,000\ mm^4)}$

Simplificando: $\boxed{\sigma_{máx} = 16{,}064\ MN/m^2}$

755 Una viga de acero, S120 x 22 la cual tiene 4 m de longitud soporta una carga uniformemente variable desde cero en el extremo izquierdo hasta 15 kN/m en el derecho. La viga está perfectamente empotrada pero el extremo derecho se asienta 10 mm respecto del izquierdo. Calcular la relación entre los esfuerzos máximos de flexión en esta situación con respecto a aquella en que los empotramientos estuvieron al mismo nivel. Utilice E = 200 GPa.

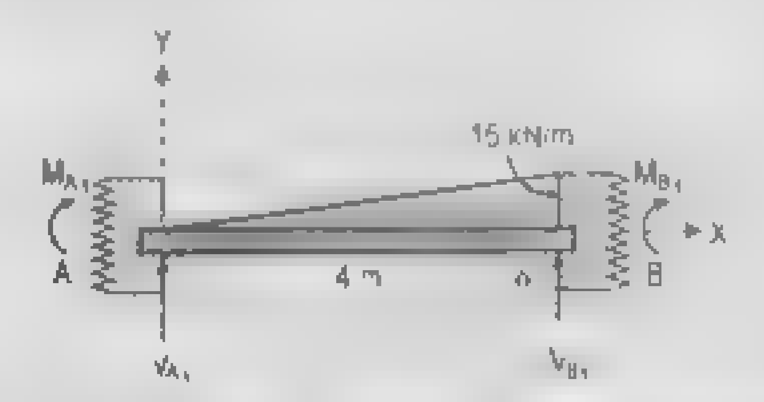
Resolución:

La viga de acero, S130x22, según tablas tiene:

$$I = 6{,}33\times10^6\ mm^4 \quad ; \quad A = 2790\ mm^2 \quad ; \quad E = 200\ GPa$$

Hay dos situaciones.

1.ª Cuando hay un asentamiento en el extremo derecho de 10 mm



Por el método de la doble integración en momentos flectores

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_{A_1} + V_{A_1}x - \frac{5}{8}x^3 \qquad (1)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\theta = M_{A_1}x + V_{A_1}\frac{x^2}{2} - \frac{5}{32}x^4 + C_1 \qquad (2)$$

$$EIy = M_{A_1}\frac{x^2}{2} + V_{A_1}\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{32} + C_1x + C_2 \qquad (3)$$

Como los empotramientos son perfectos

θ = 0 para x = 0 y x = 4

En (2): $C_1 = 0 \wedge 4M_{A_1} + 8V_{A_1} - \frac{5}{32}(4)^4 = 0$ ... (α)

Para los asentamientos, en (3)

$y = 0$ si $x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y = -\delta$ si $x = 4$, así

$$8M_{A_1} + \frac{4^3}{6}V_{A_1} - \frac{4^5}{32} = -EI\delta \qquad \ldots (\beta)$$

Resolviendo (α) y (β)

$$M_{A_1} = -\left(8 + \frac{3}{8}EI\delta\right);\ V_{A_1} = \left(9 + \frac{3}{16}EI\delta\right)$$

En (1), para x = 4: $M_{A_1} + 4V_{A_1} - \frac{5}{8}(4)^3 = M_{B_1}$ o $M_{B_1} = -\left(12 - \frac{3}{8}EI\delta\right)$

Por ΣF_y $0 = V_{A_1} + V_{B_1} - 30$, así: $V_{B_1} = 21 - \frac{3}{16} EI\delta$

De los datos.

$EI\delta = (200)\,GPa\,(6{,}33 \times 10^6\, mm^4)(10\, mm)$

$EI\delta$ [illegible] $6{,}33 \times 10^6$ [illegible] $10 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}\, 10^{-3}$ [illegible] m^5

$EI\delta = 12{,}66\ kN.m^3$

Así: $M_{A_1} = -12{,}7475\ kN.m$ (ψ)

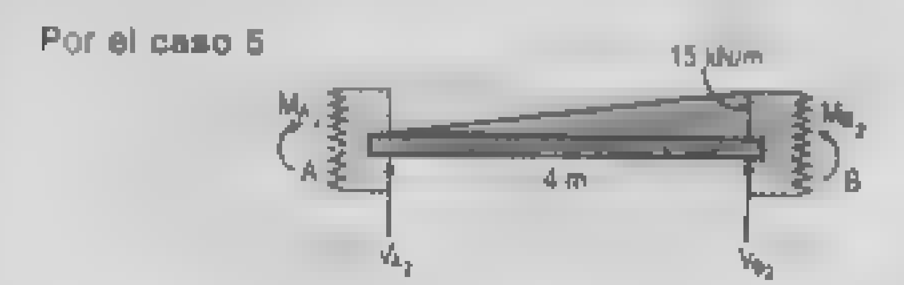
$M_{B_1} = 7{,}2525\ kN.m$

$V_{A_1} = 11{,}3738\ kN$

$V_{B_1} = 18{,}6262\ kN$

2.ª Cuando no hay asentamiento y el empotramiento es perfecto

Por el caso 5



$M_{A_2} = \frac{wL^2}{30} = \frac{15(4)^2}{(30)} = 8\ kN.m$

$M_{B_2} = \frac{wL^2}{20} = \frac{15(4)^2}{(20)} = 12\ kN.m$ ...(θ)

Observamos que cuando hay asentamiento en un lado, el momento del lado contrario aumenta en valor absoluto y el momento del asentamiento en valor absoluto, disminuye

Para los esfuerzos máximos

$\sigma_{máx_1} = \frac{M_{A_1}}{S}$ ...(a)

$\sigma_{máx_2} = \frac{M_{B_2}}{S}$ ...(b)

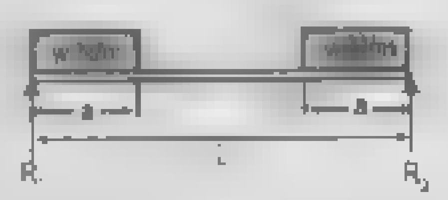
Dividiendo (a)/(b): $\frac{\sigma_{máx_1}}{\sigma_{máx_2}} = \frac{M_{A_1}}{M_{B_2}} = \frac{12{,}7475}{12} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_{máx_1}}{\sigma_{máx_2}} = 1{,}062}$

CAPÍTULO 8

VIGAS CONTINUAS

Calcular los valores de $6A\bar{a}/L$ y $6A\bar{b}/L$ en cada uno de los problemas 801 a 810 que representan claros de una viga continua con diferentes condiciones de carga.

801. Véase la figura. Confrontar el resultado obtenido poniendo a = L/2 y compararlo con el caso 2 de la tabla 8-1



Resolución:

Primero hallamos R_1 y R_2 por las ecuaciones de la estática.

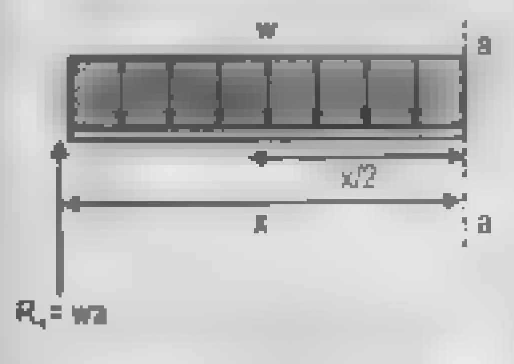
$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - 2wa \qquad ...(1)$$

Por la simetría del conjunto

$$R_1 = R_2 \qquad ...(2)$$

Resolviendo: $R_1 = wa \wedge R_2 = wa$

Hallando los momentos flexionantes respecto a la variable genérica x



Así

$M_{aa'} = wax - wx\frac{x}{2}$, si $x \in (0, a)$

w
b
b'
L − x
$R_2 = wa$

Así

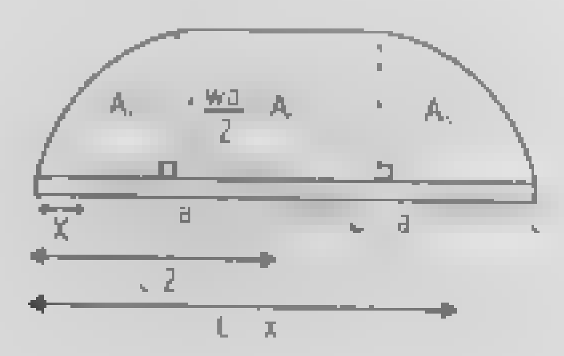
$M_{bb'} = wa(L - x) - \frac{w}{2}(L - x)^2$;

$x \in (L - a$ [illegible]

En el tramo $(a, L-a)$ el momento es constante

$\Sigma M_A = 0$ $\quad M_B - wa\left(\frac{a}{2}\right)$, así: $M_B = \frac{wa^2}{2}$ que es la misma para todo el tramo $(a, L-a)$

Graficando el área de momentos



Por la simetría de las gráficas

$A_1 = A_3$; luego: $\quad A_1 = \int_0^a \left(wax - w\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{wa^3}{3}$; A_2 [illegible]

Hallando la relación: $A\bar{x}$ para todo el conjunto

$A\bar{a} = A_1\bar{x} + A_2\frac{L}{2} + A_3$ [illegible] $\frac{L}{2}$

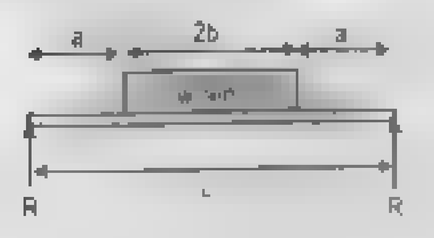
$A\bar{a} = \frac{wa^3}{3}L + \frac{wa^2}{2}(L-2a)\frac{L}{2}$ [illegible]

$A\cdot\bar{a} = \frac{wa^2L}{12}(3L-2a)$ $\quad \frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{wa^2}{2}(3L-2a)$

Por la simetría del sistema $\boxed{\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{wa^2}{2}(3L-2a)}$

Para a = L/2: $\boxed{\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{wL}{4}}$

... figura. Para b = L/2, comparar con resultado del caso 2 de la tabla 8-1



Resolución

Por la simetría del sistema

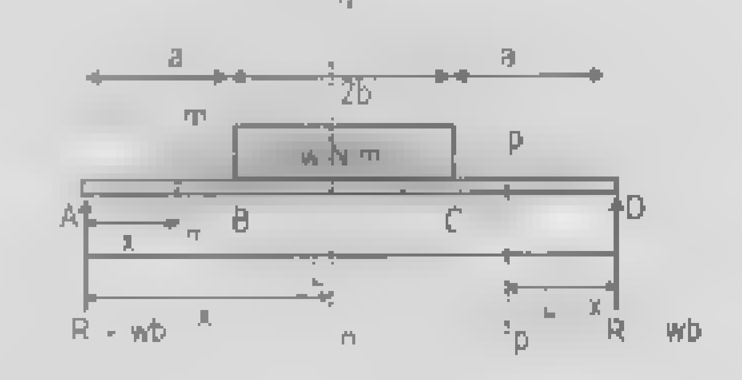
$R_1 = R_2$ ...(1)

Por las ecuaciones de la estática

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - w(2b) \quad ...(2)$$

Resolviendo. $R_1 = R_2 = wb$

Hallando los momentos flectores en cada tramo

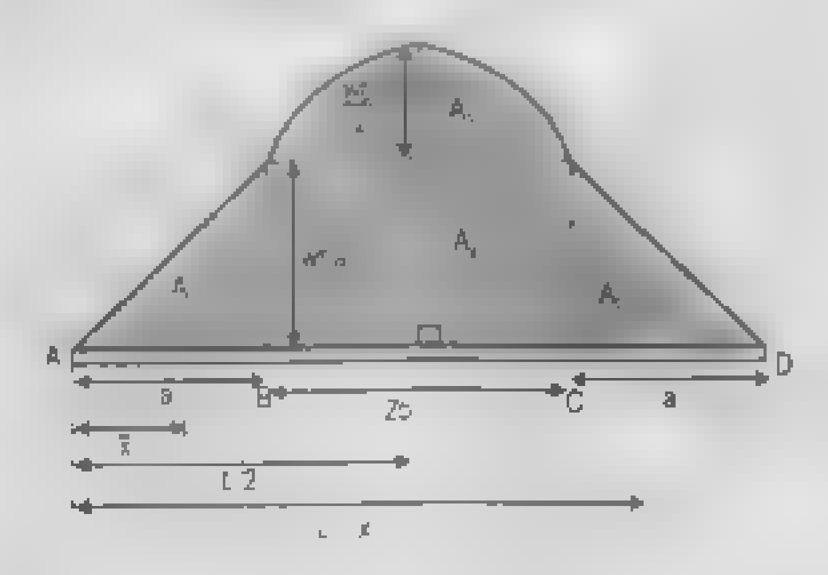


Tramo AB $\quad x \in (0,a)$ $\quad M_{mm'} = wbx$

Tramo BC $\quad x \in (a, L-a)$ $\quad M_{nn'} = wbx - \frac{w}{2}(x-a)^2$

Tramo CD $\quad x \in (L-a, L)$ $\quad M_{pp'} = wb(L-x)$

Graficando las áreas de momentos



Para hallar $A \cdot \bar{a}$: $A\ \bar{a} = A_1\ x + (A_3 + A_4)\frac{L}{2} + A_2\ (L - \bar{x})$

Como $A_1 = A_2$ $\quad A\ \frac{wba}{2}\ A_2 \quad A_4 = 2wb^2a \quad A_3 = \frac{2}{3}wb$

Luego: $A \cdot \bar{a} = A_1\ L + (A_3 + A_4)\frac{L}{2}$

$$A \cdot \bar{a} = \frac{wba^2}{2}L + \left(\frac{2}{3}wb^3 + 2wb^2a\right)\frac{L}{2} \Rightarrow A \cdot \bar{a}\ \frac{wLb}{6}(3a^2 + 6ab + 2b^2)$$

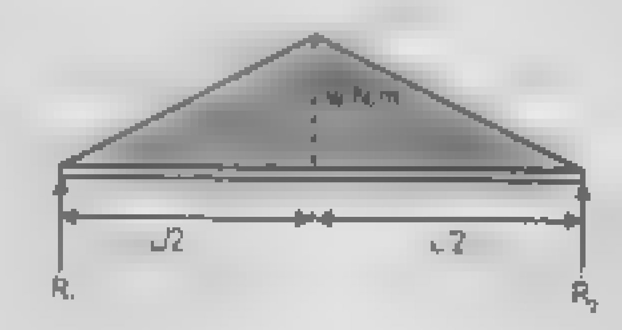
Así $\quad 6\frac{A\ \bar{a}}{L}\ wb\ (3a^2 + 6ab + 2b^2) \quad ...\ (1)'$

Por la simetría del sistema $\quad 6\frac{A\bar{a}}{L}\quad 6\frac{A\ b}{L}$

Si $b = L/2$; $a = 0$ y en (1)' $\quad \boxed{6\frac{A\ a}{L}\ \frac{wL}{4}}$

Idéntico al resultado del caso 2 página 256

803 Véase la figura



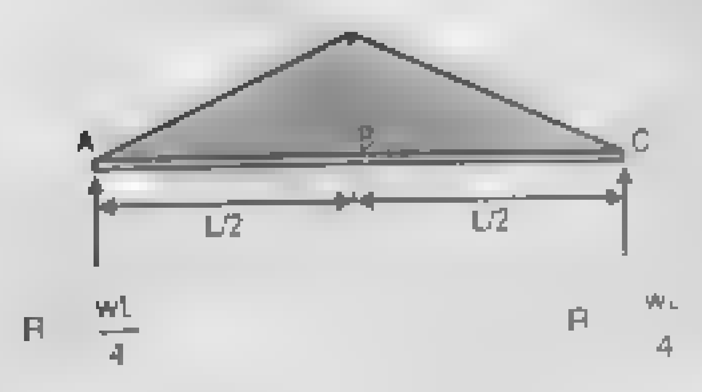
Resolución.

Hallando las reacciones R_1 y R_2 por las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_y\quad 0\quad R_1 + R_2\ \frac{wL}{2}$$

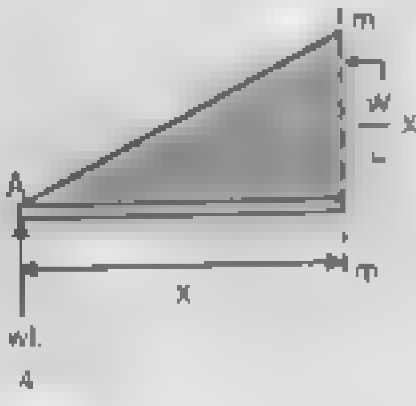
Por la simetría del sistema. $R_1 = R_2$, así: $\quad R_1 = \frac{wL}{4} = R_2$

Hallando los momentos flectores para los tramos respecto a la variable genérica "x"



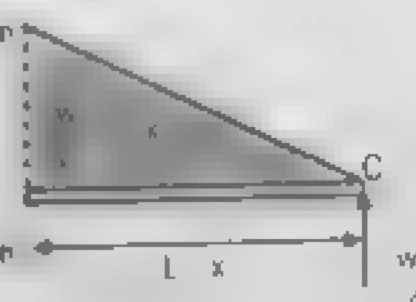
Tramo AB $\quad x\ \ 0\ L\ 2$

$$M_{mm} = \frac{wL}{4}x\quad \frac{w}{L}x\quad \frac{x}{3}$$

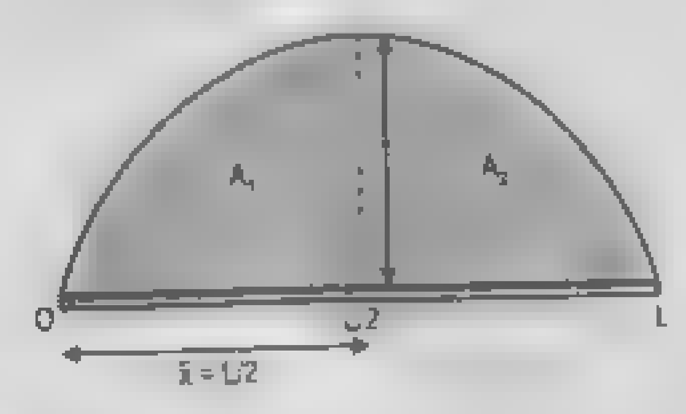


Tramo BC $\quad x\ \ 0\ L\ 2$

$$M_{nn}\quad \frac{wL}{4}x\quad \frac{w(L}{L}\quad \frac{x}{3}^3$$

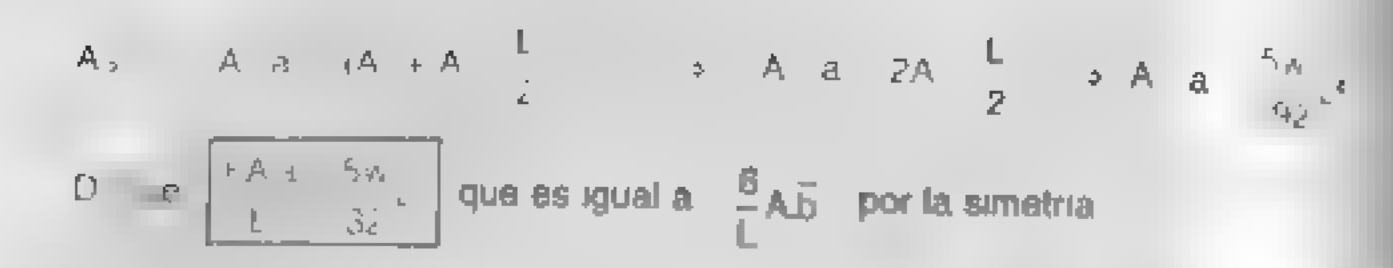


Graficando el área de momentos



Por la simetría de la gráfica

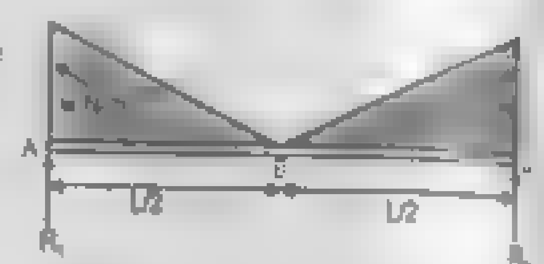
$$A_1\quad A_2\ \int_0^{L/2}\frac{wLx}{4}\quad \frac{wx^3}{3L}\ dx \quad \Rightarrow \quad A_1\quad A_2 = \frac{5wL^3}{192}$$



$A_3 \ldots A\,a \ldots (A + A)\frac{L}{2} \Rightarrow A\,a \ldots 2A\frac{L}{2} \Rightarrow A\,a \ldots \frac{5w}{92}L^4$

Donde $\boxed{\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{5w}{32}L}$ que es igual a $\frac{6}{L}A\bar{b}$ por la simetría

804 Véase figura. Comprobar el resultado mediante una superposición del caso 2 de la tabla 8-1 y del problema 803.

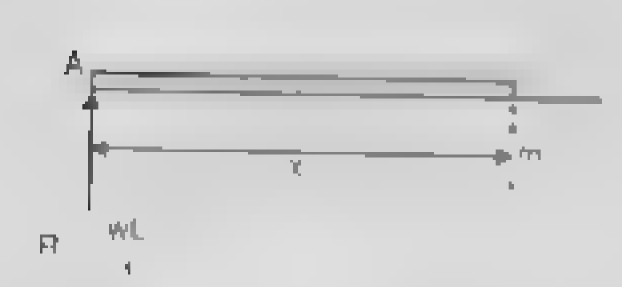


Resolución:

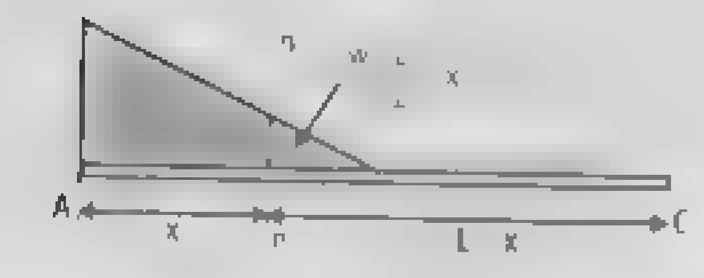
Por la simetría. $R_1 = R_2$

$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - \frac{wL}{2} \Rightarrow R_1 = R_2 = \frac{wL}{4}$

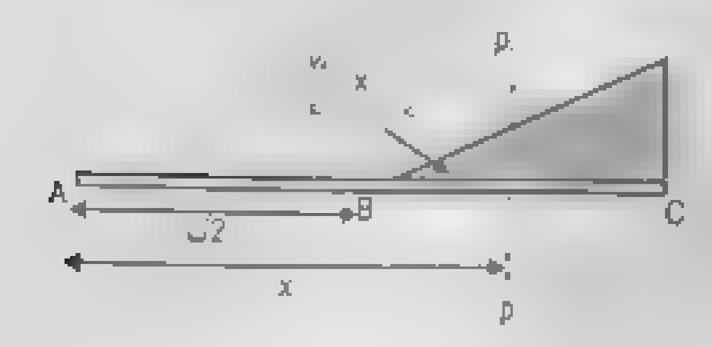
Hallando los momentos flectores:



Así: $M_{mm'} = \frac{wL}{4}x\ ;\ x \in \langle 0;L/2 \rangle$



$M_{nn'} = \frac{w}{3L}\left(\frac{L}{2} - x\right)^3 \quad x \in \langle 0; L/2 \rangle$

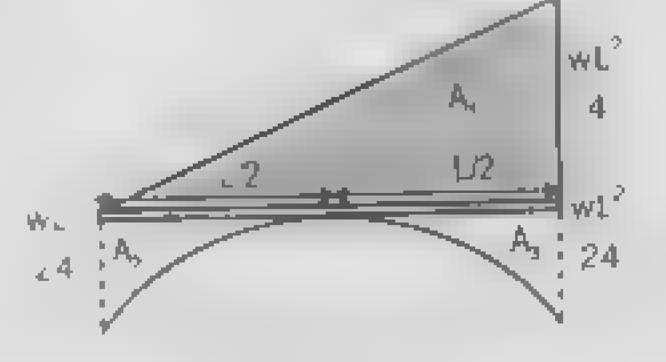


$M_{pp'} = \frac{w}{3L}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 ;\ x \in \left\langle \frac{L}{2}; L \right\rangle$

Hallando la gráfica de momentos:

$A_1 = \frac{wL^3}{8}$

$A_2 = A_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{24}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^3}{192}$



Los brazos de momentos son:

- Para A_1: $\bar{a}_1 = \frac{2}{3}(L)$
- Para A_2: $\bar{a}_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{L}{10}$
- Para A_3: $\bar{a}_3 = L - \frac{L}{10} = \frac{9L}{10}$

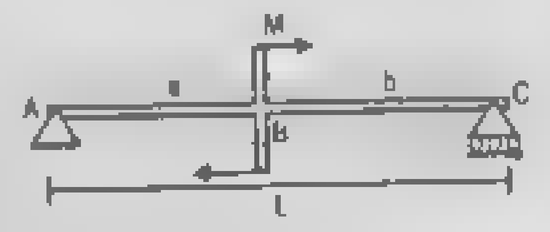
Así: $A\bar{a} = \Sigma A\bar{a} = A_1\bar{a}_1 - A_2\bar{a}_2 - A_3\bar{a}_3$

Es decir: $A\bar{a} = \frac{wL^3}{8}\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{wL^3}{192}\left(\frac{L}{10}\right) - \frac{wL^3}{192}\left(L - \frac{L}{10}\right)$

$A\bar{a} = \frac{2}{24}wL^4 - \frac{wL^4}{192} = \frac{5}{64}wL^4$

Luego: $\boxed{\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{15}{32}wL^3}$

805 Véase figura. El apoyo sobre rodillos puede soportar reacciones tanto hacia abajo como hacia arriba.



Resolución

Hallando las reacciones R_1 y R_2 de:

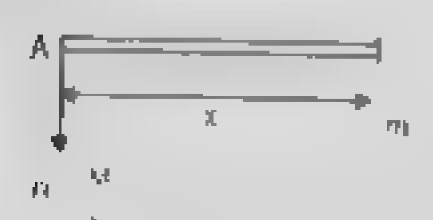
$\Sigma F_y = 0 \quad R_1 = R_2$

$\Sigma M_A = 0 = R_2(L) - M$

Por lo tanto tenemos. $R_1 = R_2 = \frac{M}{L}$ ... (1)

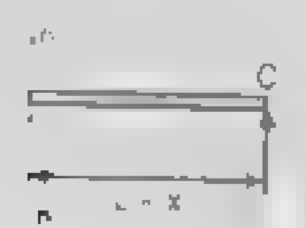
Hallando los momentos flectores

Tramo AB , $x \in (0,a)$



$M_{mm'} = -\frac{M}{L}x$ ... (2)

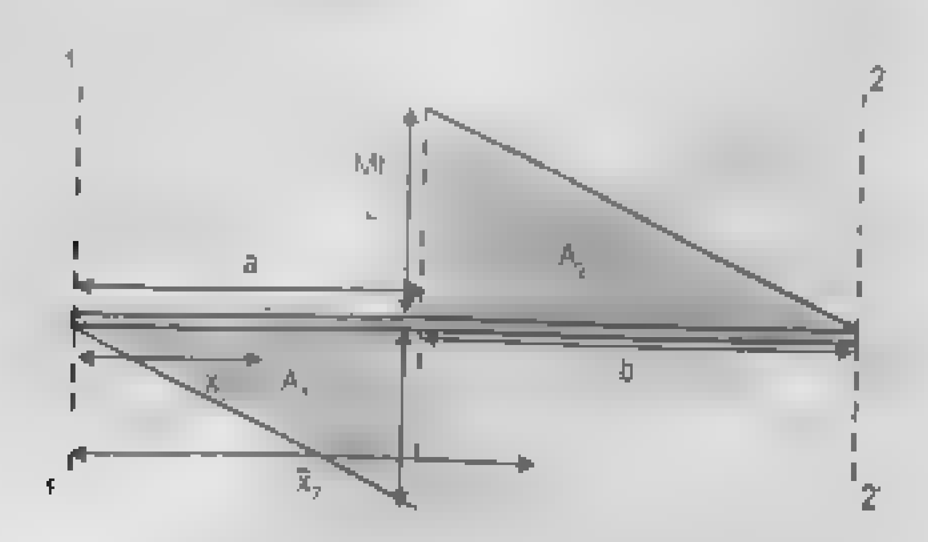
Tramo BC ; $x \in (a,L)$



$M_{mm'} = \frac{M}{L}(L - x)$ ...(3)

Hemos tomado el brazo de momentos respecto al punto C para facilitar los cálculos

Graficando el área de momentos



Como $A_1 = \frac{Ma^2}{2L} \wedge A_2 = \frac{Mb^2}{2L}$

Respecto al eje 1-1': $\bar{x}_1 = 2\frac{a}{3} \wedge \bar{x}_2 = a + \frac{b}{3}$

Respecto al eje 2-2': $\bar{x}_1 = b + \frac{a}{3}$ $\bar{x}_2 = \frac{2b}{3}$

Hallando $A\,\bar{a} = A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2$, respecto al eje 1-1'.

$A\,\bar{b} = A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2$, respecto al eje 2-2'

Así $A.\bar{a} = -\frac{Ma^2}{2L}\left(\frac{2a}{3}\right) + \frac{Mb^2}{2L}\left(a + \frac{b}{3}\right)$

$A.\bar{a} = \frac{M(a+b)}{6L}((a+b)^2 - 3a^2)$

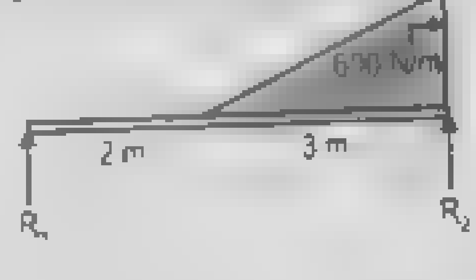
$A\,\bar{a} = \frac{M(a+b)}{6L}(L^2 - 3a^2)$; como $L = a + b$

Donde

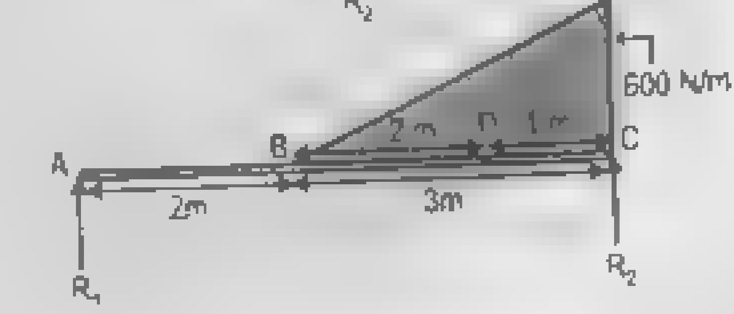
Del mismo modo $A\,\bar{b} = -\frac{Ma^2}{2L}\left(b + \frac{a}{3}\right) + \frac{Mb^2}{2L}\left(\frac{2b}{3}\right)$

Factorizando y ordenando

R06 Vease figura



Resolución:
Del diagrama del cuerpo libre



Por las ecuaciones de la estática:

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - 900 \qquad (1)$$

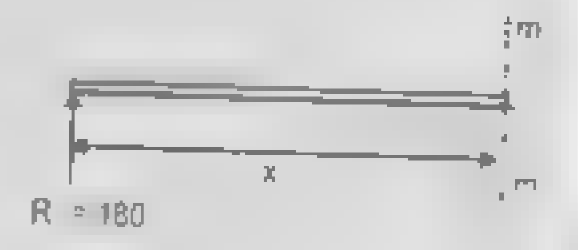
$$\Sigma M_D \quad 0 = 4R_1 - R_2 \qquad ...(2)$$

Resolviendo $R_1 = 180$ N y $R_2 = 720$ N

Hallando los momentos flectores por partes:

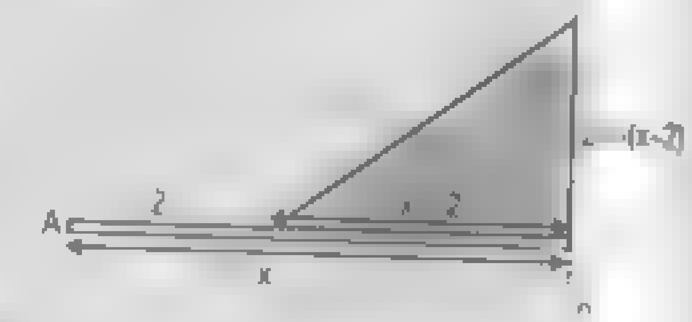
- Para $R_1 = 180$ N

$M_{mm} = 180x \;;\; x \in \langle 0;5 \rangle$

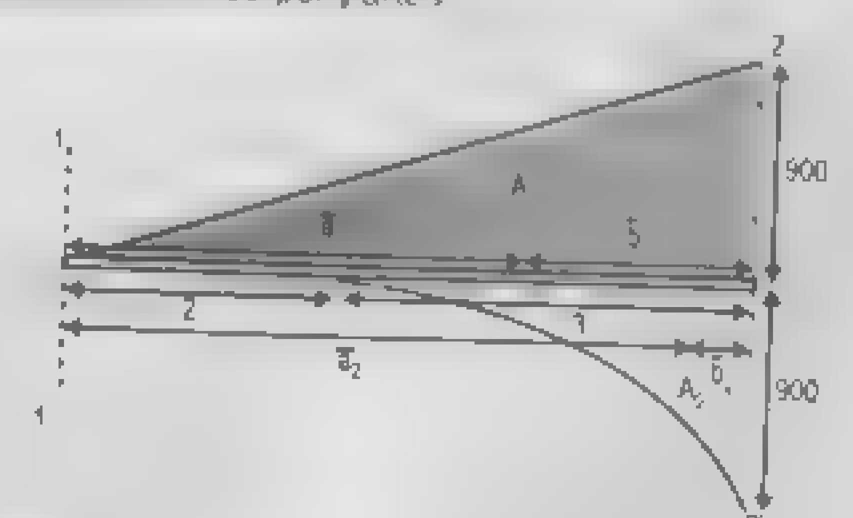


- Para la carga continua

$M_{nn} = \frac{100}{3}(x-2) \quad x \in \langle 2;5 \rangle$



Graficando los momentos por partes



Donde

$A = 2250 \qquad L = 5 \qquad A_2 = 675$

$a_1 = \frac{10}{3} \qquad a_2 = \frac{22}{5} \qquad b = \frac{5}{3} \qquad b_2 = \frac{3}{5}$

Luego: $A\,\bar{a} = 2250\left(\frac{10}{3}\right) - 675\left(\frac{22}{5}\right) \Rightarrow A\,\bar{a} = 4530$

$$\frac{6}{5}A\,\bar{a} = \frac{6}{5}(4530) \Rightarrow \frac{6}{L}A\,\bar{a} = 5436 \text{ N.m}^2$$

También $A\,\bar{b} = 2250\left(\frac{5}{3}\right) - 675\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow A\,\bar{b} = 3345$

$$\frac{6}{5}A\,\bar{b} = \frac{6}{5}(3345) \Rightarrow \frac{6}{L}A\,\bar{b} = 4014 \text{ N.m}^2$$

807 Véase figura. Resolverlo por superposición de los casos de los problemas 805 y 806

Resolución

Por la superposición de cargas tenemos

- Por el par de fuerzas

Del problema (805)

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = -\frac{500}{5}(3(1)^2 - 5^2) = 2200 \text{ N.m}^2$$

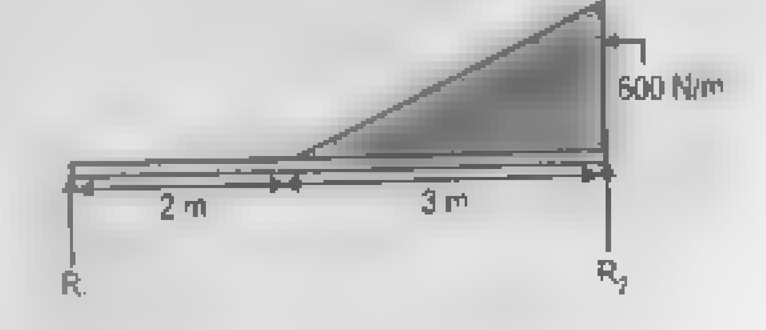
$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{500}{5}(3(4)^2 - 5^2) = 2300 \text{ N.m}^2$$

- Para la carga continua

Del problema 806

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = 5436 \text{ N.m}^2$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = 4014 \text{ N.m}^2$$



Sumando las expresiones respectivas para los ejes "a" o "b" hallamos la expresión respecto a la superposición

$$\Sigma\frac{6A.\bar{a}}{L}=(2200+5436) \Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{6A.\bar{a}}{L}=7636\ N.m^2}$$

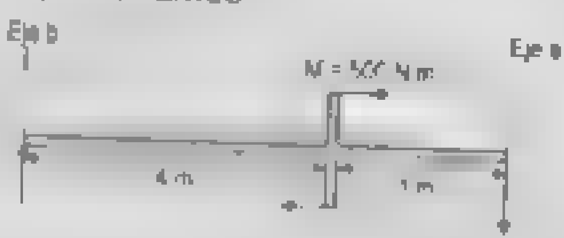
$$\Sigma\frac{6A\bar{b}}{L}=(2300+4014) \Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{6A\bar{b}}{L}=6314\ N\ m^2}$$

808 Resolver el problema anterior si el par se aplica en sentido inverso

Resolución

Para el par invertido tendríamos

Si lo volvemos a invertir, tendríamos



Considerando la aplicación del caso 7 tenemos

$$\frac{6A\bar{b}}{L}=\frac{500}{5}(3(4)^2-5^2)=2300\ N.m^2$$

$$\frac{6A\bar{a}}{L}=\frac{500}{5}(3(1)^2-5^2)=-2200\ N.m^2$$

Como los valores para la carga continua se mantienen, tenemos:

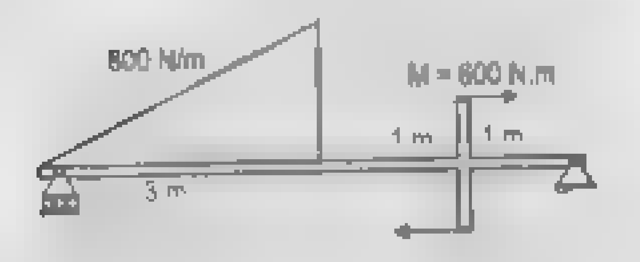
$$\frac{6A.\bar{a}}{L}=5436\ N.m^2 \quad y \quad \frac{6A.\bar{b}}{L}=4014\ N.m^2$$

Así, para la superposición

$$\Sigma\frac{6A\bar{a}}{L}=(-2200+5436) \Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{6A\bar{a}}{L}=3236\ N.m^2}$$

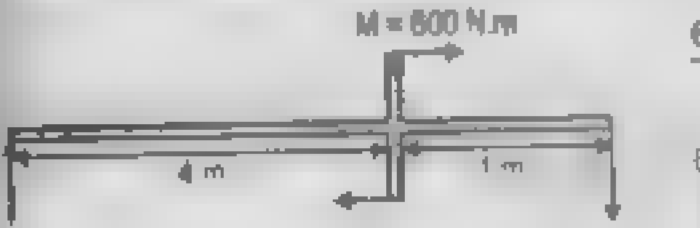
$$\Sigma\frac{6A\bar{b}}{L}=(-2300+4014) \Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{6A\bar{b}}{L}=1714\ N.m^2}$$

809 Vease figura



Resolución

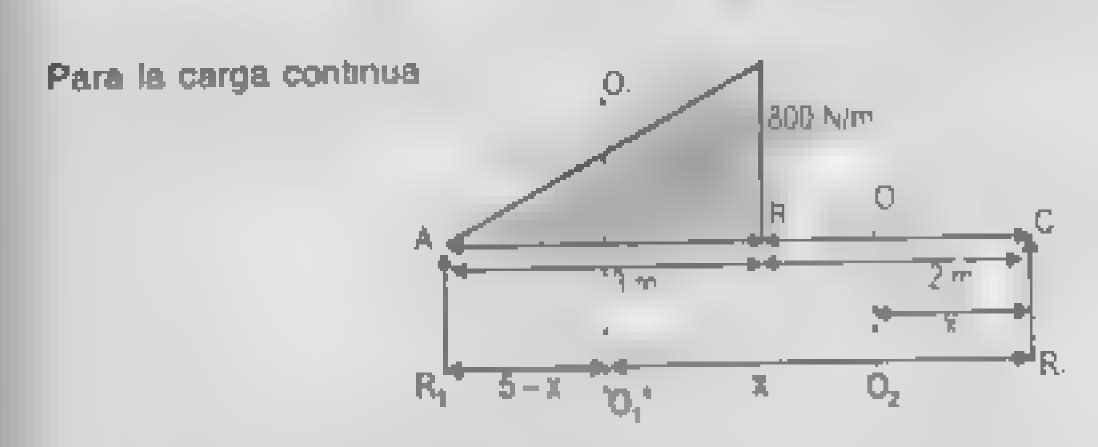
Hallando la relación $6\bar{A}\bar{a}/L$ para cada carga



$$\frac{6A.\bar{a}}{L}=\frac{-600}{5}(3(4)^2-5^2)=-2760\ N.m^2$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L}=\frac{600}{5}(3(1)^2-5^2)=-2640\ N.m^2$$

Para la carga continua



Por las ecuaciones de la estática

$$\Sigma F_y=0=R_1+R_2-1200 \qquad ...(1)$$

$$\Sigma M_A=0=5R_2-1200(2) \qquad ...(2)$$

Resolviendo $R_2=480\ N$; $R_1=720\ N$

Tomando los momentos flectores de derecha a izquierda

$$M_{O_2O_2'}=R_2x=720x\ ;\ x\in(0;5)$$

$$M_{O_1\text{-}O_1}=\frac{400}{9}(5-x)^3\ ;\ x\in(2;5)$$

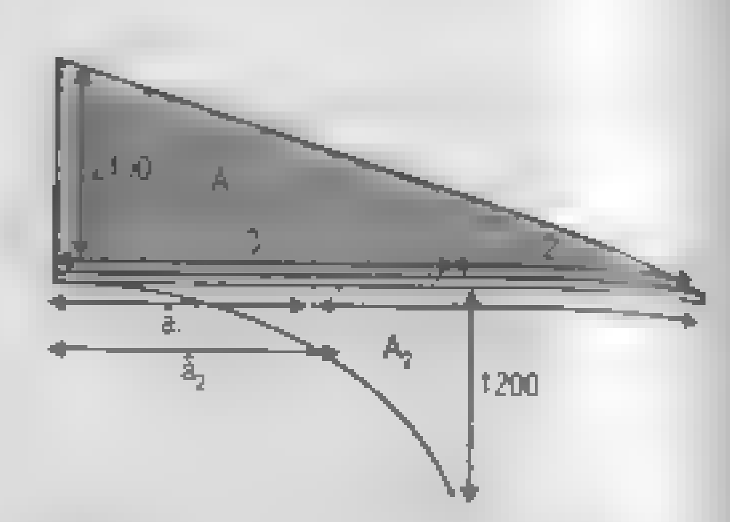
Graficando el área de momentos por partes

$A_1=1200(5)=6000$

$A_2 = \frac{1}{4}(3)(1200) = 900$

$\bar{a}_1 = \frac{1}{3}(5) = \frac{5}{3}$

$\bar{a}_2 = \frac{4}{5}(3) = \frac{12}{5}$



Para hallar los brazos por el lado derecho, hay que restar de la longitud total:

$b_1 = 5 - a_1 = \frac{10}{3}$ $\qquad$ $b_2 = 5 - a_2 = \frac{13}{5}$

Así: $\quad A\bar{a} = A_1\bar{a}_1 - A_2\bar{a}_2 \Rightarrow A\bar{a} = 6000\left(\frac{5}{3}\right) - 900\left(\frac{12}{5}\right) = 7840$

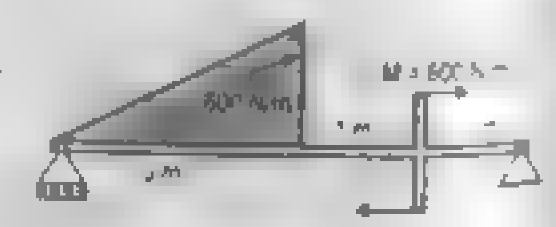
Luego: $\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6}{5}(7840) = 9408\ N.m^2$

Para la superposición de las cargas:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = (9408 - 2760) \Rightarrow \boxed{\frac{6A\bar{a}}{L} = 6648\ Nm^2}$$

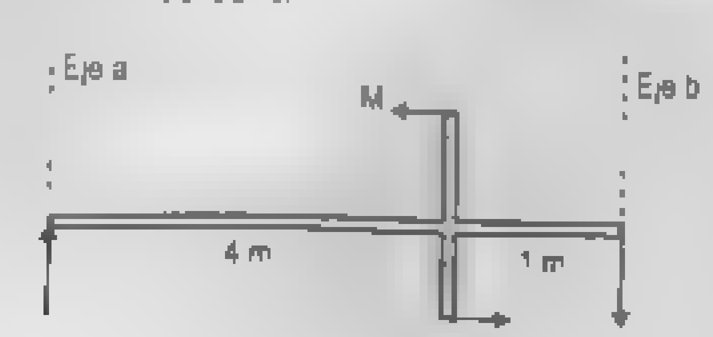
Del mismo modo: $\boxed{\frac{6A\bar{b}}{L} = 18\,768\ N\,m^2}$

810. Resolver el problema anterior si el par se aplica en sentido contrario al del reloj.

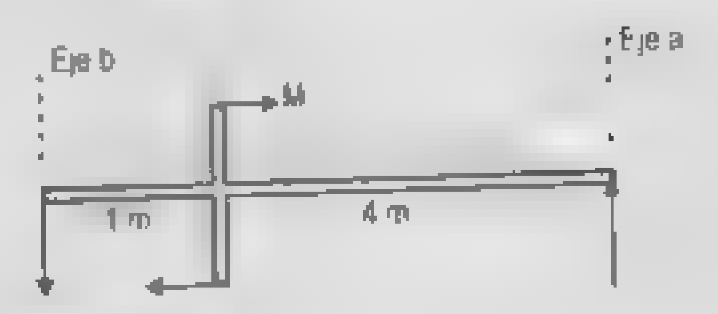


Resolución:

El par de fuerzas invertido sería



Vista de otra óptica tendríamos.



Así, (respecto al eje b)

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = -\frac{M}{5}(3(1)^2 - 5^2) = \frac{600}{5}(22) \Rightarrow \frac{6A\bar{b}}{L} = 2640\ N\,m^2$$

Respecto al eje a

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{600}{5}(3(4)^2 - 5^2) = 2760\ Nm^2$$

Observamos que los signos se han invertido del resultado anterior.

Como la carga continua no está modificada, tiene el mismo valor del problema 809, así:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = 9408\ Nm^2 \quad ; \quad \frac{6A\bar{b}}{L} = 21\,192\ N.m^2$$

Como son cargas superpuestas se suman miembro a miembro:

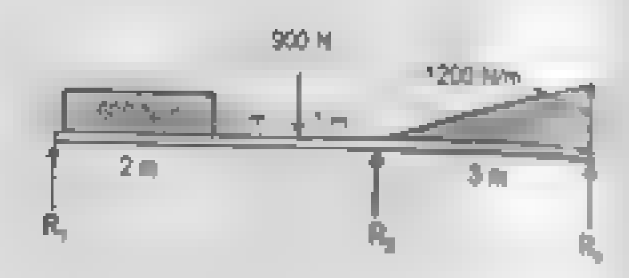
$$\frac{6A\bar{a}}{L} = (9408 + 2760) \Rightarrow \boxed{\frac{6A\bar{a}}{L} = 12\,168\ Nm^2}$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = (21\,192 + 2640) \Rightarrow \boxed{\frac{6A\bar{b}}{L} = 23\,832\ Nm^2}$$

811 - 812: problemas ilustrativos

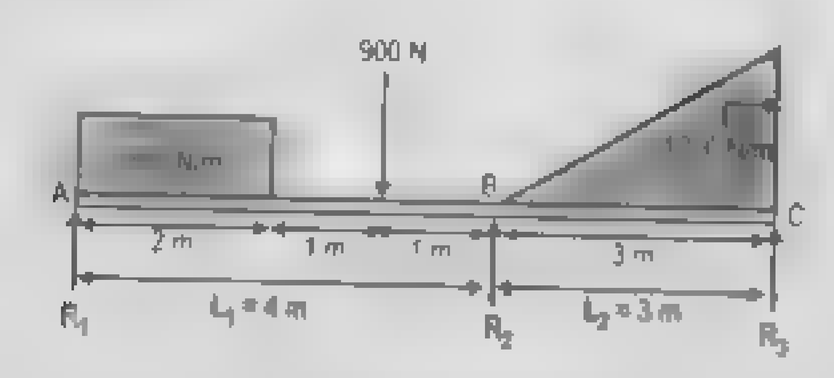
Si no se indica lo contrario, las vigas continuas de los problemas siguientes tienen sus apoyos sobre cimentaciones rígidas y están al mismo nivel. En cada problema determinar los momentos de continuidad en los apoyos.

813 Vease figura



Resolucion:

Hallar los momentos en



Aplicando el teorema de los tres momentos a los tramos A B y B C

$$L_1 M_A + 2(L_1 + L_2) M_B + L_2 M_C = -\frac{6A\bar{a}}{L_1} - \frac{6A\bar{b}}{L_2}$$

Por la definición de momento flexionante M_A y M_C son nulos; es decir

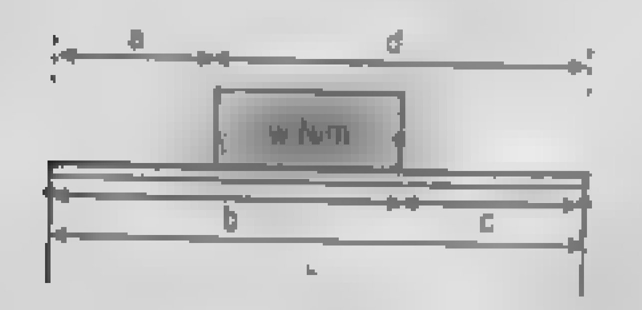
$$M_A = M_C = 0$$

Así la ecuación queda reducida a

$$2(4 + 3)\, M_B = -\frac{6A\bar{a}}{L_1} - \frac{6A\bar{b}}{L_2} \quad \ldots (1)$$

Para el tramo A-B tenemos la superposición de dos cargas:

De la carga continua, aplicamos el caso 5



donde

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{w}{4L}\left(b^2(2L^2 - b^2) - a^2(2L^2 - a^2)\right)$$

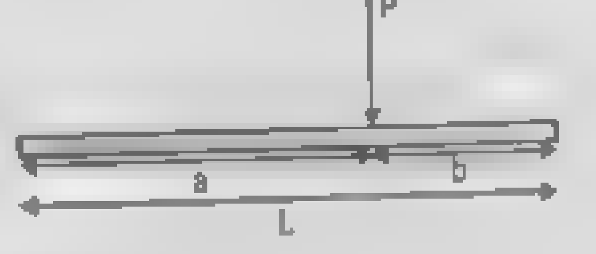
Para el problema: $w = 600$ N/m , $L = 4$ m

$a = 0$; $d = 4$ m; $b = 2$ m ; $c = 2$ m

Así para la carga continua

$$\frac{6A\bar{a}_1}{L_1} = \frac{600}{4(4)}\left(2^2(2\cdot 4^2 - 2^2) - 0\right) = 4200 \text{ N m}^2$$

Para la carga puntual aplicamos el caso 1.



donde: $\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2)$

Para el problema: $P = 900$ N , $a = 3$ m , $b = 1$ m , $L = 4$ m

Así para la carga continua

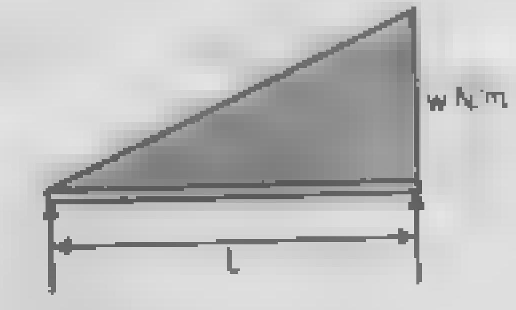
$$\frac{6A\bar{a}_2}{L_1} = \frac{900 \cdot 3}{4}(4^2 - 3^2) = 4725 \text{ N m}^2$$

Por la superposición de cargas

$$\frac{6A\bar{a}}{L_1} = \sum_{i=1}^{2} \frac{6A\bar{a}_i}{L_1}$$

$$\frac{6A\bar{a}}{L_1} = \frac{6A\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A\bar{a}_2}{L_1} = 8925 \text{ N m}^2 \quad \ldots (2)$$

Para el tramo B-C solo hay una carga **ahí aplicamos el caso 3:**



donde $\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{7}{60} wL^3$

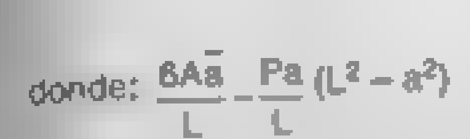
Para el problema $w = 1200$ N/m

$L = 3$ m

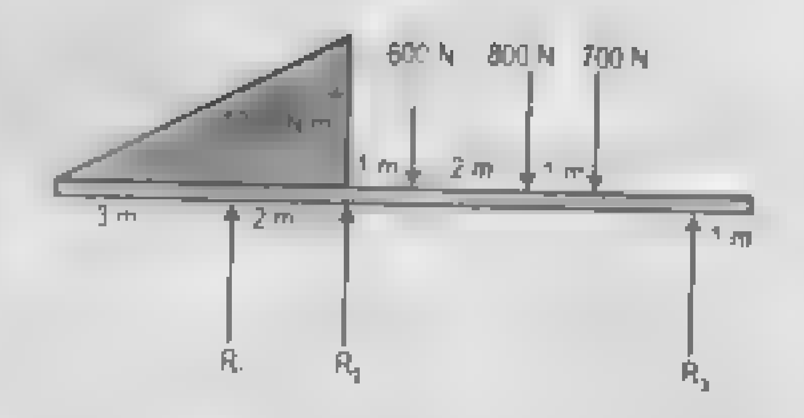
Por lo tanto: $\frac{6A\bar{b}}{L_2} = \frac{7}{60}(1200)(3)^3 = 3780 \text{ N.m}^2 \quad \ldots (3)$

Llevando (2) y (3) a la ecuación (1)

$$14\, M_B = -8925 - 3780 \;\Rightarrow\; \boxed{M_B = -907.5 \text{ N m}}$$

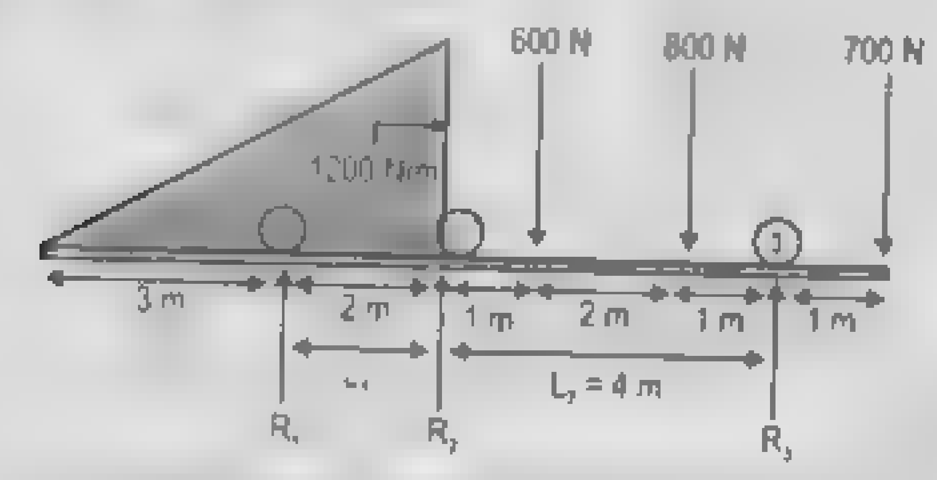


814. Véase figura



Resolución:

Hallar los momentos en los puntos de las reacciones:



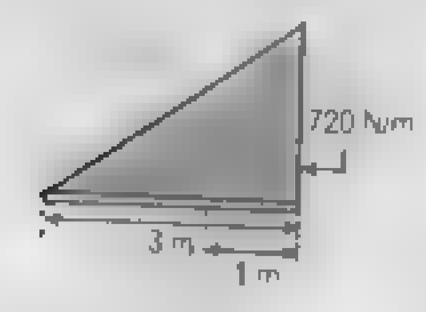
Por el teorema de los tres momentos en los tramos 1 2 y 2 3

$$L_1M_1 + 2(L_1 + L_2)M_2 + L_2M_3 = -\frac{6Aa}{L} - \frac{6Ab}{L_2}$$

Como $L_1 = 2$ m y $L_2 = 4$ m, entonces

$$2M_1 + 12M_2 + 4M_3 = -\frac{6Aa}{L} - \frac{6Ab}{L_2} \qquad (1)$$

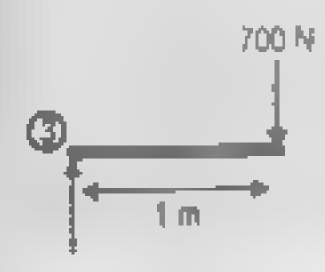
El momento flexionante en el apoyo (1) producido por la carga continua es



donde

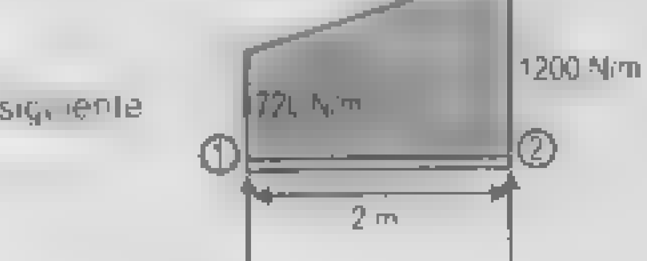
$$M = -\frac{(720)(3)}{2}(1) = -1080 \text{ N m} \qquad (2)$$

El momento flexionante en el apoyo (3) producido por la carga de 700 N es

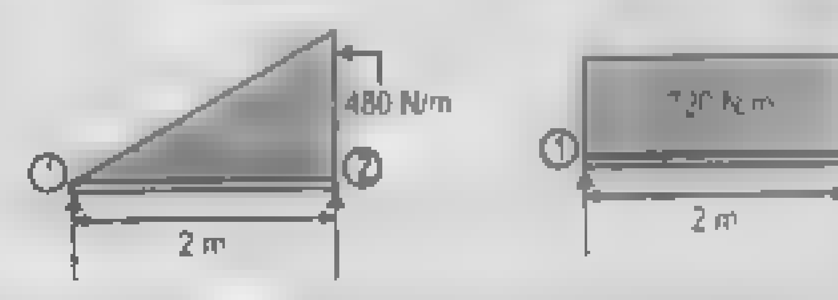


$$M_3 = -700(1) = -700 \text{ N m} \quad ...(3)$$

En el tramo 1 2 tenemos el siguiente diagrama de cargas:



Este diagrama es en realidad la superposición de dos cargas



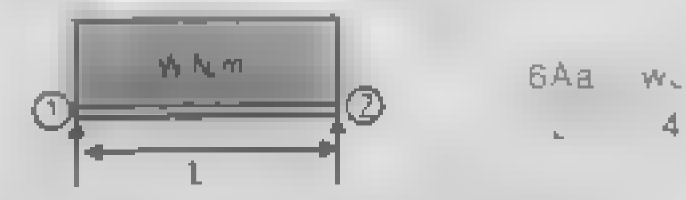
Para la primera parte tenemos en el **caso 3** (ver problema 813), donde

$$\frac{6Aa}{L} = \frac{8}{60}wL^3$$

Para el problema $L = 2$ m $w = 480$ N/m por tanto tenemos para la primera parte

$$\frac{6A\bar{a}_1}{L_1} = \frac{8}{60}(480)(2)^3 = 512 \text{ N.m}^2$$

Para la segunda parte estamos en el caso 2, donde



$$\frac{6Aa}{L} = \frac{wL^3}{4}$$

Para el problema: w = 720 N/m; L = 2 m, por tanto, tenemos

$$\frac{6A\bar{a}_2}{L_1} = \frac{(720)(2)^3}{4} = 1440 \text{ N m}^2$$

Para la superposición de ambas cargas tenemos.

$$\frac{6A\bar{a}}{L}\quad\frac{6A\bar{a}}{L}\quad\frac{6A\bar{a}_2}{L_1} = 1952\ N.m^2 \qquad (4$$

En el tramo 2-3 tenemos también una superposición de dos cargas concentradas. Utilizando el **caso 1** (ver problema 813)

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{Pb}{L}(L^2 - b^2)$$

- Para la primera carga: P = 600 N ; b = 3 m , L = 4 m

  Por lo tanto, tenemos: $\frac{6A\bar{b}_1}{L_2} = \frac{600(3)(4^2 - 3^2)}{4} = 3150\ N.m^2$

- Para la segunda carga P = 800 N ; b = 1 m , L = 4 m

  Así tenemos: $\frac{6A\bar{b}_2}{L_2} = \frac{800}{4}(1)(4^2 - 1^2) = 3000\ N.m^2$

Para la superposición de las cargas

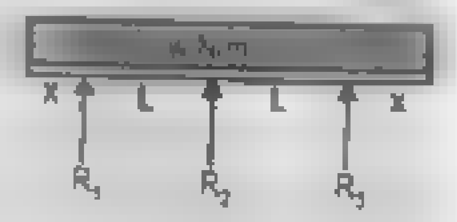
$$\frac{6A\bar{b}}{L_2} = \frac{6A\bar{b}_1}{L_2} + \frac{6A\bar{b}_2}{L_2} = 6150\ N.m^2 \qquad ...(5)$$

Llevando los resultados (2), (3), (4) y (5) a la ecuación (1):

$$2(-1080) + 12M_2 + 4(-700) = -(1952) - (6150)$$

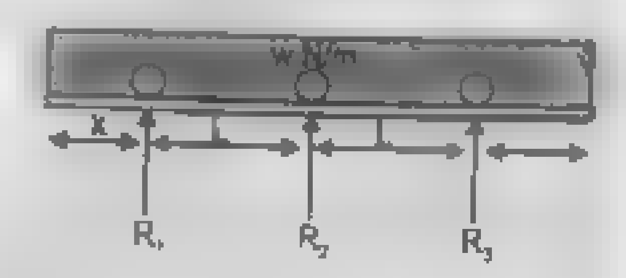
Operando $M_2 = \frac{3142}{12}$ ⇒ $\boxed{M_2 = 261.83\ N.m}$

815. Determinar las longitudes de los voladizos en la viga continua de la figura, de manera que los momentos en los tres apoyos sean iguales.



Resolución:

Hallar "x" , si $M_1 = M_2 = M_3$
Del sistema



Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1 2) y (2 3).

$$LM_1 + 2(2L)M_2 + LM_3 = -\left[\frac{6A\bar{a}}{L_1} + \frac{6A\bar{b}}{L_2}\right]$$

Por la condición de igualdad de momentos

$$6LM_1 = -\left[\frac{6A\bar{a}}{L} + \frac{6A\bar{b}}{L_2}\right] \qquad (1)$$

El momento flexionante en el apoyo (1)

Donde:

$$M_1 = -wx\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{wx^2}{2} \qquad ...(2)$$

Para el claro (1-2) estamos en el **caso 2**

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad (3)$$

Para el claro (2 3) es idéntico

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad (4)$$

Llevando los resultados (2), (3) y (4) a la ecuación (1)

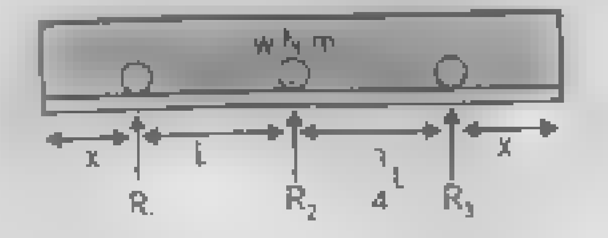
$$6L\left(\frac{-wx^2}{2}\right) = -\left[\frac{wL^3}{4} + \frac{wL^3}{4}\right]$$

donde: $x^2 = \frac{L^2}{6}$, así $\boxed{x = \frac{L}{\sqrt{6}}}$

816 Resolver el problema anterior si uno de los claros tiene una longitud de tres cuartas partes de la del otro

Resolución:

Hallar "x", si $M_1 = M_2 = M_3$ para el sistema.



Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-3)

$$LM_1 + 2\left(L+\frac{3}{4}L\right)M_2 + \frac{3}{4}L\,M_3 = -\left(6\frac{Aa}{L} + 6\frac{Ab}{L_2}\right)$$

Por la condición de igualdad de momentos

$$\frac{21}{4}LM \quad \frac{6Aa}{L} + \frac{6Ab}{L_2} \qquad (1)$$

Para el momento flexionante en el apoyo (1) ver problema 815)

$$M \quad \frac{wx^2}{2} \qquad (2)$$

Para el claro (1-2) por el **caso 2**:

$$\frac{6Aa}{L} \quad \frac{wL^3}{4} \qquad (3)$$

Para el claro (2-3) por el **caso 2**:

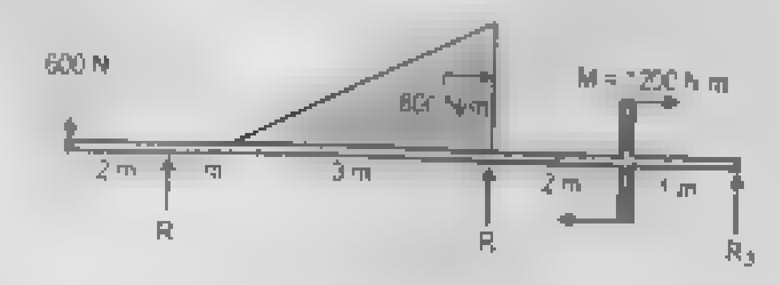
$$\frac{6A\bar{b}}{L_2} = \frac{w(3/4L)^3}{4} = \frac{27wL^3}{256} \qquad \ldots (4)$$

Llevando (2), (3) y (4) a la ecuación (1)

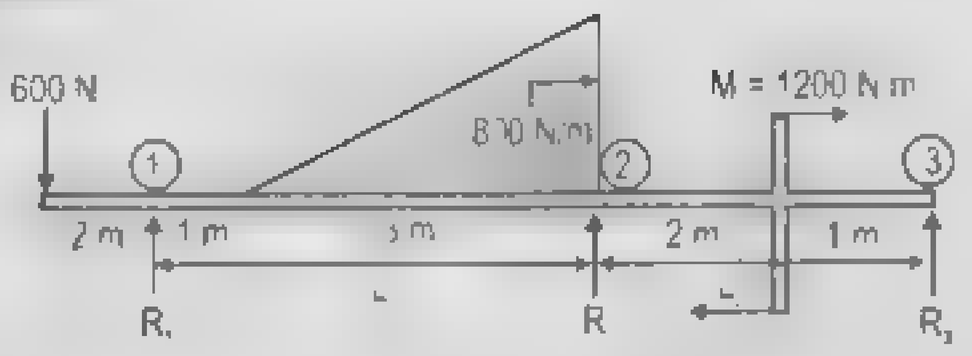
$$\frac{21}{4}L\left(-\frac{wx^2}{2}\right) = -\left(\frac{wL^3}{4} + \frac{27wL^3}{256}\right)$$

$$x^2 = \frac{13}{96}L^2 \quad ó \quad \boxed{x = \sqrt{\frac{13}{96}}L}$$

817. Véase figura.



Resolución



Por el teorema de los tres momentos para los claros (1-2) y (2-3)

$$4M_1 + 2(4+3)M_2 + 3M_3 = -\left(\frac{6Aa}{L_1} + \frac{6Ab}{L_2}\right)$$

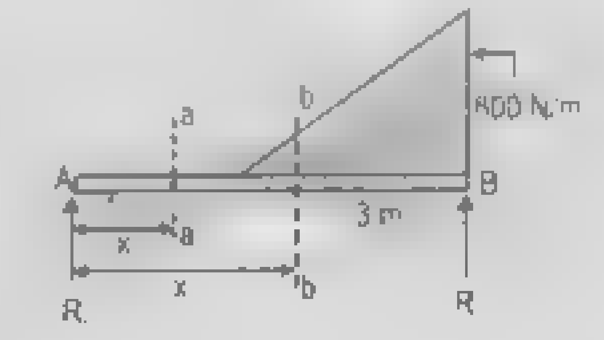
Así $\qquad 4M_1 + 14M_2 + 3M_3 \quad \frac{6Aa}{L} + \frac{6Ab}{L} \qquad (1)$

Por el momento flexionante en el apoyo (1) producido por la carga de 600 N

$$M_1 = -600\,(2) = -1200 \text{ N.m} \qquad \ldots (2)$$

Por definición de momentos: $\quad M_3 = 0 \quad \ldots (3)$

Para el claro (1-2)



Donde $\qquad \Sigma F_y = 0 \quad R_1 + R_2 = 1200 \qquad \ldots (\alpha)$

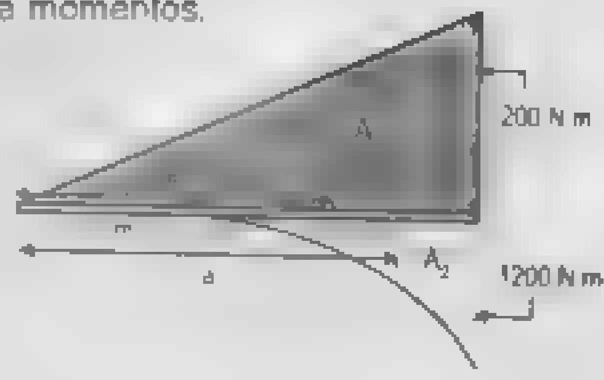
$\qquad \Sigma M_A = 0 = 4R_1 - 1200\,(1) \qquad \ldots (\beta)$

De (α) y (β) $R_1 = 300$ N y $R_2 = 900$ N

Hallando los momentos flectores por partes.

$$M_{aa'} = R_1x = 300x \;\; ; \; x \in \langle 0;4\rangle \quad , \quad M_{bb'} = -\frac{400}{9}(x-1)^3 \;\; ; \; x \in \langle 1;4\rangle$$

Hallando el área de momentos.



Donde: $A_1 = 2400\ N.m^2$; $\bar{a}_1 = \frac{2}{3}(4)$ m

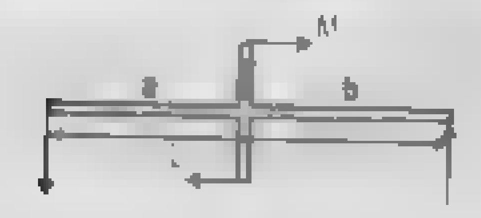
$A_2 = \frac{1}{4}(1200)(3)$ N m ; $\bar{a}_2 = 4 - \frac{1}{5}(3)$

Sumando: $A\bar{a} = A_1\bar{a}_1 - A_2\bar{a}_2$

$A\bar{a} = 2400\left(\frac{8}{3}\right) - (900)\left(\frac{17}{5}\right) = 3340\ N\ m^3$

Al final $\frac{6A\bar{a}}{L} = 3340\left(\frac{6}{4}\right) = 5010\ N\ m$ (4)

Para el claro (2-3) estamos en el **caso 7**



Donde $\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{M}{L}(3a^2 - L^2)$

$\frac{6A\bar{b}}{L} = -\frac{M}{L}(3b^2 - L^2)$

Para el problema. $M = 1200$ N m
$L = 3$ m
$b = 1$ m

Así $\frac{6A\bar{b}}{L_2} = \frac{1200}{3}(3(1)^2 - 3^2) = -2400\ N.m^2$ ...(5)

Llevando (2), (3), (4) y (5) a la ecuación (1)

$$4(-1200) + 14M_2 + 0 = -(5010 - 2400)$$

Reduciendo $\boxed{M_2 = +156.43\ N\ m}$

818 En el problema anterior determinar el valor del par M aplicado, de manera que el momento M_2 se anule

Resolución.

Del problema anterior se toman los resultados con la condición de que $M_2 = 0$ y hay que hallar el valor del momento M

Para el claro (2-3) (ver problema 817)

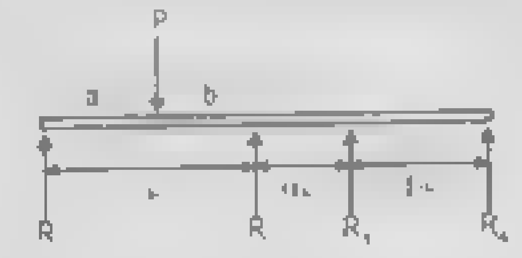
$$\frac{6A\bar{b}}{L_2} = \frac{M}{3}(3(1)^2 - 3^2) = -2M \qquad (5)'$$

Llevando este resultado a la ecuación (1) del problema anterior

$$4(-1200) + 0 + 0 = -(5010 - 2M)$$

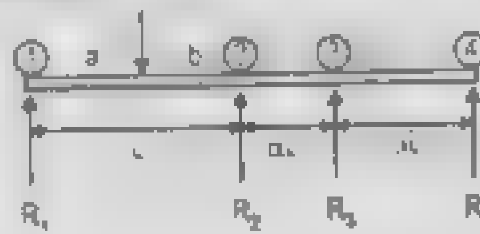
Donde $\boxed{M = +105\ N\ m}$ (en el sentido de las manecillas del reloj)

819 Véase la figura



Resolución

Hallar los momentos del sistema



En los claros (2-3) y (3-4) al no tener cargas de ningún valor, la expresión $A.\bar{a}$ o $A.\bar{b}$, es de valor nulo

En el claro (1-2) estamos en el **caso 1** (ver problema 813)

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2) \qquad ...(1)$$

Por el teorema de los tres momentos en los claros:

• (1-2) y (2-3)

$$LM_1 + 2(L + \alpha L)M_2 + \alpha LM_3 = -\frac{Pa}{L}(L^2 - a^2) \qquad (2)$$

• (2-3) y (3-4): $\alpha LM_2 + 2(\alpha L + \beta L)M_3 + \beta LM_4 = 0$ (3)

Por la definición de momentos

$$M_1 = M_4 = 0 \quad (4)$$

(2), (3), (4) nos da el sistema

$$\begin{cases} 2L(1+\alpha)M_2 + \alpha LM_3 = -\frac{Pa}{L}(L^2 - a^2) \\ \alpha M_2 + 2(\alpha+\beta)M_3 = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es

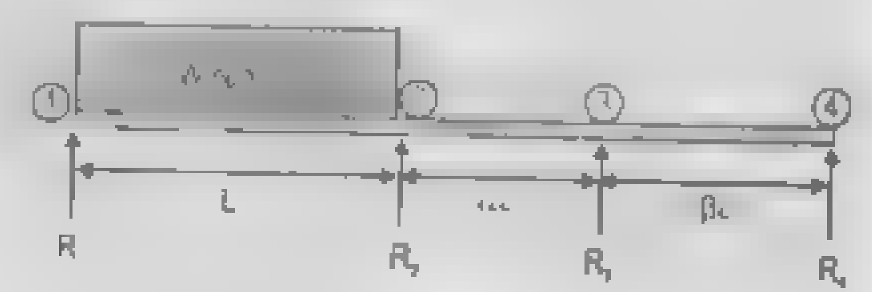
$$M_2 = -\frac{Pa}{L^2}(L^2 - a^2)\,\frac{2(\alpha+\beta)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$$

$$M_3 = \frac{Pa}{L^2}(L^2 - a^2)\,\frac{\alpha}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$$

820 **Resolver el problema anterior si la carga concentrada se sustituye por una uniformemente repartida sobre el primer claro de w N/m**

Resolución:

Hallar los momentos para el sistema



Los resultados del problema anterior se mantienen, salvo en el claro (1-2) donde por el **caso 2**, (ver problema 814)

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4} \quad (1)'$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2) del problema anterior nos da el siguiente sistema

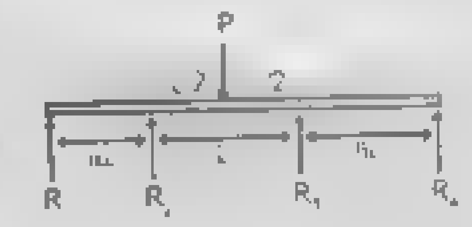
$$\begin{cases} 2(1+\alpha)M_2 + \alpha M_3 = -\frac{wL^2}{4} \\ \alpha M_2 + 2(\alpha+\beta)M_3 = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es

$$M_2 = \frac{-wL^2}{4}\,\frac{2(\alpha+\beta)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$$

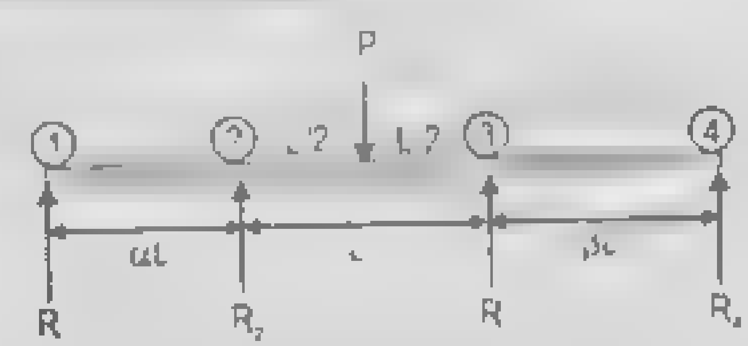
$$M_3 = \frac{wL^2}{4}\,\frac{\alpha}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$$

821 Véase figura



Resolución

Hallar los momentos para el sistema



Por definición de momentos, $M_1 = M_4 = 0$ (1)

Por ausencia de cargas el valor de $A\bar{a}$ y $A\bar{b}$, en los claros (1-2) y (3-4), son nulos

En el claro (2-3), tenemos el **caso 1** donde $a = b = L/2$

Así
$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2)$$

Luego
$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{P(L/2)}{L}(L^2 - L^2/4)$$

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{3}{8}PL^2 \quad (2)$$

Aplicando el teorema de los tres momentos

• Claros (1-2) y (2-3)

$$\alpha LM_1 + 2(\alpha L + L)M_2 + LM_3 = 0 - \frac{6A\bar{b}}{L} \quad (3)$$

- Claros (2-3) y (3-4)

$$LM_2 + 2(L + \beta L) M_3 + \beta L M_4 = -\frac{6A\bar{a}}{L} = 0 \qquad (4)$$

De (1), (2), (3) y (4) nos da el siguiente sistema de ecuaciones

$$2(1+\alpha)M_2 + M_3 = -\frac{3}{8}PL$$

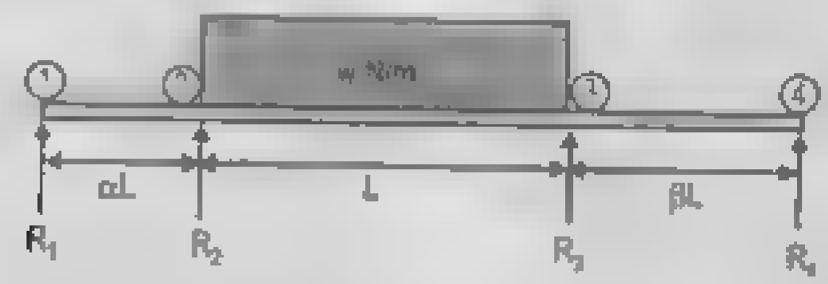
$$M_2 + 2(1+\beta)M_3 = -\frac{3}{8}PL$$

Resolviendo $\boxed{M_2 = -\frac{3}{8}PL\frac{1+2\beta}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}}$; $\boxed{M_3 = -\frac{3}{8}PL\frac{1+2\alpha}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}}$

822 Resolver el problema anterior si la carga concentrada P se sustituye por una uniformemente distribuida de w N/m sobre el claro central

Resolución:

Calcular los momentos para el sistema



El claro (2-3) por el **caso 2** (ver problema 814)

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad ...(2)'$$

Los demás cálculos son los mismos que las del problema anterior

Llevando (2)' a las ecuaciones (3) y (4) del problema anterior

$$2(1+\alpha)M_2 + M_3 = -\frac{wL^2}{4}$$

$$M_2 + 2(1+\beta)M_3 = -\frac{wL^2}{4}$$

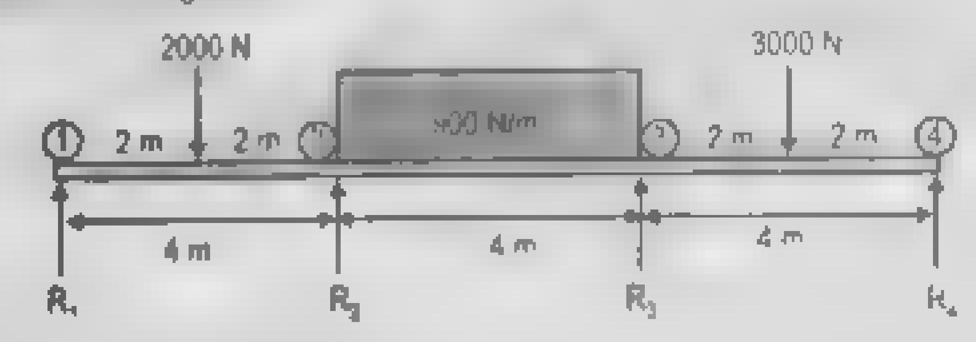
Resolviendo.

$\boxed{M_2 = -\frac{wL^2}{4}\frac{1+2\beta}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}}$ $\boxed{M_3 = -\frac{wL^2}{4}\frac{1+2\alpha}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}}$

823 **Se tiene una viga continua simplemente apoyada sobre tres claros de 4 m que soporta una carga concentrada de 2 kN en el centro del primer claro, otra concentrada de 3 kN en el centro del tercero y una uniformemente distribuida de 900 N/m sobre el tramo central. Determinar los momentos en los apoyos y confrontar el resultado utilizando las soluciones de los problemas 819 y 822**

Resolución:

El sistema de cargas es



Para el claro (1-2), por el caso 1.

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{2000}{4}(2)(4^2 - 2^2) = 12\,000 \text{ N m}^2 \qquad (1)$$

Para el claro (2-3), por el caso 2:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{900}{4}(4)^3 = 14\,400 \text{ N m}^2 \qquad (2)$$

Para el claro (3-4), por el caso 1:

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{3000}{4}(2)(4^2 - 2^2) = 18\,000 \text{ N m}^2 \qquad (3)$$

Por la definición de momentos.

$$M_1 = M_4 = 0 \qquad (4)$$

Por el teorema de los tres momentos en:

- **Claros (1-2) y (2-3)**

$$4M_1 + 2(8)M_2 + 4M_3 = -\frac{6A\bar{a}}{L} - \frac{6A\bar{b}}{L} \qquad (5)$$

- Claros (2-3) y (3-4)

$$4M_2 + 2(8)M_3 + 4M_4 = -\left(\frac{6A\bar{a}}{L} + \frac{6A\bar{b}}{L}\right) \qquad (6$$

De (1), (2), (3), (4) en (5) y (6)

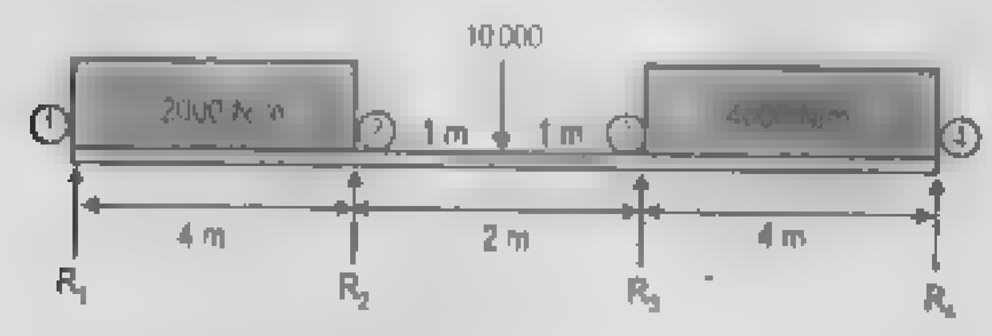
$$16M_2 + 4M_3 = -(12\,000 + 14\,400)$$
$$4M_2 + 16M_3 = -(14\,400 + 18\,000)$$

Resolviendo $\boxed{M = 1\,220 \text{ N m}}$ $\boxed{M = 172[illegible] \text{ N m}}$

824 El primer claro de una viga continua sobre cuatro apoyos tiene 4 m de longitud, el segundo 2 m y el tercero 4 m. Sobre el primero actúa una carga uniformemente distribuida de 2 kN/m y sobre el tercero otra distribuida de 4 kN/m. En el centro del segundo claro se aplica una carga concentrada de 10 kN. Determinar los momentos de continuidad en los apoyos teniendo en cuenta los resultados de los problemas 820 y 821

Resolución.

El sistema de cargas es



Para el claro (1-2), por el caso 2

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{2000(4)^3}{4} = 32\,000 \text{ N.m}^2 \qquad ...(1)$$

Para el claro (2-3), por el caso 1:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} \quad \frac{6A\bar{b}}{L} \quad \frac{10\,000}{2}(1)(2^2 - 1^2) = 15\,000 \text{ N.m}^2 \qquad (2)$$

Para el claro (3-4), por el caso 2.

$$\frac{6A\bar{b}}{L} \quad \frac{4000}{4}(4)^3 = 64\,000 \text{ N.m}^2 \qquad ...(3)$$

Por definición de momentos: $M_1 = M_4 = 0$ (4)

Por el teorema de los tres momentos en:

- Claros (1-2) y (2-3)

$$4M_1 + 12M_2 + 2M_3 = -\left(\frac{6A\bar{a}}{L} + \frac{6A\bar{b}}{L}\right) \qquad ...(5)$$

- Claros (2-3) y (3-4)

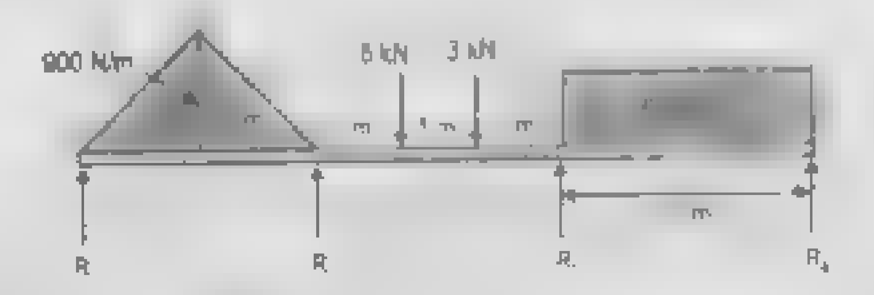
$$2M_2 + 12M_3 + 4M_4 = -\left(\frac{6A\bar{a}}{L} + \frac{6A\bar{b}}{L}\right) \qquad ..(6)$$

Llevando (1), (2), (3) y (4) en (5) y (6)

$$\begin{cases} 12M_2 + 2M_3 = -(32\,000 + 15\,000) \\ 2M_2 + 12M_3 = -(15\,000 + 64\,000) \end{cases}$$

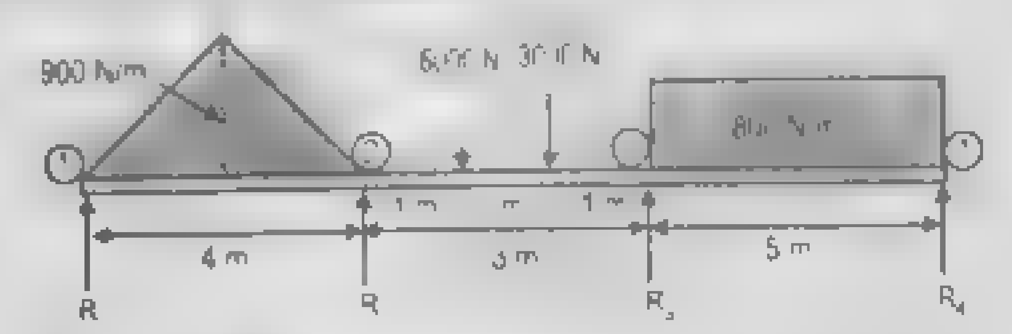
Resolviendo $\boxed{M_1 = -2900 \text{ N m}}$; $\boxed{M_3 = -6100 \text{ N m}}$

825 Véase figura

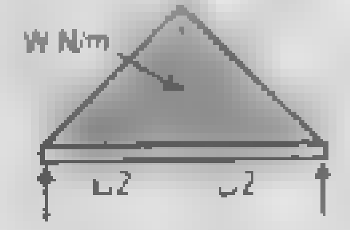


Resolución

Hallar los momentos del sistema



Para el claro (1-2), por el caso 6:



donde

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{5}{32}wL^3$$

Para el problema: $w = 900$ N/m ; $L = 4$ m

Así $$\frac{6A\bar{a}_1}{L_1} = \frac{5}{32}(900)(4)^3 = 9000 \text{ N.m}^2$$

Para el claro (2-3), por la superposición de cargas en el **caso 1:**

- Por la carga de 6000 N

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{(6000)(1)}{3}(3^2 - 1^2) = 16\,000 \text{ N.m}^2$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{(6000)}{3}(2)(3^2 - 2^2) = 20\,000 \text{ N.m}^2$$

- Por la carga de 3000 N

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{(3000)(2)}{3}(3^2 - 2^2) = 10\,000 \text{ N m}^2$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{(3000)}{3}(1)(3^2 - 1^2) = 8000 \text{ N m}^2$$

Sumando los términos correspondientes

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = (16\,000 + 10\,000) = 26\,000 \text{ N.m}^2$$

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = (20\,000 + 8000) = 28\,000 \text{ N.m}^2$$

Por las condiciones del problema denotamos por:

$$\frac{6A\bar{a}_2}{L_2} = 26\,000 \text{ N m}^2 \qquad (2)$$

$$\frac{6A\bar{b}_2}{L_2} = 28\,000 \text{ N m}^2 \qquad (3)$$

Para el claro (3-4), del **caso 2**

$$\frac{6A.\bar{b}_3}{L_3} = \frac{800(5)^3}{4} = 25\,000 \text{ N m}^2 \qquad (4)$$

Por la definición de momentos

$$M_1 = M_4 = 0$$

Por el teorema de los tres momentos

- Para los claros (1-2) y (2-3)

$$4M_1 + 14M_2 + 3M_3 = -\frac{6A\bar{a}}{L} - \frac{6A\bar{b}}{L}$$

- Para los claros (2-3) y (3-4)

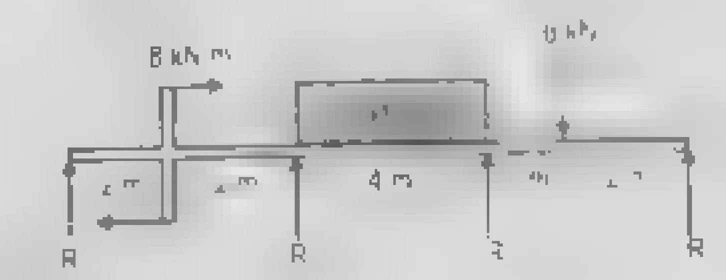
$$3M_2 + 16M_3 + 5M_4 = -\frac{6A\bar{a}}{L} - \frac{6A\bar{b}}{L}$$

Llevando las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) en (6) y (7)

$$\begin{cases} 14M_2 + 3M_3 = -(9\,000 + 28\,000) \\ 3M_2 + 16M_3 = -(26\,000 + 25\,000) \end{cases}$$

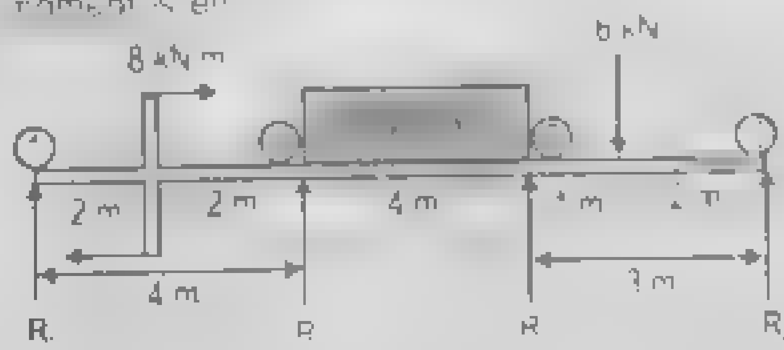
Resolviendo: $M_2 = -\frac{439}{215}$ kN m $M_3 = -\frac{603}{215}$ kN m

26 Véase figura



Resolución

Calculamos los momentos en



Para el claro (1-2), por el caso 7

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{8}{4}(3(2)^2 - 4^2) = -8 \text{ kN m}^2$$

Para el claro (2-3), por el **caso 2**:

$$\frac{6A\bar{a}_2}{L_2} = \frac{6A\bar{b}_2}{L_2} = \frac{2(4)^3}{4} = 32\ kN.m^2 \qquad (2)$$

Para el claro (3-4), por el **caso 1**

$$\frac{6A.b_3}{L_3} = \frac{6(2)}{3}(3^2 - 2^2) = 20\ kN.m^2 \qquad (3)$$

Por la definición de momentos

$$M_1 = M_4 = 0 \qquad (4)$$

Por el teorema de los tres momentos:

- Claros (1-2) y (2-3)

$$4M_1 + 16\ M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{6Aa}{L_1} + \frac{6Ab_2}{L_2}\right) \qquad (5)$$

$$4M_2 + 14\ M_3 + 3M_4 = -\left(\frac{6Aa_2}{L} + \frac{6Ab_3}{L_3}\right) \qquad (6)$$

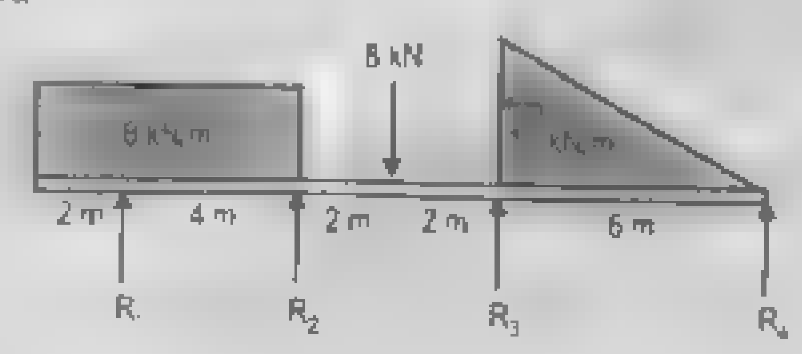
Llevando (1), (2), (3) y (4) en (5) y (6)

$$16\ M_2 + 4M_3 = -(8 + 32)$$
$$4M_2 + 14M_3 = -(32 + 20)$$

Resolviendo: $M_2 = -\frac{22}{13}\ kN.m \Rightarrow$ $\boxed{M_2 = -1692\ N.m}$

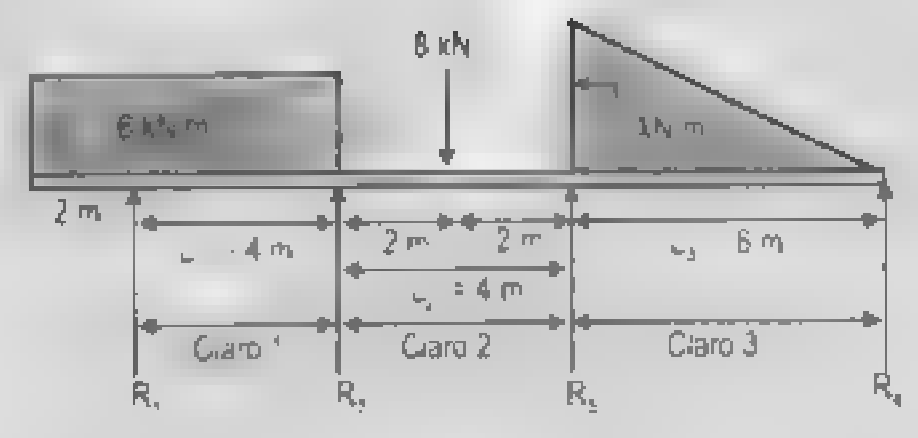
$M_3 = -\frac{42}{13}\ kN.m \Rightarrow$ $\boxed{M_3 = -3230\ N.m}$

827 Véase figura



Resolución

Hallar los momentos de



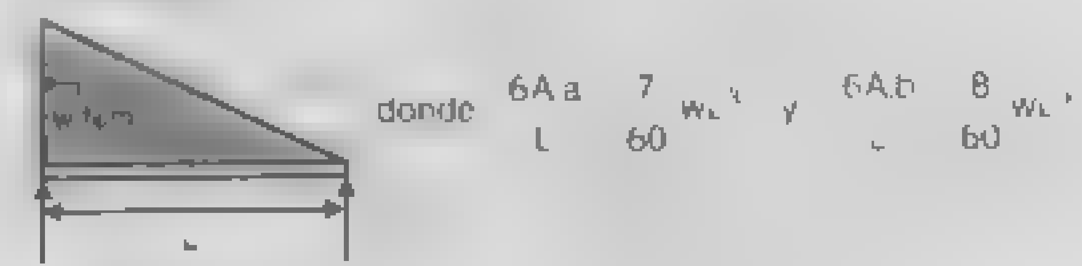
Claro 1, por el **caso 2**

$$\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} = \frac{8(4)^3}{4} = 96\ kN\ m^2 \qquad (1)$$

Claro 2, por el **caso 1**

$$\frac{6Ab_2}{L_2} = \frac{6Aa}{L_2} = \frac{8(2)}{4}(4^2 - 2^2) = 48\ kN.m^2 \qquad (2)$$

Claro 3, por el **caso 4**

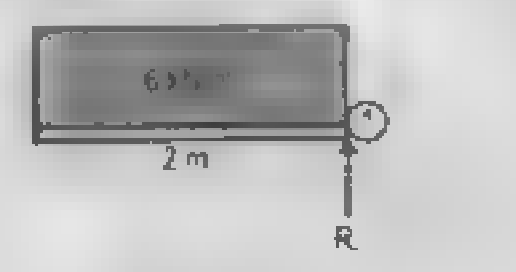


donde $\frac{6Aa}{L} = \frac{7}{60}wL^3$ y $\frac{6Ab}{L} = \frac{8}{60}wL^3$

Para el problema: w = 10 kN/m; L = 6 m

Así:
$$\frac{6A.b_3}{L_3} = \frac{8}{60}(10)(6)^3 = 288\ kN.m^2 \qquad (3)$$

Hallando el momento flexionante en el apoyo de la reacción R_1



donde

$M_1 = -6(2)(1) = -12\ kN.m \qquad (4)$

Por la definición de momentos

$$M_4 = 0 \qquad \ldots(5)$$

Por el teorema de los tres momentos

- Claros 1 y 2: $4M_1 + 16M_2 + 4M_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2}\right)$

$$M \; + \; M \; + \; M \qquad \frac{6A}{L_2} \quad \frac{6A}{L_3}$$

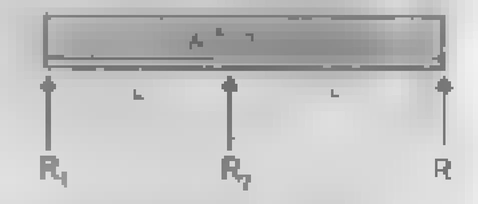
Llevando (1), (2), (3), (4) y (5) en (6) y (7)

$$\begin{cases} 16M_2 + 4M_3 = (96+48)+48 \\ 4M_2 + 20M_3 = -(48+288) \end{cases}$$

Resolviendo $\boxed{M \quad \frac{36}{19} \text{ kN.m}}$ y $\boxed{M_3 = -\frac{312}{19} \text{ kN.m}}$

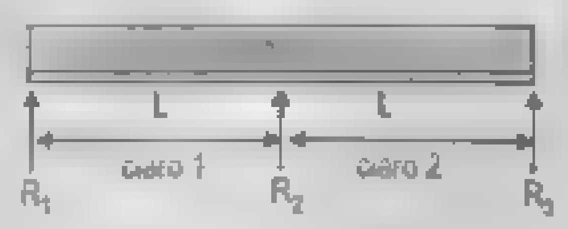
En los problemas siguientes hallar las reacciones y trazar los diagramas de la cortante. Después, determinar los valores máximos de la fuerza cortante, y máximo positivo del momento flexionante. Al resolver los problemas, y a menos que se indique lo contrario, utilizar los resultados obtenidos en los problemas de ...

828. Una viga continua de dos tramos iguales soporta una carga uniforme sobre toda ella como se indica en la figura.



Resolución.

Del sistema



Para el claro 1, usando el **caso 2**

$$\frac{6A.\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad \ldots(1)$$

Para el claro 2, usando el **caso 2**

$$\frac{6A.\bar{b}}{L} = \frac{wL^3}{4} \qquad (2)$$

Por definición de momentos $M \quad M \quad 0 \qquad (3)$

Por el teorema de los tres momentos: $LM_1 + 2(2L)M_2 + LM_3 = -\left(\frac{6A.\bar{a}}{L} + \frac{6A.\bar{b}}{L}\right)$

Así $\boxed{M_2 = -\frac{wL^2}{8}} \qquad (4)$

Hallando las reacciones isostáticas en cada claro:

- Claro 1 $\quad R_{i_1} = R_{i_2} \quad$ ... (por la simetría)

$$\Sigma F_y = 0 = R_{i_1} + R_{i_2} - wL$$

Luego: $R_{i_1} = R_{i_2} = \frac{wL}{2}$

- Claro 2: $\quad R_{i_2} = R_{i_3} \quad$ ...(por la simetría)

$$\Sigma F_y = 0 = R_{i_2} + R_{i_3} - wL$$

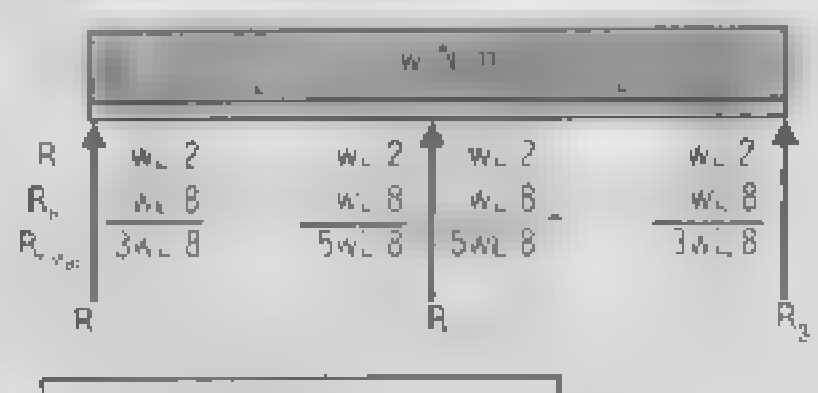
Luego: $R_{i_2} = R_{i_3} = \frac{wL}{2}$

Hallando las reacciones hiperestáticas

- Claro 1: $R_{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = -\frac{wL}{8}$; $R_{h_2} = \frac{M_1 - M_2}{L} = \frac{wL}{8}$

- Claro 2: $R_{h_2} = \frac{M_3 - M_2}{L} = \frac{wL}{8}$; $R_{h_3} = \frac{M_2 - M_3}{L} = -\frac{wL}{8}$

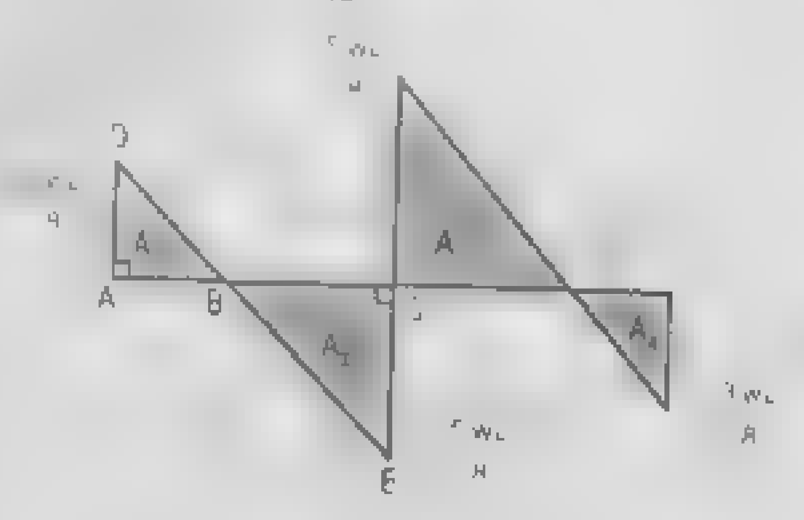
Todos estos resultados podemos colocarlos en una tabla



Donde

$R_1 = 3wL/8$
$R_2 = 5wL/8 + 5wL/8 = 5wL/4$
$R_3 = 3wL/8$

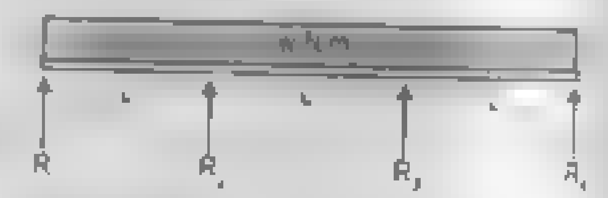
Realizando diagrama de fuerza cortante



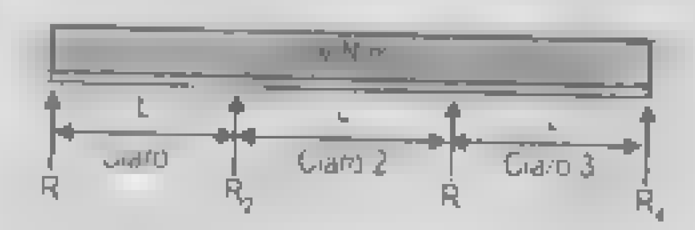
Por semejanza de triángulos ABD y BCE

$AB = \frac{3L}{8}$ y $BC = \frac{5L}{8}$ donde A M , $\frac{9wL^2}{128}$

829 Una carga uniforme sobre una viga de tres tramos iguales como indica la figura



Resolución:
Del sistema



Por la simetría del sistema

$$M \quad M \qquad (1)$$

Por definición de momentos.

$$M_1 = M_4 = 0 \qquad (2)$$

Tomando los claros 1 y 2, donde

$$\frac{6A\bar{a}}{L} \quad \frac{6A\bar{b}}{L} \quad \frac{wL^3}{4} \qquad (3)$$

Y por el teorema de los tres momentos

$$LM_1 + 2(2L)M_2 + LM_3 \quad \left(\frac{6A.a}{L} + \frac{6A\bar{b}}{L}\right)$$

Así $\quad 5LM_2 \quad \frac{wL^3}{4} \quad \frac{wL^3}{4}$

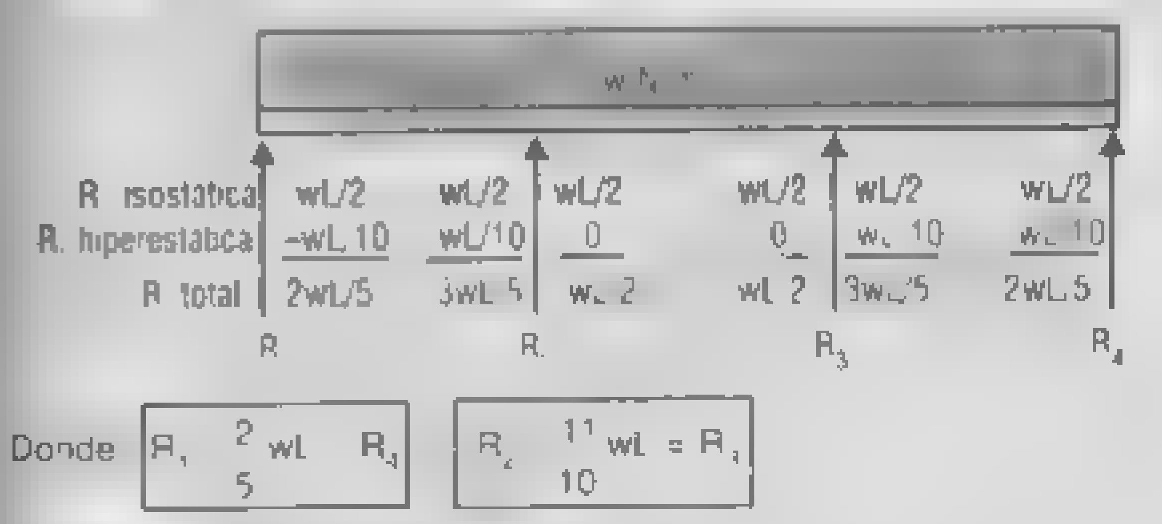
Luego $\quad \boxed{M_2 = \frac{wL}{10} \quad M} \qquad (4)$

Todas las reacciones isostáticas tienen el valor de wL/2 ... (5)

Hallando las reacciones hiperestáticas

- **Claro 1.** $R_{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = -\frac{wL}{10}$; $R_{h_2} = \frac{M_1 - M_2}{L} = \frac{wL}{10}$
- **Claro 2.** $R_{h_2} = \frac{M_3 \quad M_2}{L} = 0$; $R_{h_3} \quad \frac{M_2 \quad M_3}{L} \quad 0$
- **Claro 3.** $R_{h_3} = \frac{M_4 - M_3}{L} = \frac{wL}{10}$; $R_{h_4} \quad \frac{M_3 \quad M_4}{L} \quad \frac{wL}{10}$

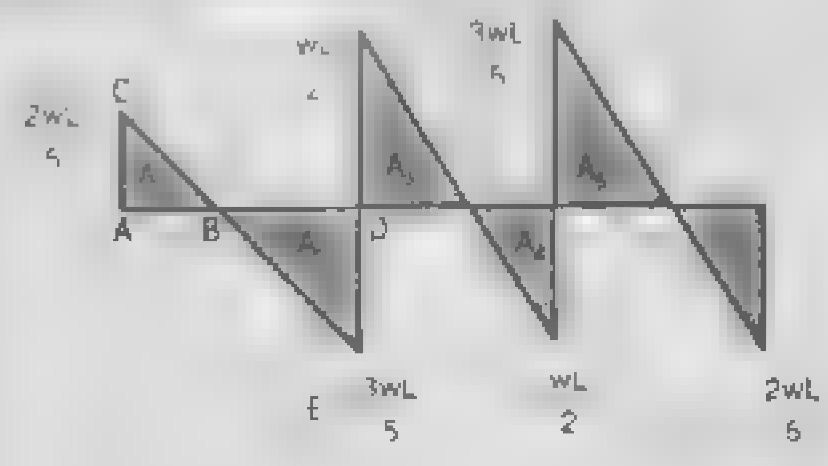
Ordenando estos resultados en una tabla



	R_1	R_2		R_3		R_4
R isostática	wL/2	wL/2	wL/2	wL/2	wL/2	wL/2
R. hiperestática	-wL/10	wL/10	0	0	wL/10	wL/10
R total	2wL/5	3wL/5	wL/2	wL/2	3wL/5	2wL/5

Donde $\boxed{R_1 \quad \frac{2}{5}wL \quad R_4}$ $\boxed{R_2 \quad \frac{11}{10}wL = R_3}$

En el diagrama de fuerza cortante



Por semejanza de triángulos ABC y BDE: (AB + BD = L) $AB = \frac{2L}{5}$

$$A \quad M \quad \frac{2wL}{2} \quad \frac{2L}{5} \quad \frac{2L}{5} = \frac{2}{25} wL^2$$

830 Viga continua del problema 814

Resolución

Del problema 814 tenemos.

$M_1 = -1080$ N.m ; $M_2 = -261.83$ N.m ; $M_3 = -700$ N.m

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en cada tramo

- Tramo 1 2,

Donde:

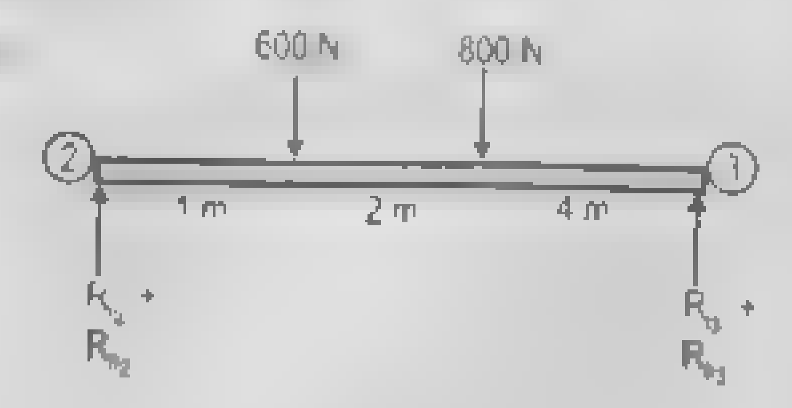
$$R_1 = \left(720 + \frac{1}{3}(480)\right) = 880\ N$$

$$R \quad 720 \quad \frac{2}{3}\ 480 \quad 40\ N$$

$$R_1 \quad \frac{M \quad M_1}{L} \quad \frac{261.83 + 1080}{2} = 409\ N$$

$$R_{1\,2} \quad \frac{M \quad M}{L} \quad 409\ N$$

- Tramo 2 3)



Donde $\quad R \quad \frac{3 \cdot 600}{4} \quad \frac{800}{4} \quad 650\ N$

$$R \quad \frac{1}{4}\ 600 + \frac{3}{4}\ 800 \quad 750\ N$$

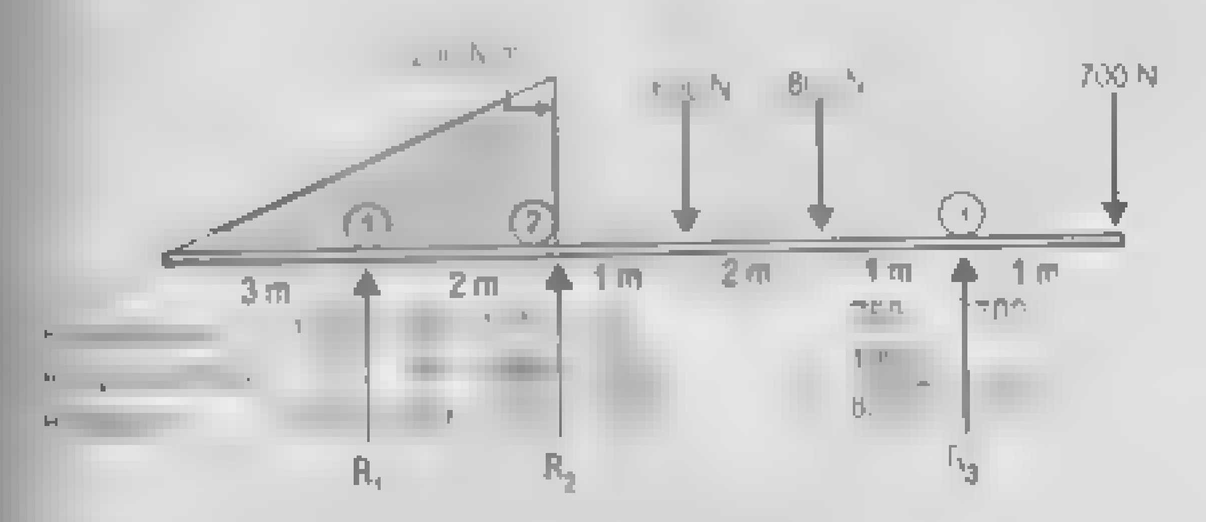
$$R \quad \frac{M \quad M}{L} \quad \frac{00 \quad 261.83}{4} \quad 109.5\ N$$

$$R \quad \frac{M \quad M}{L} \quad 109.5\ N$$

A ... fuerza de corte de 1080 N

A lado derecho del apoyo 3 hay una fuerza de corte igual a: 700 N

... ando los datos en una tabla

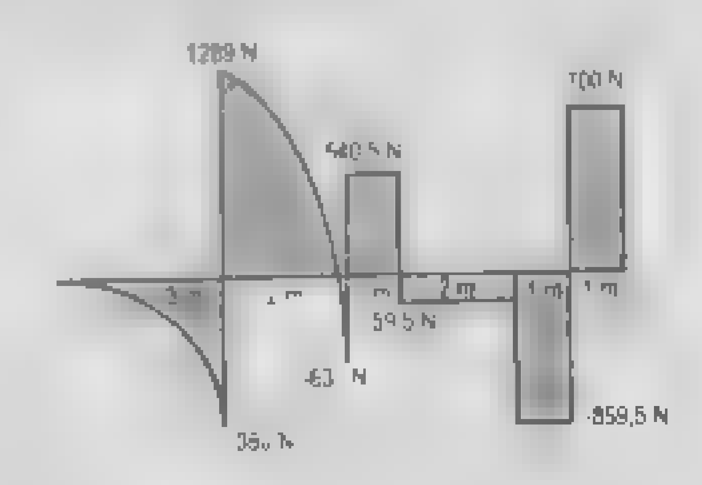


Donde: $R_1 = 1080 + 1289 \Rightarrow$ $R_1 = 2369$

$R_2 = 631 + 540.5 \Rightarrow$ $R_2 = 1171.5$

$R \quad 8\ 9.5 + 700$

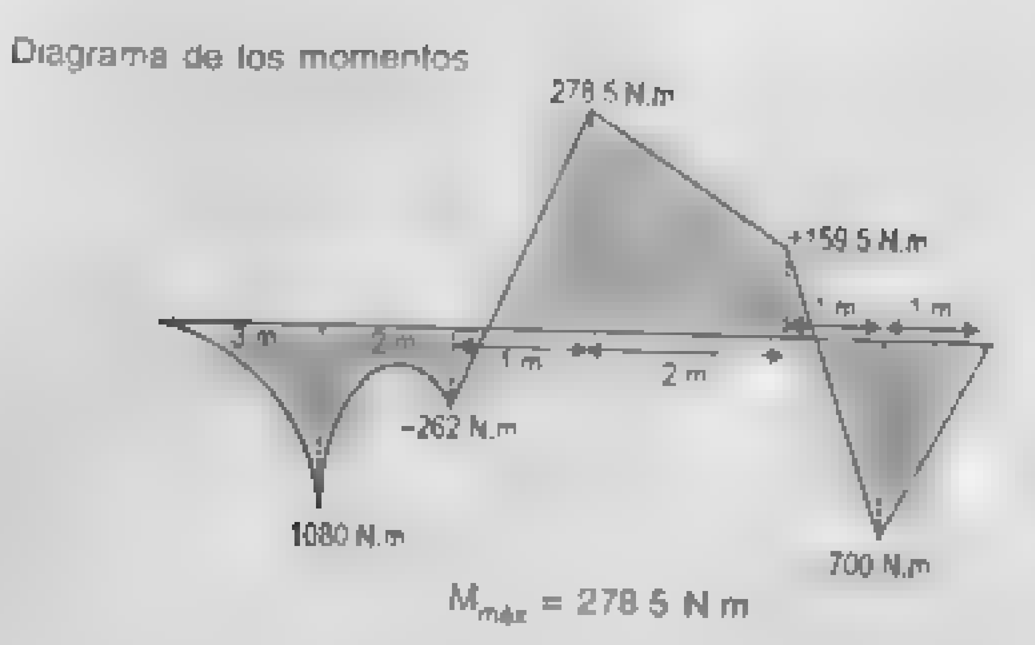
Haciendo el diagrama de fuerzas cortantes



El valor máximo de las fuerzas cortantes es: $F_{máx} = 1289$ N

En los puntos de corte de la gráfica ha de hallarse los momentos máximo o mínimo

Diagrama de los momentos



$M_{máx} = 278.5$ N.m

831 Viga continua del problema 817, en la que $M_2 = 156$ N.m

Resolución:

- Del problema 817 $\quad M_1 = -1200$ N.m

  $M_2 = 156$ N.m (redondeando)

  $M_3 = 0$

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en cada claro

- Claro (1-2)

Por estática

$R_{I1} = 300$ N

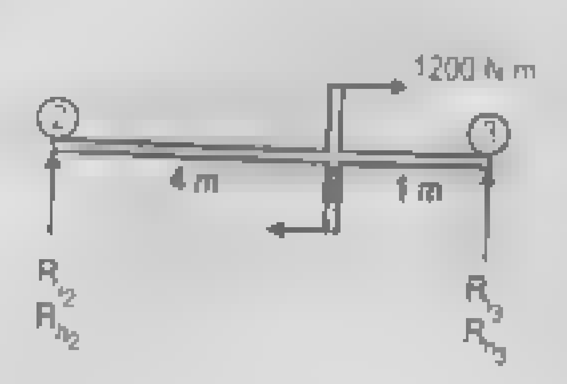
$R_{I2} = 900$ N

$R_{h1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = \frac{156 - (-1200)}{4}$

$R_{h1} = 339$ N

$R_{h2} = \frac{M \quad M}{L} = 339$ N

- Claro (2-3).



Por estática $\quad R_{I2} = 400$ N

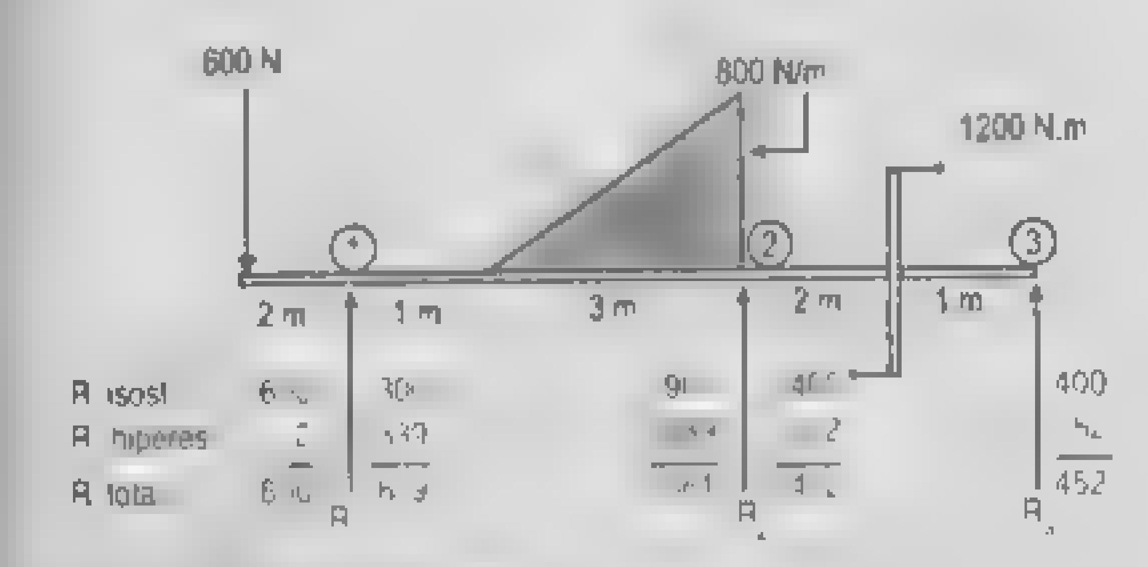
$R_{I3} = 400$ N

$R_{h2} = \frac{M_2 - M_3}{L} = \frac{156}{3} = 52$ N

$R_{h3} = \frac{M \quad M}{L} = [illegible]2$ N

La fuerza a la izquierda del apoyo (1) es. $R_{I1} = 600$ N

En el diagrama tabla

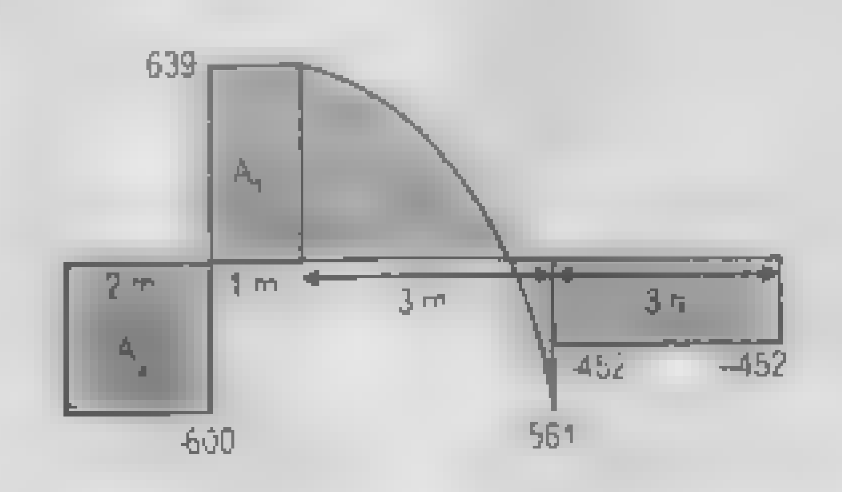


Luego $\quad R_1 = 600 + 639 = 12[illegible]$ N

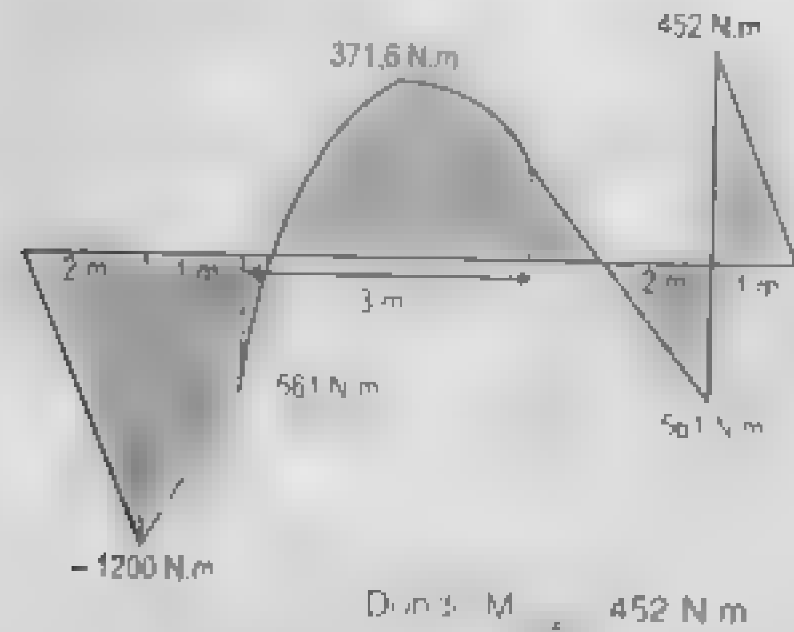
$R_2 = 561 + 452 = 1[illegible]$ N

$R_3 = 452$ N

En el diagrama de fuerzas cortantes



El diagrama de los momentos es



Donde: M [illegible] 452 N m

832 Viga continua del problema 824

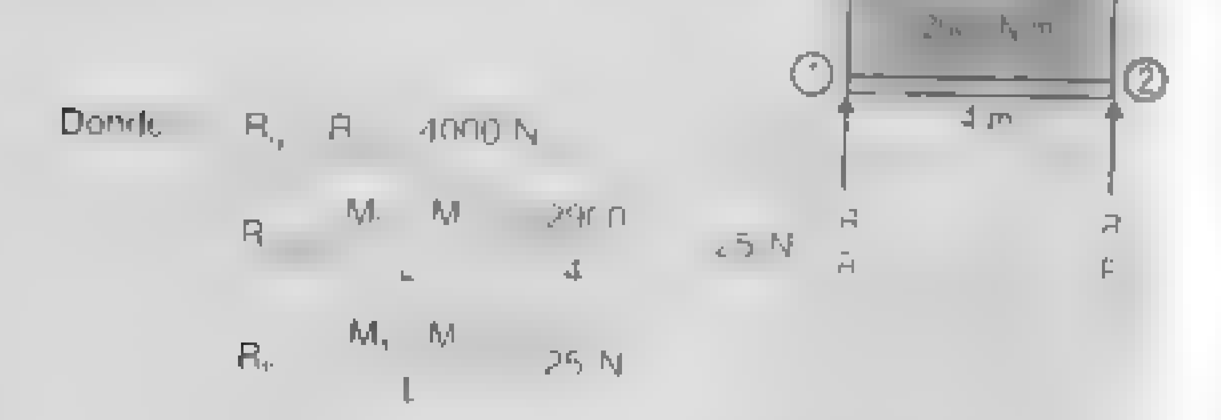
Resolución:

De los resultados del problema 824

$M_1 = M_4 = 0$ $M_2 = -2900$ N m $M_3 = -6100$ N m

Hallando las reacciones [illegible]

- Claro (1-2)



Donde: R_{i1} R 4000 N

R M M 2900 / 4 25 N

R M M / L 25 N

- Claro (2-3).

1000 N

1 m 1 m

Donde: $R_{i2} = R_{i3} = 500$ N

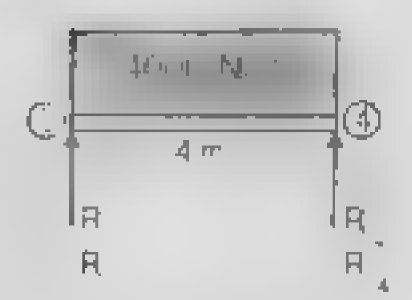
R_{i2} R_{i3}

R_{m2} R_{m3}

R M M / L 6100 2900 / 2 1600 N

R M M / L 1600 N

- Claro (3 - 4)

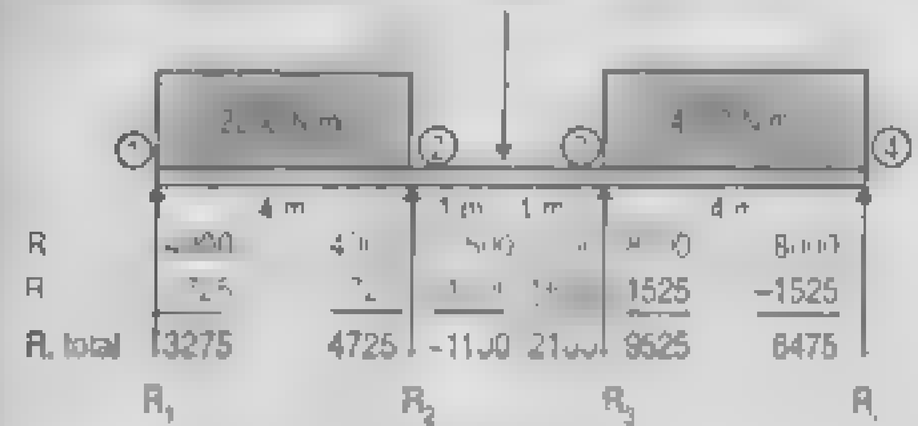


Donde: $R_{i3} = R_{i4} = 8000$ N

R M M / L 6100 / 4 1525 N

R M M / L 1525 N

- En el diagrama tabla



R	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
R	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1525	–1525
R. total	3275	4725	–1100	2100	9525	6475
	R_1		R_2		R_3	R

Así

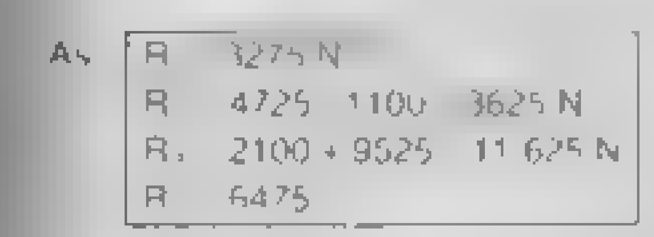
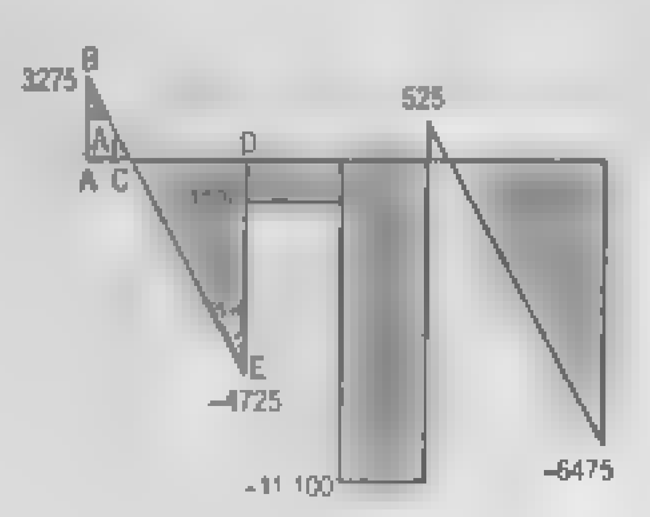

R 3275 N
R 4725 1100 3625 N
R 2100 + 9525 11 625 N
R 6475

Diagrama de fuerzas cortantes



Por semejanza de los triángulos ABC y CDE, AC = 1,6375 m

Donde $A = M_{max} = \frac{3275 \times 1{,}6375}{2} \rightarrow M_{max} = 2681{,}4$ N.m

833. Viga continua del problema 825 en el que $M_2 = -2{,}04$ kN.m y $M_3 = -2{,}81$ kN.m

Resolución:

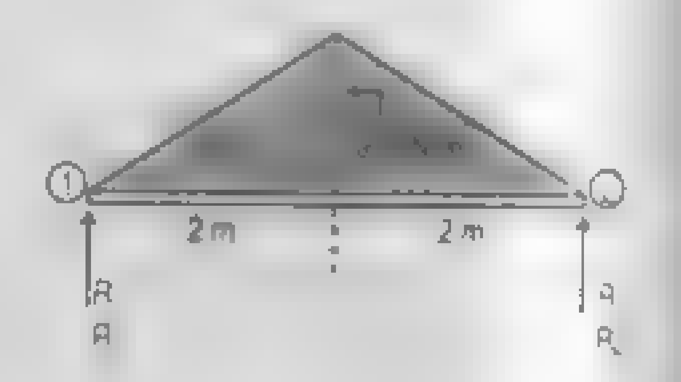
Del problema 825 tenemos: $M_1 = M_4 = 0$

$M_2 = -2{,}04$ kN.m (aprox.)

$M_3 = -2{,}81$ kN.m (aprox.)

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas

- Claro (1-2)

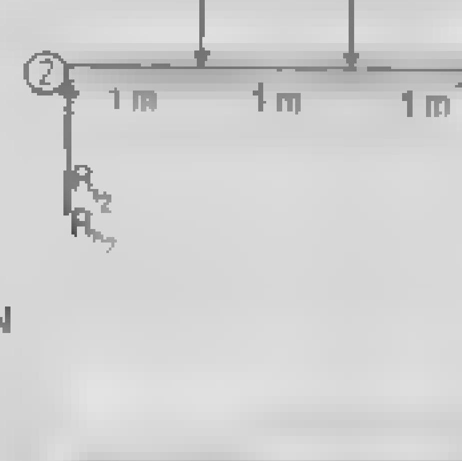


Donde $R_{i_1} = R_{i_2} = 1{,}8$ kN

$R_{h_1} = \frac{M_2 - M_1}{L} = 0{,}51$ kN

$R_{h_2} = \frac{M_1 - M_2}{L} = 0{,}51$ kN

- Claro (2-3):



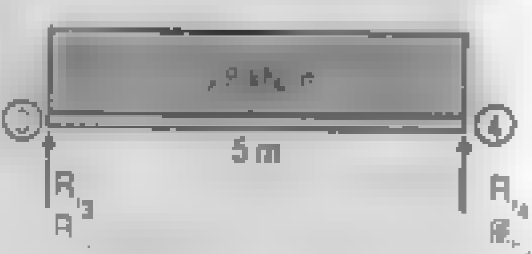
Donde: $R_{i_2} = 5$ kN

$R_{i_3} = 4$ kN

$R_{h_2} = \frac{M_3 - M_2}{L} = -0{,}257$ kN

$R_{h_3} = \frac{M_2 - M_3}{L} = 0{,}257$ kN

- Claro (3-4):

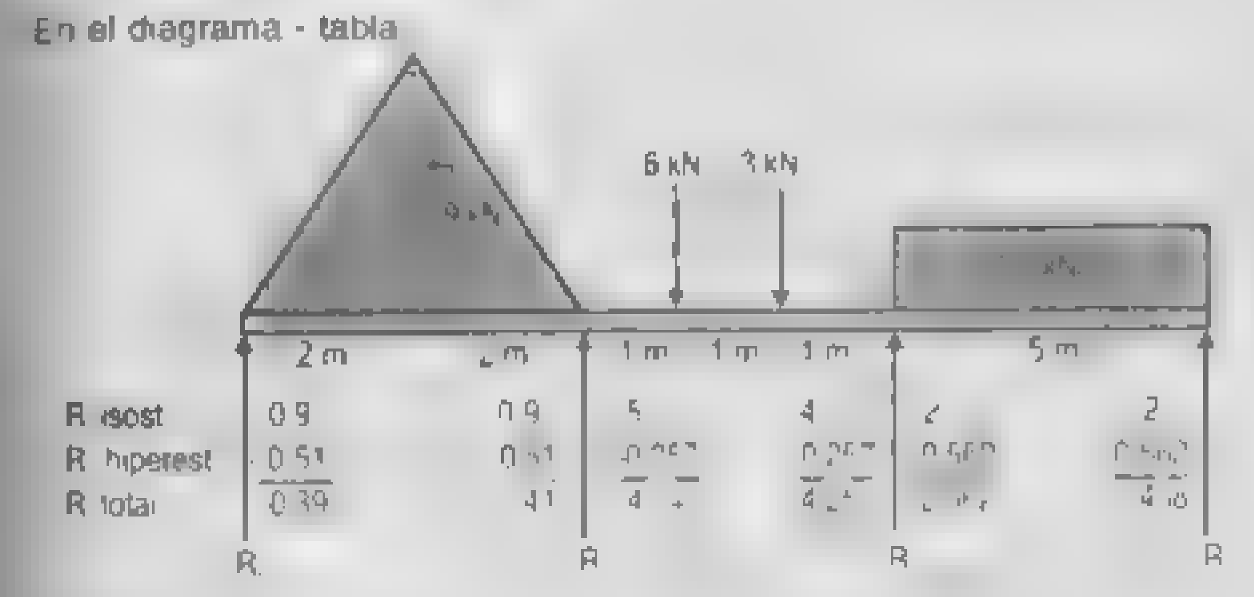


Donde $R_{i_3} = R_{i_4} = 2$ kN

$R_{h_3} = \frac{M_4 - M_3}{L} = 0{,}562$ kN

$R_{h_4} = \frac{M_3 - M_4}{L} = 0{,}562$ kN

En el diagrama - tabla



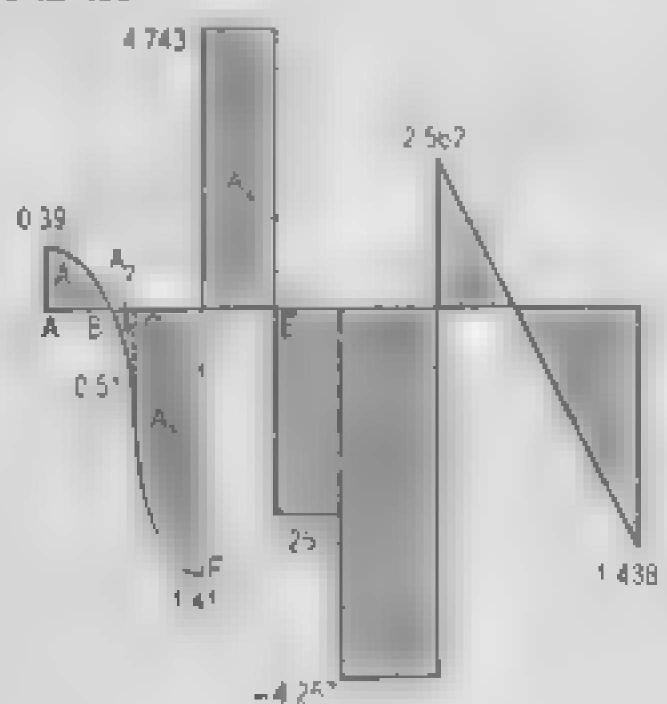
Donde: $R_1 = 0{,}39$ kN

$R_2 = 1{,}41 + 4{,}743 = 6{,}153$ kN

$R_3 = 4{,}257 + 2{,}562 = 6{,}819$ kN

$R_4 = 1{,}438$ kN

Diagrama de fuerzas cortantes



$M_{max} = A_4 + A_3 + A_2 + A_1$ ... (1)

Como la curva es generada por las ecuaciones

Tramo ABC: $f(x) = 0{,}39 - \frac{(0.9)}{4}x^2;\ x \in (0;2)$

Donde AB [illegible] 1 316 m y AC = 2 m

Así: $A_1 + A_2 = \int_0^{1{,}316}\left(0{,}39 - \frac{0.9}{4}x^2\right)dx + \int_{1{,}316}^{2}\left(0.39 - \frac{0.9}{4}x^2\right)dx$

$A_1 + A_2 = 0{,}48$ kN.m

Del tramo CD = 2 m

$$f(x) = -1{,}41 + \left(\frac{0.9}{4}\right)(4 - x)^2$$

$$A_3 = \int_2^4\left(-1{,}41 + \frac{(0.9)}{4}(4 - x)^2\right)dx \Rightarrow A_3 = 2.22 \text{ kN.m}$$

$A_4 = 4{,}743$ kN.m

Así: $M_{máx} = 3{,}003$ kN.m

834. Viga continua del problema 826

Resolución.

Del problema 826, tenemos.

$M_1 = M_4 = 0$
$M_2 = -1{,}69$ kN.m (aprox.)
$M_3 = -3{,}23$ kN.m (aprox.)

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en

- Claro (1-2):

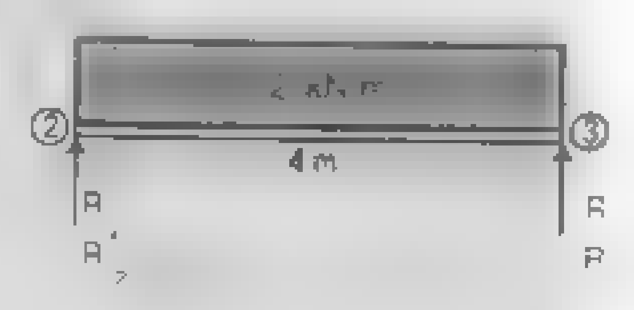
Donde $R_{i_1} = -2$ kN

$R_{i_2} = 2$ kN

$R_{h_1} = (M_2 - M_1)/L = -0{,}4225$ kN

$R_{h_2} = (M_1 - M_2)/L = 0{,}4225$ kN

- Claro (2-3)



Donde: $R_{i_2} = R_{i_3} = 4$ kN

$R_{h_2} = (M_3 - M_2) / L = -0.385$ kN

$R_{h_3} = (M_2 - M_3) / L = +0{,}385$ kN

- Claro (3-4)

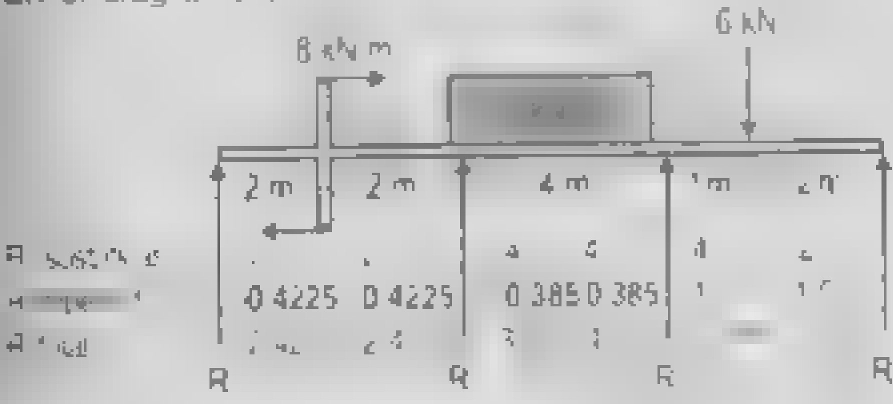
Donde [illegible] 4 kN

[illegible] 2 kN

$R_{h_3} = (M_4 - M_3) / L = 1{,}077$ kN

$R_{h_4} = (M_3 - M_4) / L = -1{,}077$ kN

En el diagrama-tabla.



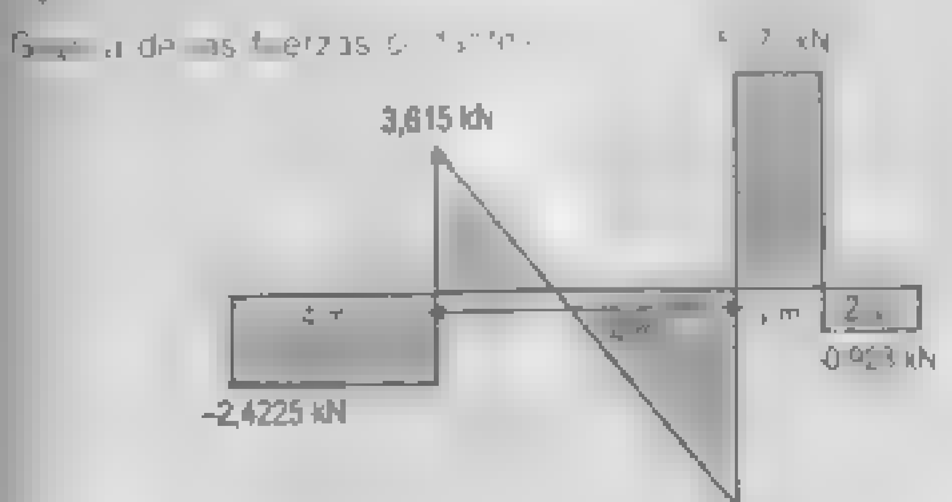
$R_1 = -2\ 4225$ kN (apunta hacia abajo)

$R_2 = 2{,}4225 + 3.615 = 6.0375$ kN

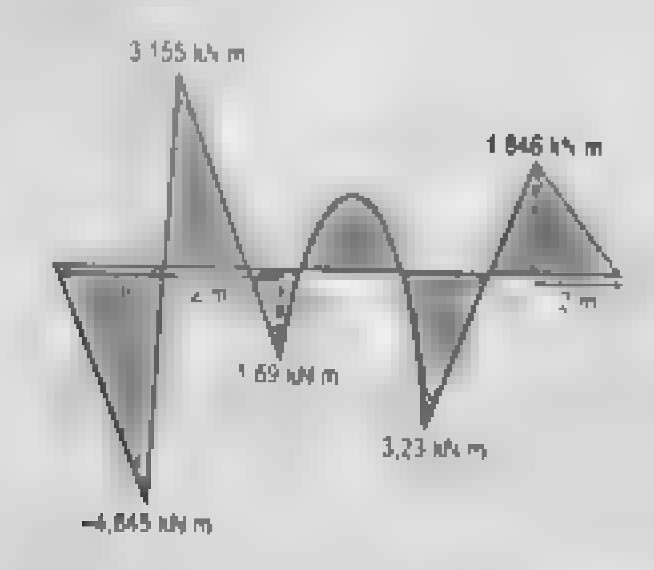
$R_3 = 4.385 + 5{,}077 = 9{,}462$ kN

$R_4 = 0{,}923$ kN

[illegible]



Gráfica de los momentos



Así: $M_{máx} = 3,155$ kN.m

835 Viga continua del problema 827, en el que $M_2 = -1,895$ kN.m y $M_3 = -16,42$ kN.m

Resolución:
Por el problema 827, tenemos

$M_1 = -12$ kN.m $\qquad M_2 = -1,895$ kN.m

$M_3 = -16,42$ kN.m $\qquad M_4 = 0$

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas en

- Claro 1

Donde $\quad R_1 = R_2 = 12$ kN

$R_{h_1} = (M_2 - M_1)/L = 2,53$ kN

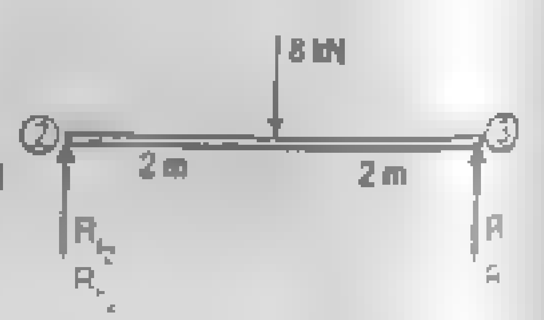
$R_{h_2} = (M_1 - M_2)/L = -2,53$ kN

- Claro 2.

Donde $\quad R_2 = R_3 = 4$ kN

$R_{h_2} = (M_3 - M_2)/L = -3,63$ kN

$R_{h_3} = (M_2 - M_3)/L = 3,63$ kN



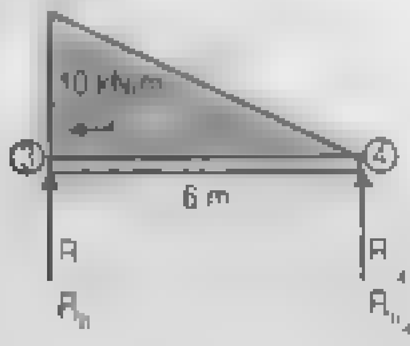
- Claro 3

Donde $\quad R_3 = 20$ kN

$R_4 = 10$ kN

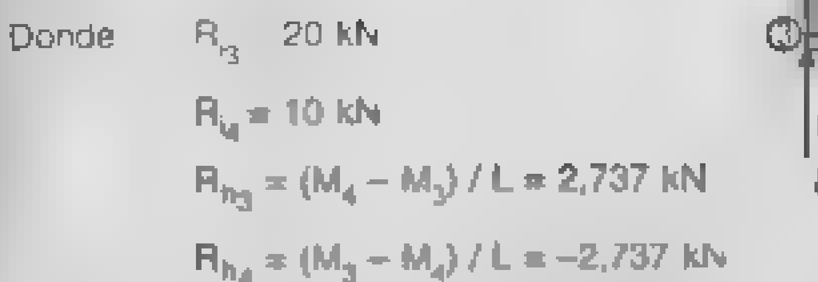
$R_{h_3} = (M_4 - M_3)/L = 2,737$ kN

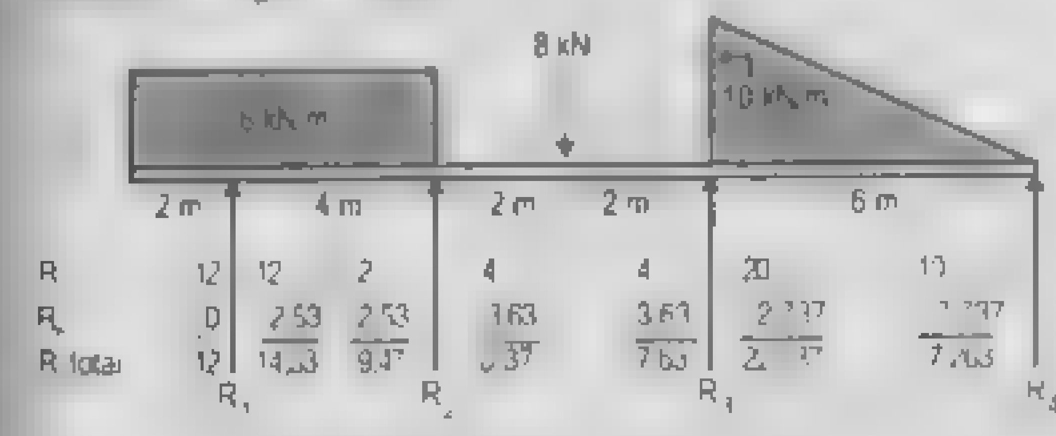
$R_{h_4} = (M_3 - M_4)/L = -2,737$ kN



La reacción a la izquierda del apoyo (1) es: 12 kN = R_{i1}

Llevando al diagrama-tabla





Así $\quad R_1 = 12 + 14,53 = 26,53$ kN

$R_2 = 9,47 + 0,37 = 9,84$ kN

$R_3 = 7,63 + 22,73 = 30,36$ kN

$R_4 = 7,263$ kN

836 En la viga continua de la figura P-815 calcular la longitud x de los voladizos de manera que las tres reacciones sean iguales.

Resolución:
Del problema 815: $\qquad M_1 = -\dfrac{wx^2}{2} = M_3 \qquad \text{... (1)}$

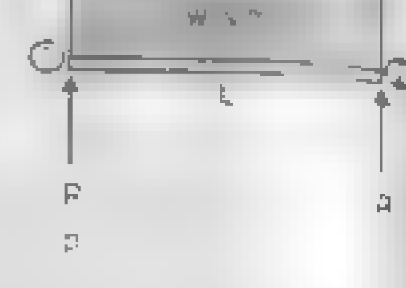
Por el teorema de los tres momentos (ver prob. 815).

$$L\,M_1 + 2(2L)\,M_2 + LM_3 = -\left(\frac{wL^3}{4} + \frac{wL^3}{4}\right)$$

Así: $\qquad M_2 = \dfrac{wx^2}{4} - \dfrac{wL^2}{8} \qquad \text{... (2)}$

Hallando las reacciones isostáticas e hiperestáticas

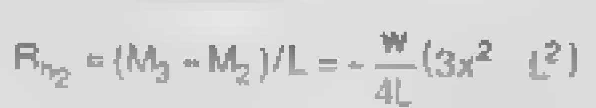
- (1-2)



Donde R R wL/2

$R_{h2} = (M_1 \quad M_2)/L$

- Claro (2-3)



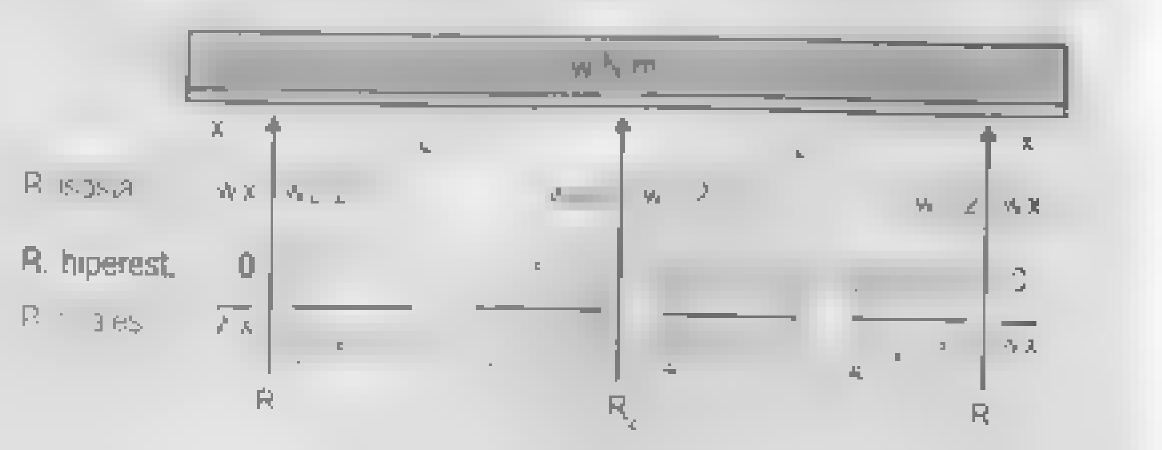
$R_{h2} = (M_3 - M_2)/L = -\frac{w}{4L}(3x^2 \quad L^2)$

$R \quad M \quad M_3)/L = \frac{w}{4L}(3x^2 - L^2)$

A la izquierda del apoyo (1) hay una fuerza isostática $R_{i0} = wx$

A la derecha del apoyo (3) hay una fuerza isostática $R_{i0} = wx$

En el diagrama-tabla:



Así $R_1 = wx + \frac{w}{4L}\left(3x^2 + 3\frac{L^2}{2}\right)$ ...(3)

$R_2 = -\frac{w}{4L}\left(3x^2 - 5\frac{L^2}{2}\right) - \frac{w}{4L}\left(3x^2 - 5\frac{L^2}{2}\right)$ ...(4)

$R_3 = \frac{w}{4L}\left(3x^2 + 3\frac{L^2}{2}\right) + wx$ ...(5)

Igualando R_1 R_2 por condición del problema

$wx + \frac{w}{4L}\left(3x^2 + \frac{3L^2}{2}\right) = -\frac{w}{4L}\left(3x^2 \quad \frac{5L^2}{2}\right)$ (2)

Simplificando $4Lx + 3x^2 + \frac{3L^2}{2} \quad 6x^2 + 5L$

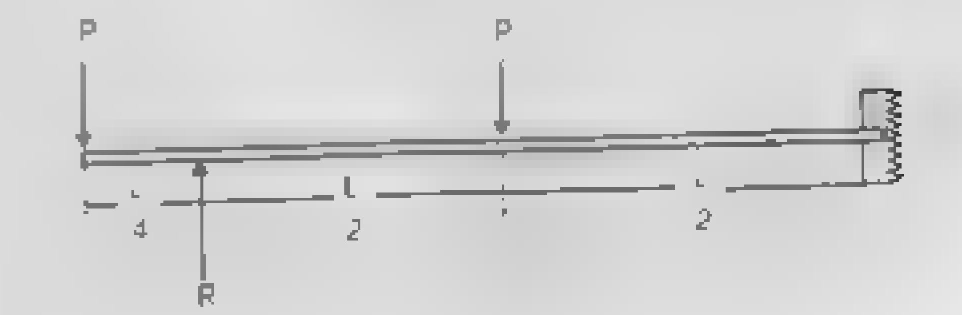
o $16x^2 + 8Lx - 7L^2 = 0$

Resolviendo $x = \left(\frac{\sqrt{142} - 4}{18}\right)L \Rightarrow \boxed{x = 0{,}44\ L}$

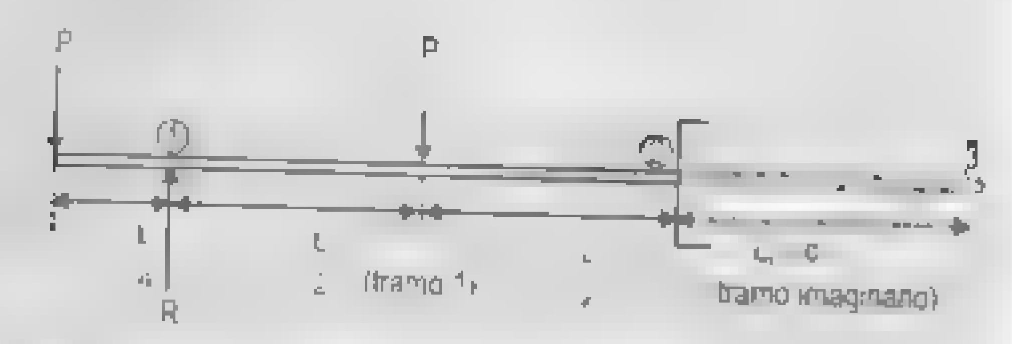
837, 838. problemas ilustrativos

En los siguientes problemas se supone que los empotramientos de los extremos de las vigas son perfectos. A menos que se diga lo contrario, los apoyos están al mismo nivel.

839 Determinar la reacción en el apoyo en la viga de la figura.



Resolución:
Del diagrama



[illegible] artificio de crear un tramo imaginario donde no existen [illegible] momento

Por el teorema de los tres momentos

$$LM_1 + 2LM_2 + (0)M_3 = -\left(6\frac{A\bar{a}}{L_1} + 6\frac{A\bar{b}}{L_2}\right)$$

Así, $LM_1 + 2LM_2 = -6\frac{Aa}{L_1}$ (1)

(ya que $M_3 = 0 \wedge \frac{6A\bar{b}}{L_2} = 0$ son los valores que no existen)

Del **caso 1**, por efecto de la carga P

$$\frac{6A\bar{a}}{L_1} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2)$$

Para el problema $a = L/2$

Así: $\frac{6A\bar{a}}{L_1} = \frac{3}{8}PL^2$ ...(2)

En el apoyo (1): $M_1 = -\frac{PL}{4}$ ...(3)

(3) y (2) en (1): $L\left(-\frac{PL}{4}\right) + 2M_2 [illegible] \frac{3}{8}PL^2$

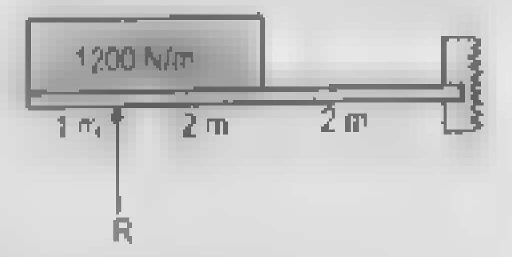
donde $M [illegible] \frac{PL}{16}$ ...(4)

Para hallar la reacción R, tomamos momentos en (2)

$$M_2 = [illegible] \frac{5}{4}PL + RL [illegible] \frac{PL}{2}$$

Colocando sus valores y simplificando $\boxed{R \;\; \frac{27}{16}P}$

40 En la viga empotrada y apoyada de la figura, determinar la reacción en el apoyo y el momento flexionante máximo positivo



Resolución.
Del problema anterior podemos simplificar el teorema de los tres momentos en vigas empotradas, así

Así

$$LM_1 + 2(L + L_1)M_2 + (L_1)M_3 = -\left(6\frac{A\bar{a}}{L} + 6\frac{A\bar{b}}{L_1}\right)$$

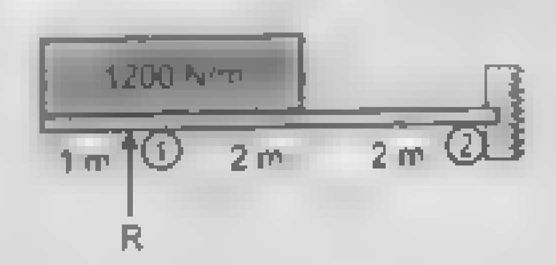
Pero L_1 es una cantidad que no existe, así $L_1 = 0$.

Además el término $\frac{6A\bar{b}}{L_1}$ no existe, también es nulo.

La ecuación se simplifica así: $LM_1 + 2LM_2 = -\frac{6A\bar{a}}{L}$ ... (1)

que es la expresión que frecuentemente usaremos.

Del problema



Para $\frac{6A\bar{a}}{L}$ estamos en el **caso 5**:

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{w}{4L}\left[b^2(2L^2 - b^2) - a^2(2L^2 - a^2)\right]$$

Para el problema a = 0; b = 2 m; L = 4 m; w = 1200 N

Luego, $\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{1200}{4}$ [illegible] $= 8400$ N.m

En el apoyo ①: $M_1 = -(1200)(1)(0{,}5) = -600$ N.m

En la ecuación (1): [illegible] $M_2 = 8400$

$M_2 = -750$ N.m

Tomando momentos en ②:

$$M_2 = -(1200)(3)\left(2+\frac{3}{2}\right)+4R$$

$$-750 = -12\,600 + 4R$$

Así, $\boxed{R = 2962{,}5\ \text{N}}$

De las ecuaciones que [illegible] gráfica de los momentos flectores [illegible] a la variable "x", se tiene:

$$M(x)=\begin{cases}-600x^2;\ x\in\langle 0;1\rangle\\ -600x^2+2962{,}5(x-1);\ x\in\langle 1;3\rangle\\ -3600(x-1{,}5)+2962{,}5(x-1);\ x\in\langle 3;5\rangle\end{cases}$$

Alcanza el valor máximo para

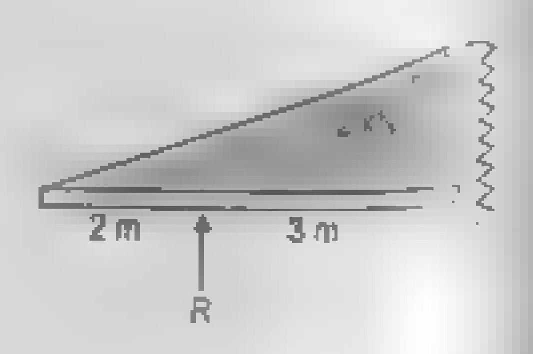
$$M'(x) = -1200x + 2962{,}5 = 0;\ x\in\langle 1;3\rangle$$

$$x = 2{,}46875$$

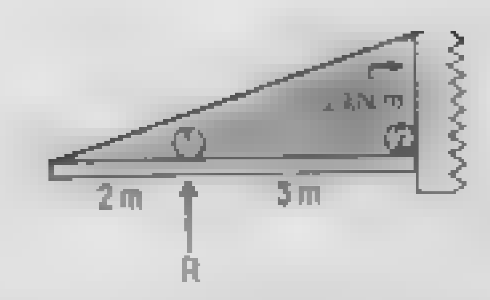
Así, $M(2{,}46875) = -600(2{,}46875)^2 + 2962{,}5(2{,}46875-1)$

$$\boxed{M_{max} = 694{,}34\ \text{N.m}}$$

841 Determinar el momento en el empotramiento y la reacción en el apoyo en la viga de la figura



Resolución

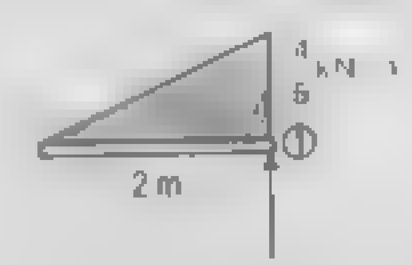


Aplicando el teorema de los tres momentos a la viga empotrada

$$3M_1 + 6M_2 = -\left(6\frac{A\bar{a}}{L_1}\right) \quad ...(1)$$

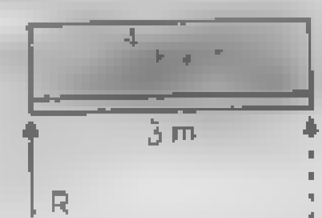
Analizando momentos en el apoyo ①

$$M_1 = -\frac{4}{5}\frac{(2)}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{15}\ \text{kN.m} \quad ...(2)$$



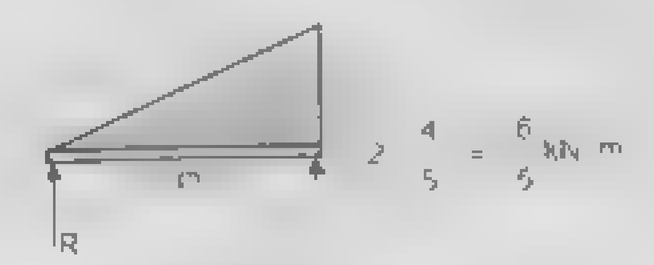
Para hallar $6\frac{A\bar{a}}{L}$ tenemos la superposición de dos cargas

- Carga 1



Caso 2: $6\frac{A\bar{a}}{L_1} = \frac{wL^3}{4} = \frac{4}{5}\frac{(3)^3}{(4)}$ [illegible] $= \frac{27}{5}\ \text{kN.m}^2$ ...(3)

- Carga 2



Caso 3 $6\frac{A\,a}{L} = \frac{8}{60}wL^3 = \frac{8}{60}\frac{6}{5}(3)^3$

$6\frac{A\,a}{L} = \frac{108}{25}\ \text{kN.m}^2$ ...(β)

Sumando (α) y (β). $6\frac{A.a}{L_1} = \frac{27}{5} - \frac{18}{25} = \frac{243}{25}\ \text{kN.m}^2$

Llevando los resultados a (1). $3\left(-\frac{8}{15}\right) + 6M = \frac{243}{25}$ ⇒ $M = 1{,}35\ \text{kN.m}$

Tomando momentos en ②:

$M = 3R - 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$

$\frac{203}{150} + \frac{25}{3}\frac{1}{3} = R$ ⇒ $R = 2{,}33\ \text{kN}$

842 Determinar el momento en el empotramiento y la reacción en el apoyo en la viga empotrada y apoyada de la figura.

Resolución.

Por el teorema de los tres momentos sobre la viga empotrada

$$3M_1 + 6M_2 = -6\frac{A.a}{L_1} \quad ...(1)$$

Tomando momentos en ①

$$M_1 = -\frac{6}{5}(2)\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}\frac{2}{3}(2) = -\frac{52}{15}\ \text{kN.m} \quad (\alpha)$$

Para hallar $6\frac{A.a}{L_1}$, tenemos:

Caso 4

$$\frac{6A\,a}{L_1} = \frac{7}{60}wL^3 = \frac{7}{60}\frac{6}{5}(3)^3$$

Así $\frac{6A\,a}{L_1} = \frac{189}{50}\ \text{kN.m}^2$ ...(β)

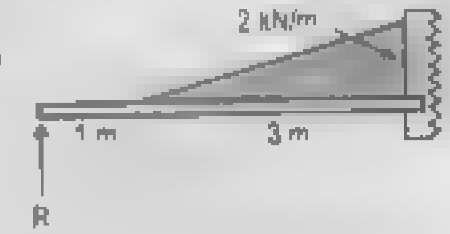
(α) y (β), en (1) $3\left(-\frac{52}{15}\right) + 6M = \frac{189}{50}$

Donde $M_2 = \frac{331}{300}\ \text{kN.m}$

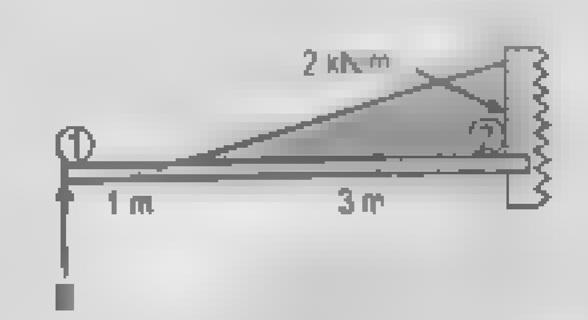
Tomando momentos en ②

$$\frac{331}{300} = 3R - \left(\frac{2}{2}\right)(5)\left(\frac{2}{3}\right)(5) \Rightarrow R = \frac{1777}{300}\ \text{kN}$$

843 Para la viga de la figura, determinar el momento en el empotramiento y la reacción en el apoyo.



Resolución.



Por el teorema de los tres momentos sobre la viga empotrada

$$4M_1 + 8M_2 = -6\frac{A\,\bar{a}}{L_1} \quad (1)$$

Por definición de momentos

$$M_1 = 0 \quad (2)$$

Hallando $6\frac{A\bar{a}}{L_1}$

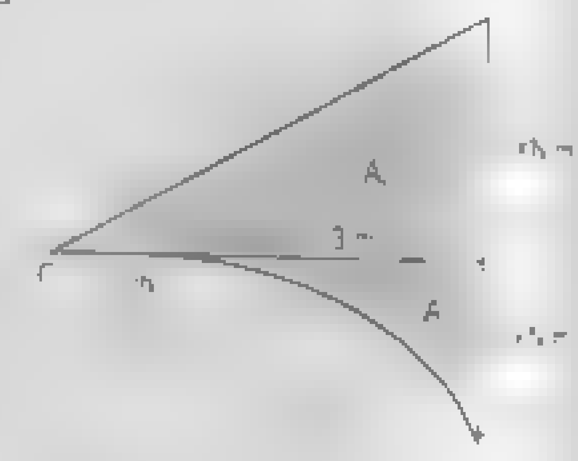
2 kN m

1 m   3 m

$R = \frac{3}{4}$ kN $R = \frac{9}{4}$ kN

Graficando los momentos reaccionantes

$$M_{(x)} = \begin{cases} \frac{3}{4}x\,; & x \in \langle 0, 4 \rangle \\ -\frac{(x-1)^3}{9}\,; & x \in \langle 1, 4 \rangle \end{cases}$$



Así: $A_1\,.\,\bar{a} = \frac{3}{2}(4)\left(\frac{2}{3}\right)(4) = 16$

$A_2\,\bar{a} = \frac{1}{4}(3)(3)\left(1 + \frac{4}{5}(3)\right) = \frac{153}{20}$

Donde. $A\,\bar{a} = 16 - \frac{153}{20} = \frac{167}{20}$

Luego. $6\frac{A\bar{a}}{L} = \frac{6\,(167)}{4\,\;20} = \frac{501}{40}$ kN.m²

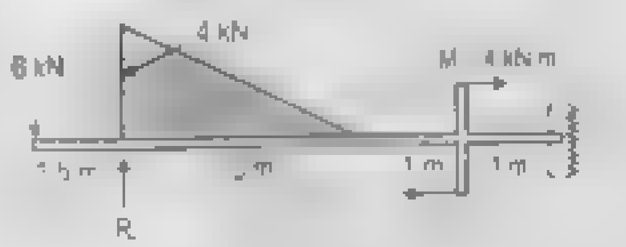
En (1) $8M_2 = \frac{501}{40} \Rightarrow M = \frac{501}{320}$ kN m $\Rightarrow$ $M_2 = 1566$ N m

Tomando momentos en ②

$4R = \frac{1}{2}(2)(3)\frac{3}{3} - M_2$

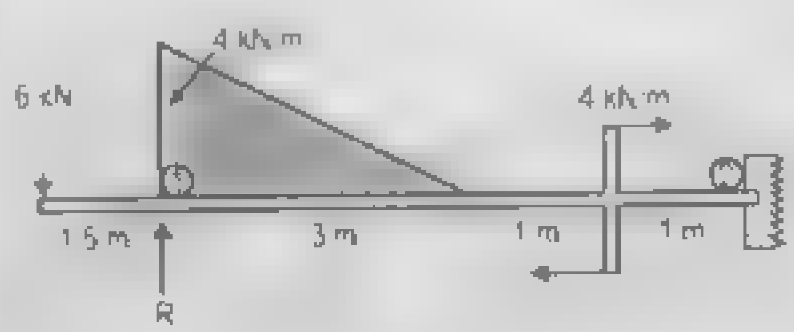
$4R = 3 - \frac{501}{320} \Rightarrow$ R = 359 kN

Determinar la reacción en el apoyo de la viga de la figura



Resolución

Del sistema



Por momentos en una viga empotrada

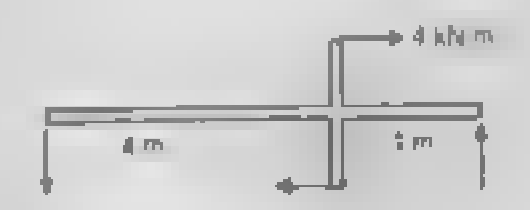
$5M_1 + 10M_2 \;\; 6\frac{A\bar{a}}{L} \quad \ldots (1)$

Por momentos en el apoyo ①

$M_1 = -(1,5)(6) = -9$ kN m ... (2)

Para hallar $6\frac{A\bar{a}}{L}$ de dos cargas superpuestas.

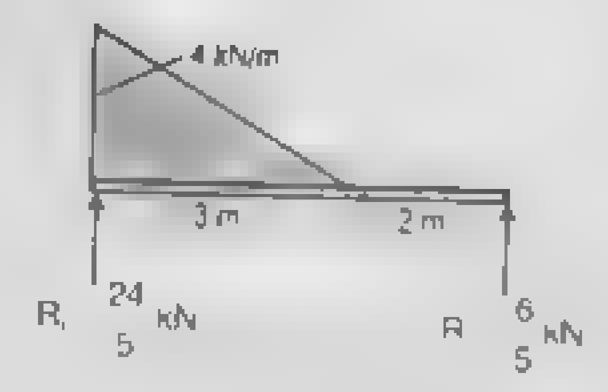
- **Carga 1**



Caso 7 $6\frac{A\bar{a}}{L} = \frac{M}{L}(3a^2 - L^2)$

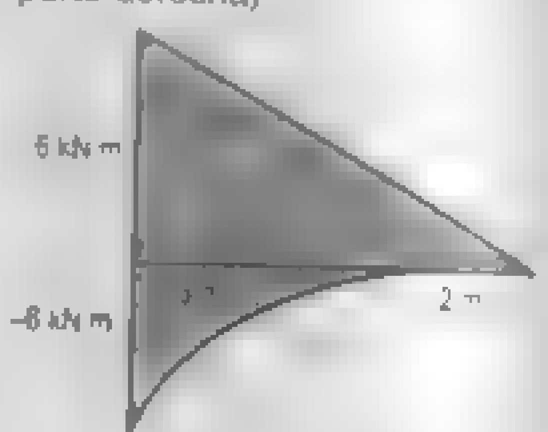
Así $6\frac{A\bar{a}}{L} = \frac{4}{5}(3(4)^2 - 5^2) = \frac{92}{5}$ kN m²

- Carga 2



Haciendo el diagrama de momentos (de la parte derecha)

$$M(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x & ; x \in \langle 0;5 \rangle \\ -\frac{2}{9}(x-2)^3 & ; x \in \langle 2;5 \rangle \end{cases}$$



Por área de momentos:

$$A.\bar{x} = \frac{1}{2}(6)(5)\left(\frac{1}{3}.5\right) - \frac{1}{4}(3)(6)\left(\frac{1}{5}(3)\right) \Rightarrow A.\bar{x} = \frac{223}{10}$$

Luego: $\frac{6A\,\bar{x}}{L} = \frac{6}{5}\frac{(223)}{10}$; $\frac{6A\,a}{L} = \frac{669}{25}$ kN.m² ...(3)

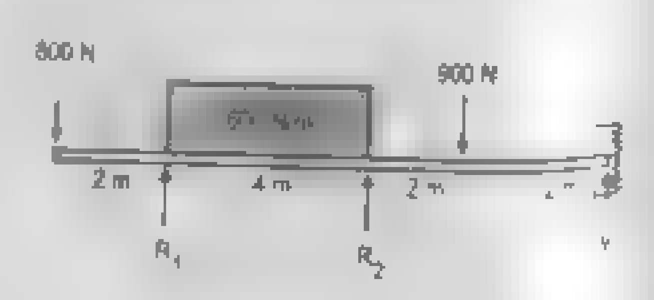
Llevando (2) y (3) en (1):

$$5(-6) + 10M_2 = \frac{669}{25} \Rightarrow M_2 = \frac{228}{125} \text{ kN.m}$$

Tomando momentos en (2)

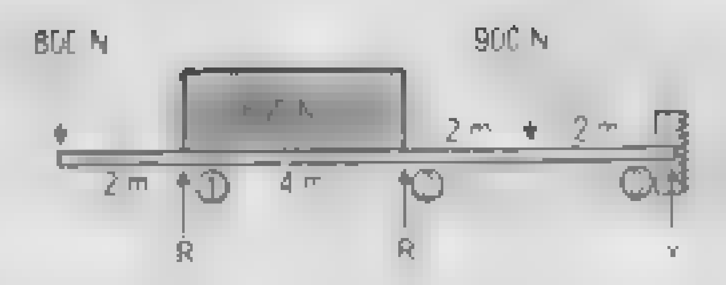
$$-6(6,5) + 5R - \frac{1}{2}(4)(3)\left(2 + \frac{2}{3}(3)\right) + 4\frac{228}{125} \Rightarrow \boxed{R = \frac{7603}{625} \text{ kN}}$$

845. Calcular los momentos en los apoyos y empotramientos en la viga de la figura, y trazar el diagrama de fuerza cortante



Resolución:

Del diagrama



Por el teorema de los tres momentos

- Claros (1-2) y (2-3)

$$4M_1 + 16M_2 + 4M \quad \frac{6A\,a}{L} \quad \frac{6A\,b}{L} \qquad ...(1)$$

- Claro (2-3) (viga empotrada)

$$4M_2 + 8M_3 = -\left(\frac{6A\,\bar{a}_2}{L_2}\right) \qquad ...(2)$$

Por momentos en (1)

$$\boxed{M_1 = -(800)(2) = -1600 \text{ N.m}} \qquad ...(3)$$

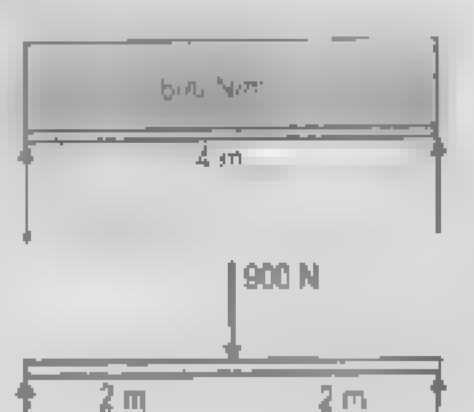
Calculando ($6A.\bar{a}/L$):

Por caso 2:

$$\frac{6A\,\bar{a}_1}{L_1} = \frac{wL^3}{4} = \frac{(600)(4)^3}{4} = 9600$$

Por caso 1

$$6\frac{A\,a}{L} \quad 6\frac{A\,b}{L} \quad \frac{P\,a}{L} \quad a$$



Para el problema a 2 P 900 L 4

$$6\frac{A\,a}{L} \quad 6\frac{A\,b}{L} \quad \frac{900\;\;2}{4} \quad 4 \quad 2^2 \quad 5400$$

Llevando a las ecuaciones (1) y (2)

$$4 \quad 1600 \; + 16M_2 + 4M \quad -(9600 + 5400)$$

$$4M_2 + 8M \quad 5400)$$

Resolviendo el sistema

$$M \quad \frac{2950}{7} N.m \qquad M \quad \frac{3..0}{7} N.m$$

Tomando momentos en ③ y en ②

800 10 8R 4R 600 4 6 900 2 M_1

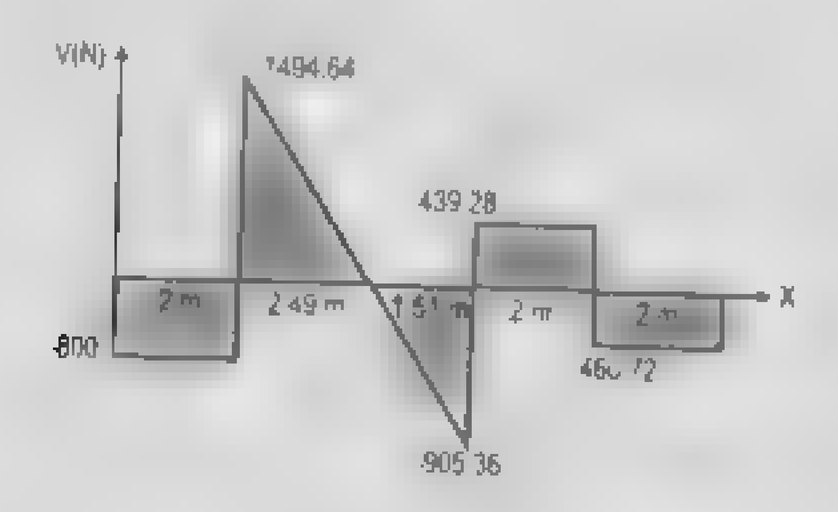
$-800(6) + 4R_1 - (600)(4)(2) = M_2$

Resolviendo

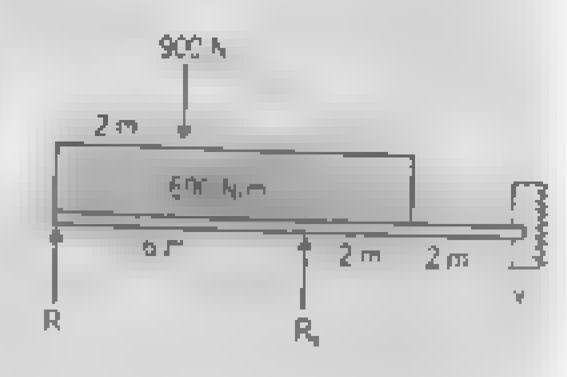
$R_1 = 2294.64$ N

$R_2 = 1344.64$ N

Diagrama de cortantes

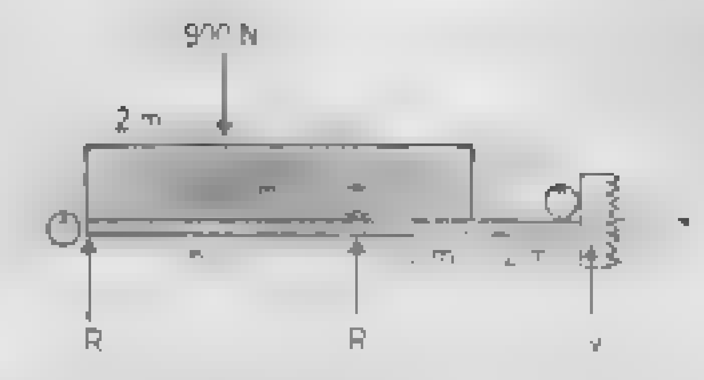


846 Dibujar el diagrama de fuerza cortante en la viga continua de la figura



Resolución:

Del diagrama



Por el teorema de los tres momentos

- Claros (1-2) y (2-3)

$$6M \quad + 20M \quad + 4M \quad \frac{6A\bar{a}}{L} \quad \frac{6A}{} \qquad (1)$$

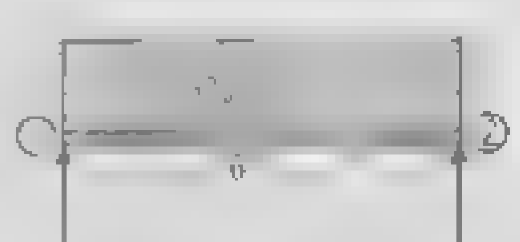
- Claro (2-3) por viga empotrada

$$4M_2 + 8M \quad \frac{6A}{L}$$

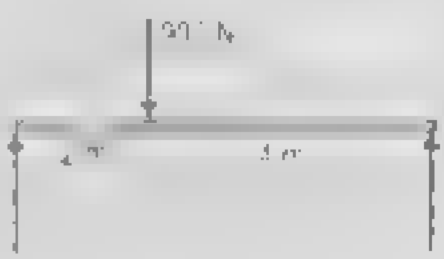
Por definición de momentos:

Hallando ($6A\bar{a}/L$)

- Claro (1-2): (dos cargas superpuestas)



$$\frac{6A\bar{a}}{L} \quad \frac{(600)(6)^3}{4} = 32\,400 \text{ N.m}^2$$

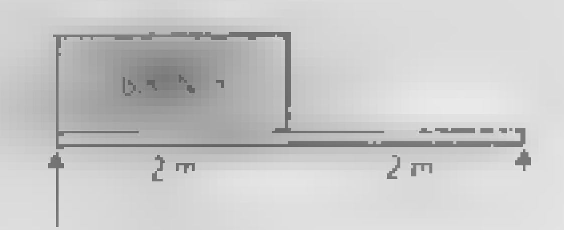


$$\frac{6A\bar{a}}{L} \quad \frac{(900)}{6}(2)(6^2 - 2^2) = 9600 \text{ N.m}^2$$

Sumando las cargas

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = (32\,400 + 9600) = 42\,000 \text{ N.m}^2 \qquad (4)$$

- Claro (2-3)



Caso 6

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{w}{4L}[b^2(2L^2 - b^2) - a^2(2L^2 - a^2)]$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{w}{4L}[d^2(2L^2 - d^2) - c^2(2L^2 - c^2)]$$

Del problema: $a = 0$; $b = 2$ m ; $c = 2$ m ; $d = 4$ m

$L = 4$; $w = 600$ N/m

Así $\frac{6A\bar{a}_2}{L} = 4200 \text{ N m}^2$; $\frac{6A\bar{b}_2}{L} = 5400 \text{ N m}^2$

En (1) y (2)

$$20M_2 + 4M_3 = -(42\,000 + 5400)$$

$$4M_2 + 8M_3 = -(4200)$$

Resolviendo

$$\boxed{M_2 = -\frac{7550}{3} \text{ N m}} \qquad \boxed{M_3 = \frac{2200}{3} \text{ N m}}$$

Tomando momentos en ③ y ②

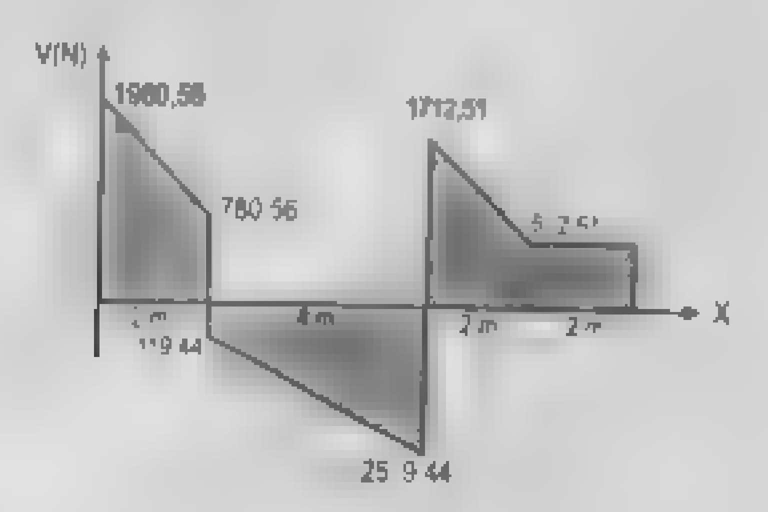
$$10R_1 + 4R_2 - 900(8) - (600)(8)(2+4) = M_3$$

$$6R_1 - 900(6-2) - (600)(6)(3) = M_2$$

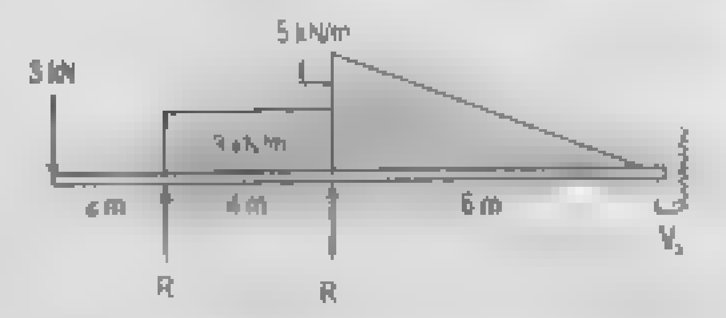
Resolviendo el sistema

$$R_1 = 1980.56 \text{ N} , R_2 = 4231.95 \text{ N}$$

Gráfica de los cortantes

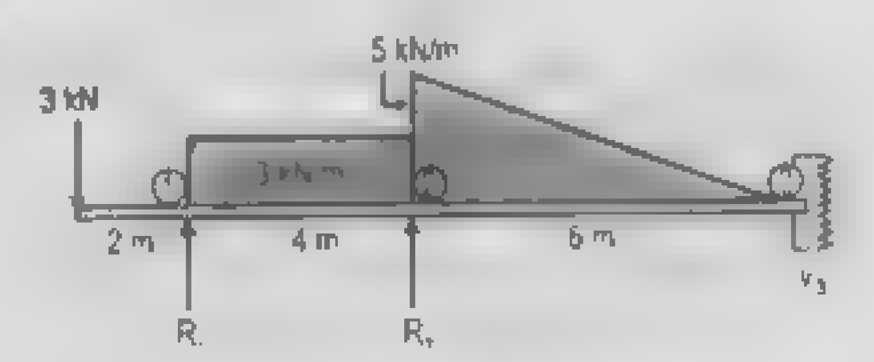


Calcular los momentos en los apoyos y trazar el diagrama de fuerza cortante en la viga de la figura.



Resolución.

Del diagrama



Por el teorema de los tres momentos

- Claros (1-2) y (2-3)

$$4M_1 + 20M_2 + 6M_3 = -\frac{6A\bar{a}}{L} - \frac{6A\bar{b}}{L} \qquad (1)$$

- Claro (2-3) y viga empotrada

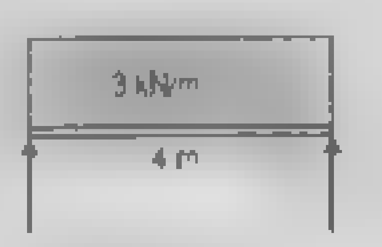
$$6M_2 + 12M_3 = -\left(\frac{6A\bar{a}_2}{L}\right) \qquad (2)$$

Por definición de momentos

$$\boxed{M_1 = -3(2) = -6 \text{ kN m}} \qquad (3)$$

Para las expresiones $\frac{6A\bar{a}}{L}$

- Claro (1-2)



por caso 2 $\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{wL^3}{4} = \frac{3(4)^3}{4} = 48 \text{ kN m}^2$ (4)

- Claro (2-3)

por **caso 4**

$$\frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2}=\frac{8}{60}wL^3=\frac{8}{60}(5)(6)^3=144\ \text{kN.m}^2 \quad ...(5)$$

$$\frac{6A_2\bar{a}_2}{L_2}=\frac{7}{60}wL^3=\frac{7}{60}(5)(6)^3=126\ \text{kN.m}^2 \quad ...(6)$$

Llevando las expresiones (3), (4), (5), (6) a las ecuaciones (1) y (2)

$$4(-6)+20M_2+6M_3=-(48+144)$$

$$6M_2+12M_3=-126$$

Donde $M_2=-\frac{105}{17}$ kN.m $\qquad M_3=-\frac{126}{17}$ kN.m

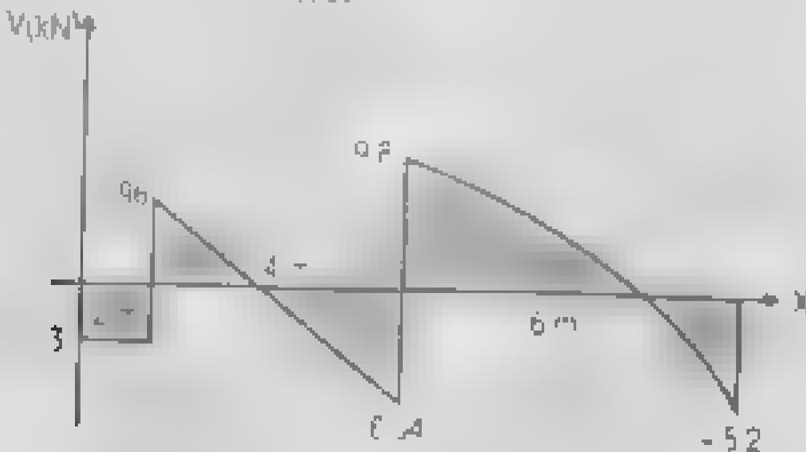
Tomando momentos en ③ y ②

$$3(6)+4R_1-3(4)(2)=M_2$$

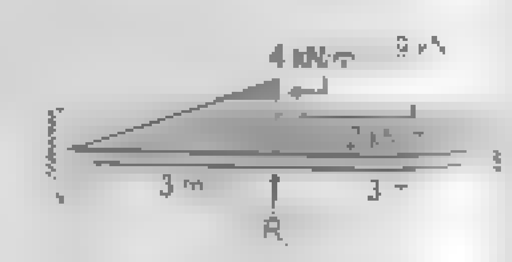
Resolviendo

$R_1=6.96$ kN ; $R_2=15.84$ kN

Gráfica de las fuerzas cortantes:

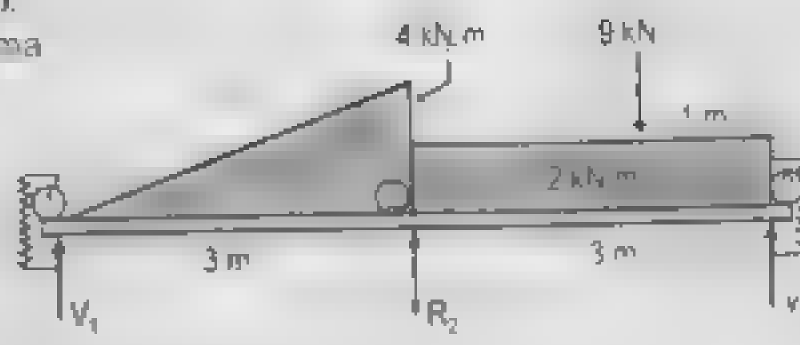


848 Determinar los momentos en los apoyos y las reacciones en la viga continua de la figura



Resolución.

De sistema



Por el teorema de las tres momentos en:

- Viga empotrada-claro (1-2)

$$6M_1+3M_2=-\frac{6A\bar{b}}{L} \quad ...(1)$$

- Claros (1-2) y (2-3)

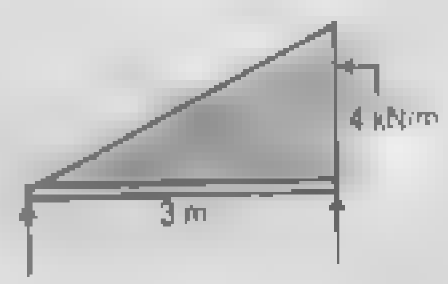
$$3M_1+12M_2+3M_3=-\frac{6A\bar{a}}{L}-\frac{6A\bar{b}}{L} \quad ...(2)$$

- Claro (2-3) y la viga empotrada

$$3M_2+6M_3=-\frac{6A\bar{a}}{L} \quad ...(3)$$

Hallando las expresiones $\frac{6A\bar{a}}{L}$

- Claro (1-2):



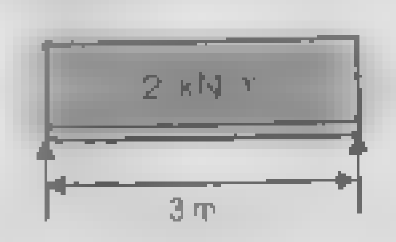
Caso 3

$$\frac{6A\bar{a}}{L}=\frac{8}{60}wL^3=\frac{8(4)(3)^3}{60}=14.4\ \text{kN.m}^2 \quad ...(4)$$

$$\frac{6A\bar{b}}{L}=\frac{7}{60}wL^3=\frac{7(4)(3)^3}{60}=12.6\ \text{kN.m}^2 \quad ...(5)$$

- Claro (2-3) hay dos cargas superpuestas.

Carga 1:



Caso 2

$$\frac{6A\,\bar{a}_2}{L_2} = \frac{6A\,\bar{b}_2}{L_2} = \frac{wL^3}{4} = \frac{2(3)^3}{4} = 13.5\ \text{kN.m}^2$$

9 kN

2 m 1 m

Caso 1

$$\frac{6A\,\bar{a}}{L} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2)\ ;\quad \frac{6A\,\bar{a}_{2_1}}{L_2} = \frac{9(2)}{3}(3^2 - 2^2) = 30\ \text{kN.m}^2$$

$$\frac{6A\,\bar{b}}{L} = \frac{Pb}{L}(L^2 - b^2)\ ,\ b = 1 \Rightarrow \frac{6A\,\bar{b}_{2_2}}{L_2} = \frac{9(1)}{3}(3^2 - 1^2) = 24\ \text{kN.m}^2$$

Sumando las cargas

$$\frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} = \frac{6A\,\bar{a}_{2_1}}{L_2} + \frac{6A.\bar{a}_{2_2}}{L_2} = (13.5 + 30) \Rightarrow \frac{6A.\bar{a}_2}{L_2} = 43,5\ \text{kN.m}^2 \quad \dots(6)$$

$$\frac{6A.\bar{b}_2}{L_2} = \frac{6A\,\bar{b}_{2_1}}{L} + \frac{6A\,\bar{b}_{2_2}}{L} = (13.5 + 24) \Rightarrow \frac{6A.\bar{b}_2}{L_2} = 37,5\ \text{kN.m}^2 \quad \dots(7)$$

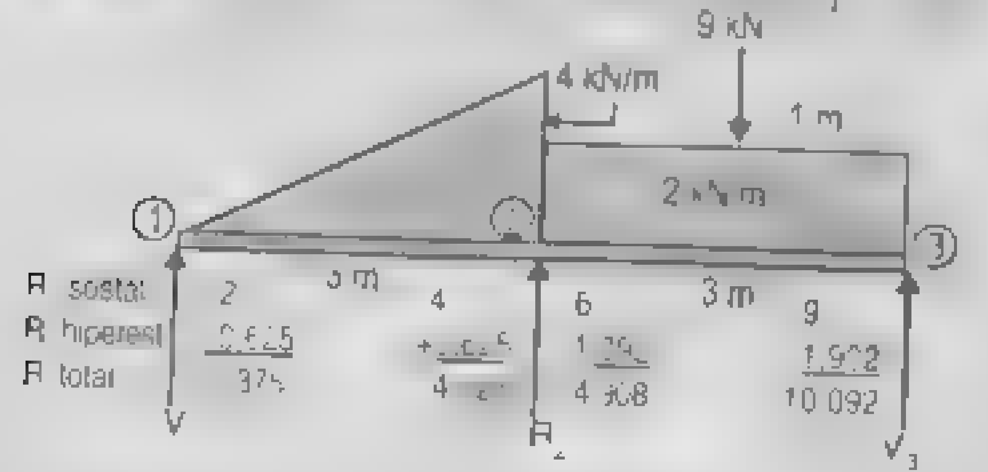
Llevando todas las ecuaciones a los sistemas (1), (2) y (3)

$$6M_1 + 3M_2 = -12,6$$

$$3M_1 + 12M_2 + 3M_3 = -(14,4 + 37,5)$$

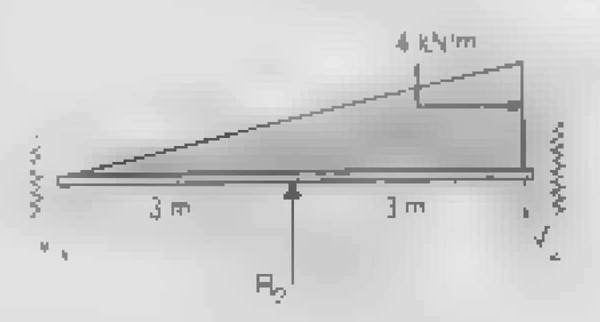
$$3M_2 + 6M_3 = -43.5$$

Resolviendo: M_1 ... kN.m ; $M_2 = -2,65$ kN.m ; $M_3 = -5,925$ kN.m



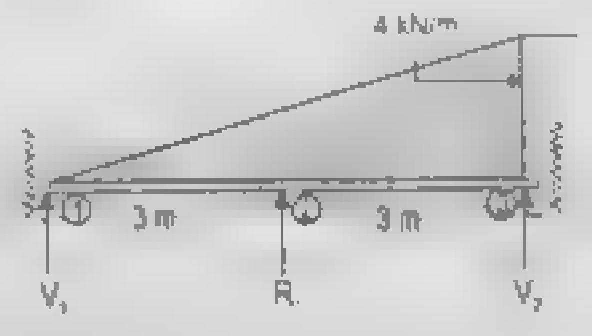
Donde: $V_1 = 1{,}375$ kN ; $R_2 = 9{,}533$ kN ; $V_3 = 10{,}092$ kN

Calcular los momentos en los apoyos de la viga de la figura



Resolución:

De sistema



Por el teorema de los tres momentos en

- Viga empotrada - claro (1-2)

$$6M_1 + 3M_2 = -\frac{6A\,\bar{b}_1}{L_1} \quad (1)$$

- Claros (1-2) y (2-3)

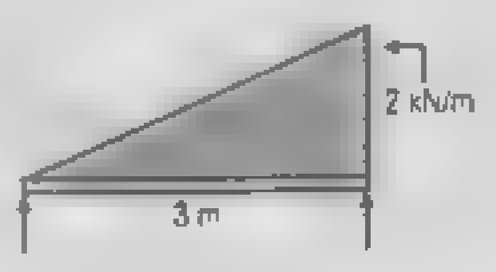
$$3M_1 + 12M_2 + 3M_3 = -\frac{6A\,\bar{a}_1}{L_1} - \frac{6A\,\bar{b}_2}{L_2} \quad (2)$$

- Claro (2-3) y viga empotrada.

$$3M_2 + 6M_3 = -\frac{6A\,\bar{a}_2}{L_2} \quad (3)$$

Hallando las relaciones $(6A.\bar{a})/L$

- Claro (1-2):



Caso 3:

$$\frac{6A\,\bar{a}}{L_1} = \frac{8}{60}(2)(3)^3 = 7,2\ \text{kN m}^2$$

$$\frac{6A\,\bar{b}}{L_1} = \frac{7}{60}(2)(3)^3 = 6,3\ \text{kN.m}^2$$

- Claro (2-3). Hay dos cargas superpuestas

$$\frac{6A\bar{a}}{L_2} = \frac{w}{4} \cdot \frac{8}{60}wL^3 = \frac{23}{60}(2)(3)^3$$

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{207}{10}\ \text{kN.m}^2 = 20{,}7\ \text{kN.m}^2$$

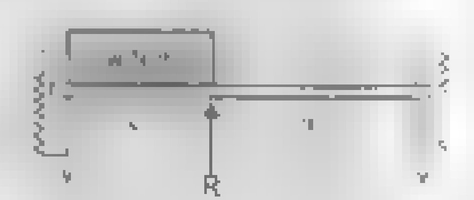
$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{w}{4} \cdot \frac{7}{\ }wL^3 = \frac{22}{60}(2)(3)^3 \quad \frac{6A\bar{b}}{L} = 19{,}8\ \text{kN.m}$$

Se forman las ecuaciones:

$$\begin{cases} 6M_1 + 3M_2 = -6{,}3 \\ 3M_1 + 12M_2 + 3M_3 = -(7{,}2 + 1{,}8) \\ 3M_2 + 6M_3 = -20{,}7 \end{cases}$$

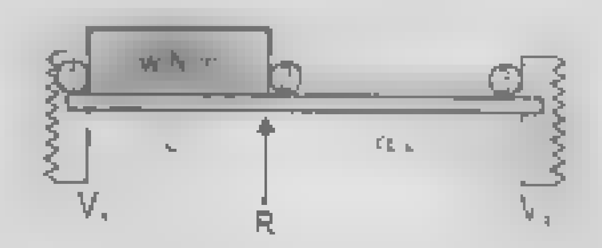
Resolviendo: $M_1 = -0{,}3$ kN.m ; $M_2 = 1{,}5$ kN.m ; $M_3 = -2{,}7$ kN.m

850 Determinar los momentos en los apoyos de la viga cargada como indica la figura



Resolución

Del diagrama



Por el teorema de los tres momentos

- Viga empotrada-claro (1-2)

$$2LM_1 + LM_2 = -\frac{6A\bar{b}}{L} \qquad ...(1)$$

- Claros (1-2) y (2-3)

$$LM_1 + 2(L + \alpha L)M_2 + \alpha LM_3 = -\frac{6A\bar{a}}{L} \qquad ...(2)$$

- Claro (2-3)-viga empotrada

$$\alpha LM_2 + 2\alpha LM_3 = 0 \qquad ...(3)$$

- claro (1-2)

$$\frac{6A\bar{a}_1}{L_1} = \frac{6A\bar{b}_1}{L_1} = \frac{wL^3}{4} \quad ...(4)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$2M_1 + M_2 = -\frac{wL^2}{4}$$

$$M_1 + 2(1+\alpha)M_2 + \alpha M_3 = -\frac{wL^2}{4}$$

$$M_2 + 2M_3 = 0$$

Resolviendo:

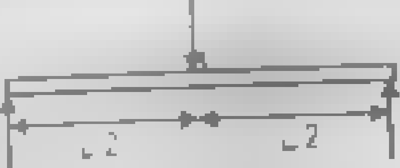
$M_1 = -\frac{wL^2}{8}\left(\ \right)$; $M_2 = \frac{wL^2}{8}\left(\ \right)$; $M_3 = \frac{wL^2}{8}\left(\ \right)$ [illegible]

8[illegible] Sustituir la carga distribuida del problema anterior, por una carga concentrada P en el centro del claro, y calcular los momentos en los apoyos

Resolución

Tiene las mismas ecuaciones del problema anterior salvo en el claro (1-2) donde hay una carga concentrada P

- Claro (1-2)



donde: $\frac{6A\bar{a}}{L_1} = \frac{6A\bar{b}}{L_1} = \frac{P}{L}\left(L^2 - (L/2)^2\right)$ o $\frac{6A\bar{a}_1}{L} = \frac{6A\bar{b}_1}{L_1} = \frac{3}{8}PL^2$

Así el sistema de ecuaciones es

$$2M_1 + M_2 = -\frac{3}{8}PL$$

$$M_1 + 2(1+\alpha)M_2 + \alpha M_3 = -\frac{3}{8}PL$$

$$M_2 + 2M_3 = 0$$

Resolviendo.

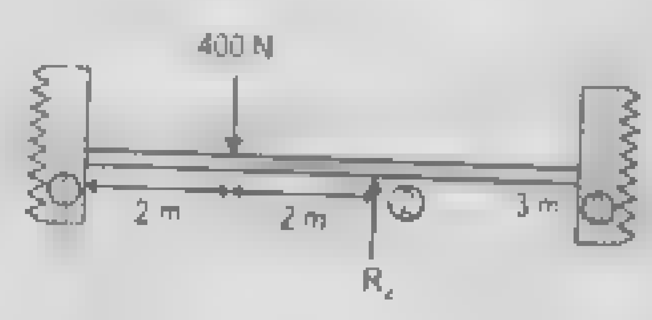
$$\boxed{M_1 = -\frac{3PL}{16}\frac{(2+3\alpha)}{(3+3\alpha)}} \quad \boxed{M_2 = -\frac{3PL}{16}\frac{2}{(3+3\alpha)}} \quad \boxed{M_3 = \frac{3PL}{16}\frac{1}{(3+3\alpha)}}$$

852 Aplicar los resultados de los problemas 850 y 851 para confrontar la solución del ejemplo 828.

Resolución.

El problema 828 lo dividimos en dos partes

Parte 1:



Del problema anterior

Si: P = 400 N ; L = 4 m ; α = 3/4

$$M_{1_1} = -\frac{3}{16}(400)(4)\frac{(2+3(3/4))}{(3+3(3/4))} \qquad M_{2_1} = -\frac{3}{16}(400)(4)\frac{2}{(3+3(3/4))}$$

$$M_{3_1} = \frac{3}{16}(400)(4)\frac{1}{(3+3(3/4))}$$

Operando

$M_{1_1} = -242{,}86$ N.m ; $M_{2_1} = -114{,}29$ N.m ; $M_{3_1} = +57{,}14$ N.m

Parte 2

Donde: w = 600 N/m ; L = 3 m ; α = 4/3

Del problema 850:

$$M_{3_2} = M_1 ;\ M_{2_2} = M_2 ;\ M_{1_2} = M_3$$

$$M_{3_2} = -\frac{600}{8}(3)^2\frac{(2+3(4/3))}{(3+3(4/3))} = -578{,}57 \text{ N.m}$$

$$M_{2_2} = -\frac{600}{8}(3)^2\frac{(2)}{(3+3(4/3))} = -192{,}36 \text{ N.m}$$

$$M_{1_2} = \frac{600}{8}(3)^2\frac{(1)}{(3+3(4/3))} = +96{,}43 \text{ N.m}$$

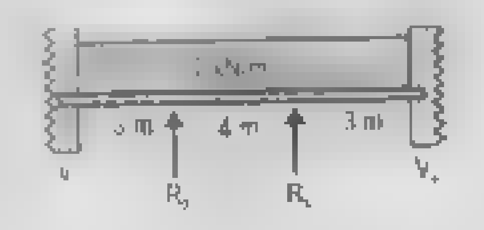
Sumando los momentos

$$M_1 = M_{1_1} + M_{1_2} = (-242{,}86 + 96{,}43) \Rightarrow \boxed{M_1 = -146{,}43 \text{ N.m}}$$

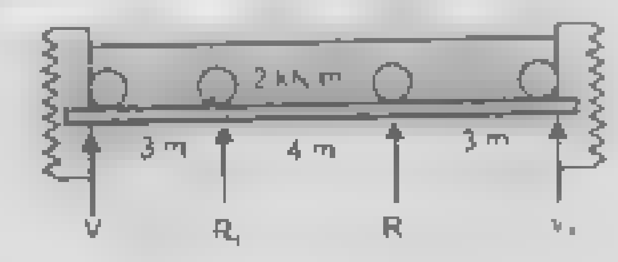
$$M_2 = M_{2_1} + M_{2_2} = (-114{,}29 - 192{,}36) \Rightarrow \boxed{M_2 = -306{,}65 \text{ N.m}}$$

$$M_3 = M_{3_1} + M_{3_2} = (57{,}14 - 578{,}57) \Rightarrow \boxed{M_3 = -521{,}43 \text{ N.m}}$$

853 En la viga continua de la figura, determinar los momentos en los apoyos y en los empotramientos. Trazar el diagrama de fuerza cortante y calcular el momento flexionante máximo positivo. Indicación: aprovechar la simetría.



Resolución:
Del diagrama



Por la simetría de la estructura

$$M_1 = M_4 \quad ; \quad M_2 = M_3 \quad y \quad V \quad V \quad R \quad R$$

Por el teorema de los tres momentos

- Claro (1-2) y viga empotrada

$$6M + 3M$$

- Claros (1-2) y (2-3)

$$3M_1 + 14M_2 + 4M_3 =$$

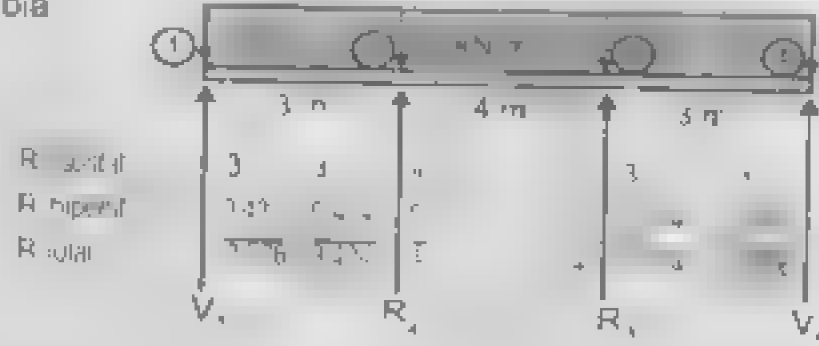
De las condiciones iniciales

$$6M_1 + 3M_2 \quad 13,5$$
$$3M_1 + 18M_2 = -45,5$$

Resolviendo

$$\boxed{M_1 = M_4 = 1,076 \text{ kN m}} \quad \boxed{M_2 = M_3 = -2,348 \text{ kN m}}$$

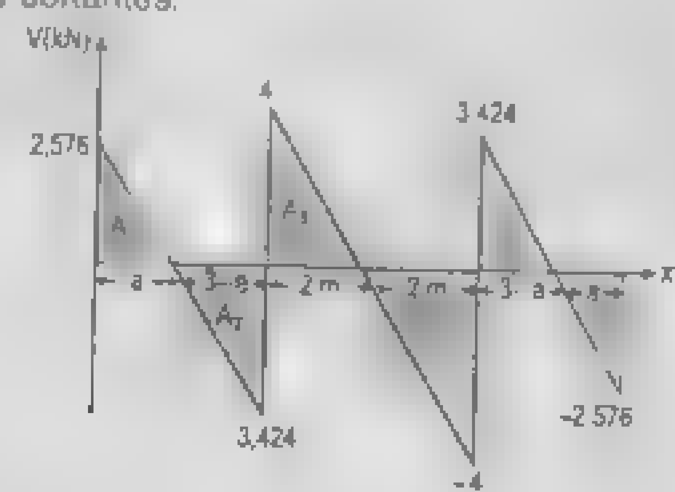
En el diagrama-tabla



$$V_1 = 2,576 \text{ kN} = V_4$$

$$R_2 = 7,424 \text{ kN} = R_3$$

Diagrama de fuerzas cortantes.



Por semejanza de triángulos $\frac{2,576}{a} = \frac{3,424}{3-a} \quad a = 1,288$

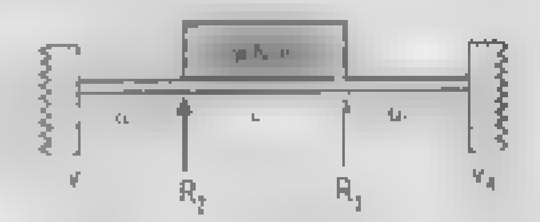
$$A_1 = \frac{1}{2}(2,576)(1,288) = 1,659; \quad A_3 = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(3,424)(3-1,288) = 2,931$$

Tenemos que el momento máximo positivo se da en $x = 5$ m

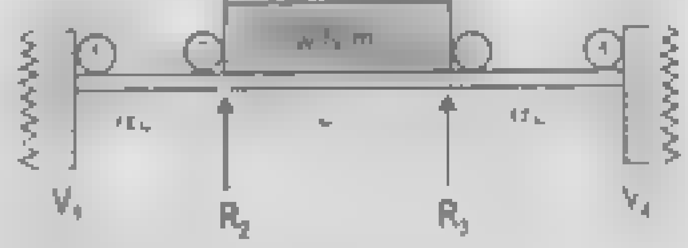
$$M_{máx} = A_1 - A_2 + A_3 + M_1 \quad \therefore \quad \boxed{M_{máx} = 1,652 \text{ kN m}}$$

Calcular los momentos en los apoyos en la viga cargada como indica la figura



Resolución.

Del sistema



Por la simetría del sistema

$$M_1 = M_4 \quad \ldots(\alpha) \quad \wedge \quad M_2 = M_3 \quad \ldots(\beta)$$

Por el teorema de los tres momentos

- Viga empotrada y claro (1-2): $2\alpha LM_1 + \alpha LM_2 = 0 \quad (1)$
- Claros (1-2) y (2-3)

$$\alpha LM_1 + 2L(1+\alpha)M_2 + LM_3 = -\frac{wL^2}{4} \quad (2)$$

De (α) y (β) en (1) y (2)

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 = 0 \\ \alpha M_1 + (3 + 2\alpha)M_2 = -\frac{wL^2}{4} \end{cases}$$

Resolviendo

$$M_1 = \frac{wL^2}{12(\alpha+2)} = M_4 \quad \boxed{M_2 = -\frac{wL^2}{6(\alpha+2)} = M_3}$$

855 Sustituyendo la carga repartida del problema anterior por una carga concentrada en el centro del claro, determinar los momentos en los apoyos

Resolución:

La carga "P" concentrada en el centro del claro (2-3) solo modifica a la ecuación (2) del problema anterior

Así la ecuación (2) sería:

$$\alpha L M_1 + 2L(1+\alpha)M_2 + LM_3 = -\frac{P}{L}(L/2)(L^2 - L^2/4) \quad \dots (2)$$

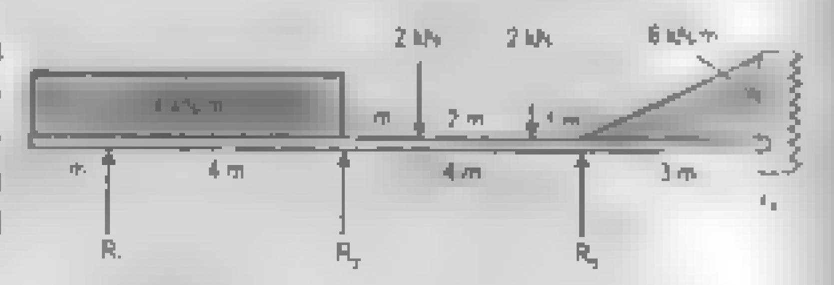
Teniendo en cuenta las demás ecuaciones

$$2M_1 + M_2 = 0$$

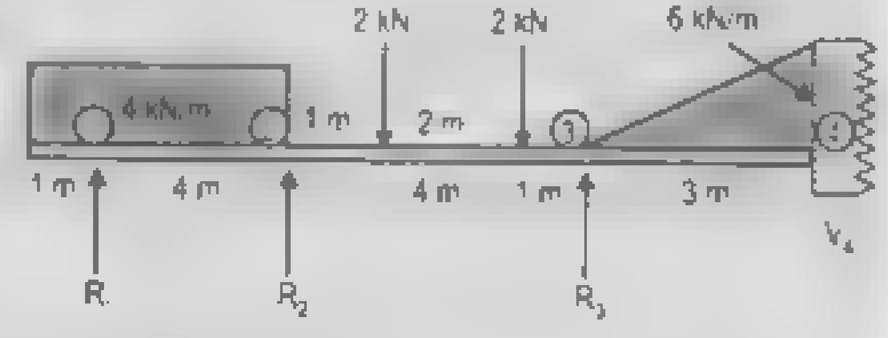
$$\alpha M_1 + (3 + 2\alpha)M_2 = \frac{3}{8}PL$$

Resolviendo: $M_1 = \frac{PL}{8}\cdot\frac{1}{(\alpha+2)} = M_4$; $M_2 = \frac{PL}{4}\cdot\frac{1}{\alpha+2} = M$

856. En la viga representada en la figura, determinar los momentos en los apoyos. Trazar el diagrama de fuerza cortante y calcular el valor del máximo momento positivo



Resolución:
De sistema



Por el teorema de los tres momentos

(en el apoyo (1): $M_1 = -4(1)\left(\frac{1}{2}\right) = -2$ kN.m)

- Claros (1-2) y (2-3)

$$4(-2) + 2(8)M_2 + 4M_3 = -\left[\frac{4(4)^3}{4} + \frac{2(3)}{4}(4^2 - 3^2) + \frac{2(1)}{4}(4^2 - 1^2)\right] \quad \dots (1)$$

- Claros (2-3) y (3-4)

$$4M_2 + 2(7)M_3 + 3M_4 = -\left[\frac{2(1)}{4}(4^2 - 1^2) + \frac{2}{4}(3)(4^2 - 3^2) + \frac{7}{60}(6)(3)^3\right] \quad \dots (2)$$

- Claro (3-4) y viga empotrada

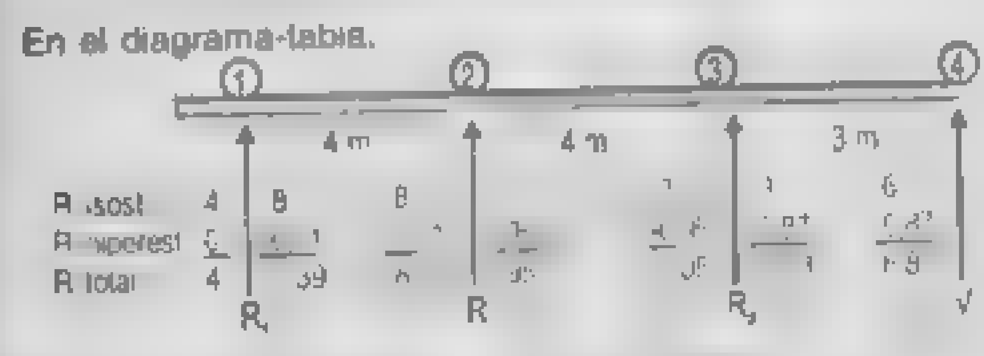
$$3M_3 + 6M_4 = -\left[\frac{8}{60}(6)(3)^3\right] \quad \dots (3)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$16M_2 + 4M_3 = -74$$
$$4M_2 + 14M_3 + 3M_4 = -36{,}9$$
$$3M_3 + 6M_4 = -21{,}6$$

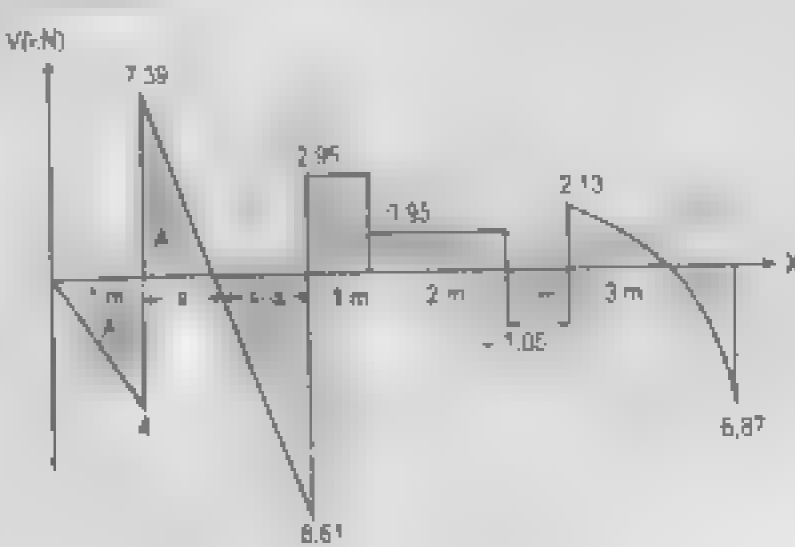
Donde M_2 = 4,4508 kN.m ; M [illegible] kN.m
M_4 = 3,2096 kN.m ; M = 2 kN.m

En el diagrama-tabla.



Donde R1 = 11,39 kN ; R = 11,56 kN
R = 3,18 kN ; R = 6,87 kN

Gráfica de fuerzas cortantes



Vemos que el momento máximo positivo se da en x = (1+a) m

$\Rightarrow M_{máx} = -A_1 + A_2$ ... (1)

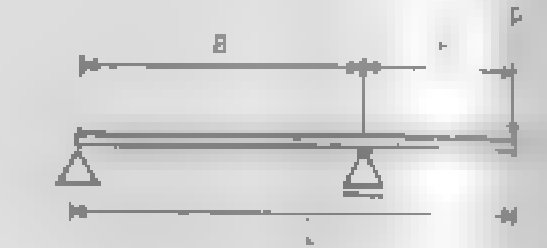
Por semejanza de triángulos

$$\frac{7,39}{a} = \frac{8.61}{4-a} \Rightarrow a = 1,8475 \text{ m}$$

$$M_{máx} = -\frac{1}{2}(4)(1) + \frac{1}{2}(7,39)(1,8475) \therefore \boxed{M_{máx} = 4,83 \text{ kN m}}$$

857, 858: problemas ilustrativos

859 Determinar el valor de EIδ bajo P en la figura. ¿Qué se obtendrá si P se sustituyese por un par con sentido del reloj M?



Resolución:
Del sistema

Por definición de momentos $M_1 = M_3 = 0$

En el apoyo ②: $M_2 = -bP$ ... (1

Por el teorema de los tres momentos: (claros (1-2) y (2-3))

$$aM_1 + 2(a+b) M_2 + bM_3 + \frac{6A\bar{a}}{L_1} + \frac{6A\bar{b}}{L_2} = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_3}\right)$$

Los términos $\frac{6A\bar{a}}{L_1} \wedge \frac{6A\bar{b}}{L_2}$ son nulos dado que no hay cargas en sus claros

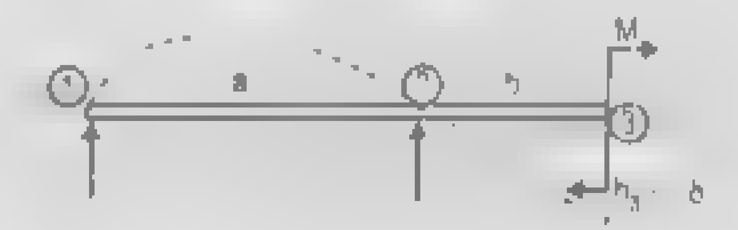
$h_1 = 0 \wedge h_3 = -\delta$ (ya que se encuentra debajo de la horizontal)

$L_1 = a \quad L_2 = b$

Resolviendo (1) y (2): $2(a+b)(-bP) = -\frac{\delta}{b}(6EI)$

Despejando: $\boxed{EI\delta = \frac{PLb^2}{3}}$ dado que (a + b) = L

Al cambiar P por un par de valor M tenemos



Por lo mismo: $M_1 = M_3 = 0$

En el apoyo ②: $M_2 = -M$ ... (1)

Por el teorema de los tres momentos en los claros (1 2) y (2-3)

$$2(a+b) M_2 + 6\frac{A\bar{a}}{L_1} + \frac{6A\bar{b}}{L_1} = 6EI\left(\frac{-\delta}{b}\right) \quad ...(2)$$

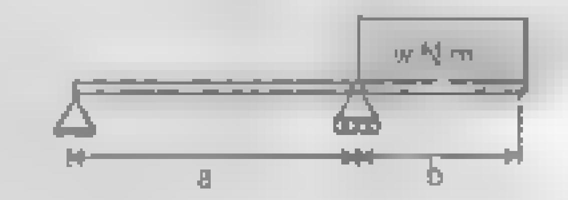
Pero $6\frac{A\bar{a}}{L} = 0$

Además en $\frac{6A\bar{b}}{L_2}$ $\frac{M}{b}$ ... M_1

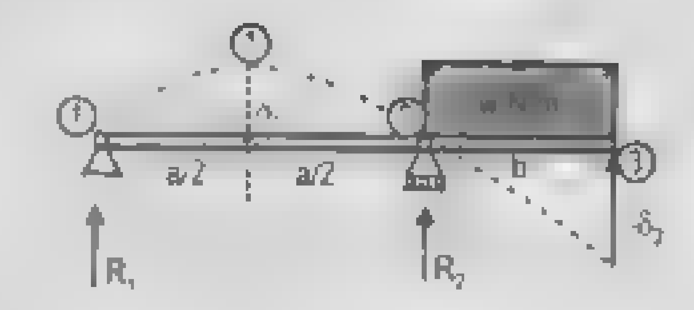
Caso 7,

En (2): $2(L)(-M) - Mb = 6EI\frac{(-\delta)}{b}$ o $\boxed{EI\delta = Mb(2L+b)/6}$

860 Determinar el valor de EIδ en el extremo del voladizo y en el punto medio del claro en la viga de la figura.



Resolución
Del diagrama



Tomando los tramos (1-2) y (2-3), donde

- Tramo (1-2): $\frac{6A\bar{a}}{L_1} = 0$ (no hay carga)

- Tramo (2-3). $\frac{6A\bar{b}}{L_1} = \frac{wb^3}{4}$ ... (1)

Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-3)

$$aM_1 + 2(a+b)M_2 + bM_3 + \frac{6A\bar{a}}{L} + \frac{6A\bar{b}}{L} = 6EI\left(\frac{h}{a} + \frac{\delta_2}{b}\right) \quad (2)$$

Por momentos en el apoyo (2)

$$M_2 = wb\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{w}{2}b^2 \quad (3)$$

Además. $M_1 = 0 = M_3$ (4)

Así: $2(a+b)\frac{w}{2}b^2 + \frac{wb^3}{4} = \frac{6}{b}\delta_2 EI$

o $\boxed{EI\delta_2 = \frac{4a+3b}{24}b^3 w}$ (α)

Para hallar δ_1 en el punto medio del claro toma por el teorema de los tres momentos en los tramos: (1-2) y (2-3), así

$$\frac{a}{2}M_1 + 2\left(\frac{a}{2}+b\right)M_2 + \frac{wb^3}{4} = 6EI\left(\frac{\delta_1}{a/2} - \frac{\delta_2}{b}\right) \quad (5)$$

Tomando momentos en el apoyo (2)

$$R_1(a) + \frac{wb^2}{2a} = 0$$

Así $R_1 = -\frac{wb^2}{2a}$ (6)

Tomando momentos en (1)

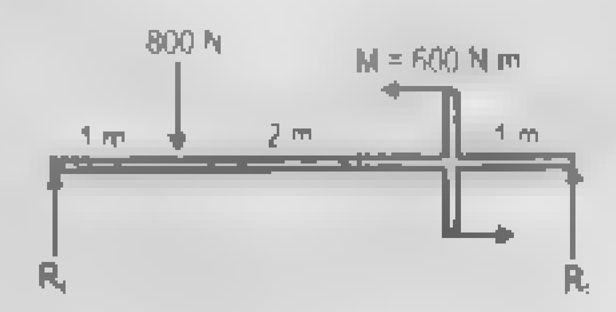
$$M_1 = \frac{wb^2}{2a}\cdot\frac{a}{2} = \frac{wb^2}{4} \quad (7)$$

Llevando a la ecuación (5)

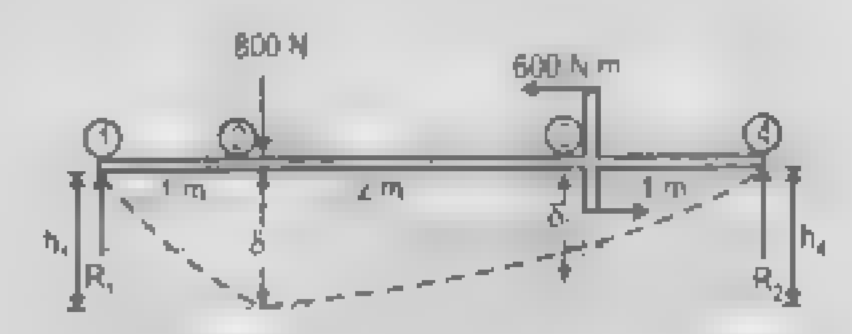
$$\frac{a}{2}\left(\frac{wb^2}{4}\right) + 2\left(\frac{a}{2}+b\right)\left(\frac{w}{2}b^2\right) + \frac{wb^3}{4} = 6EI\left(\frac{\delta_1}{a/2} - \frac{\delta_2}{b}\right)$$

Reemplazando el valor de (α): $\boxed{EI\delta_1 = \frac{3}{96}a^2b^2w}$

861 Para la viga de la figura determinar el valor de $EI\delta$ a 1 m y a 3 m del apoyo izquierdo



Resolución
Del diagrama



Por las ecuaciones de la estática $M_1 = 0 = 4R_2 + 600 - 800$

Así $R_2 = 50$ N

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_1 + 50 = 800$

$R_1 = 750$ N

$M_2 = 750(1) = 750$ N.m ; $M_3 = 50(1) = 50$ N.m

También. $M_1 = M_4 = 0$; donde $\delta_1 = h_1 = h_4$

Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-4)

$2(1)M_1 + \ldots - 3(1)\ldots 3 \quad 6EI\left(\frac{h}{1} \; \frac{h}{3}\right)$ utilizando el caso 7

$$8(750) + 1200 = 8EI\delta_1 \quad \Rightarrow EI\delta_1 = 900 \text{ N.m}^3$$

Teorema de los tres momentos en los tramos (1-3) y (3-4)

$$2(4)M_3 + 6\frac{A\,\bar{a}}{L} + \frac{6A\,\bar{b}}{L} = 6EI\left(\frac{\delta_2}{3} + \frac{\delta_2}{1}\right)$$

- En el claro (1-3): (dos cargas superpuestas)

  Caso 1 y caso 7

$$\frac{6A\,\bar{a}}{L_1} = \frac{800(1)}{3}\left(3^2 - 1^2\right) + \left(-\frac{(-600)}{3}\left(3\left(3^2\right) - 3^2\right)\right)$$

$$\frac{6A\,\bar{a}}{L} \quad 5733.3 \text{ N m}^2$$

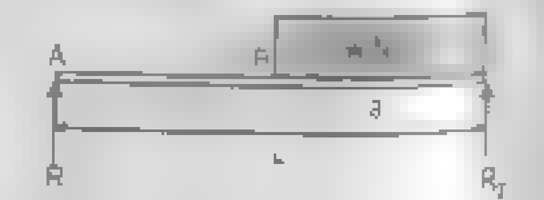
$$\frac{6A\,\bar{b}}{L_2} = 0 \text{, no hay cargas en (3-4)}$$

Así los valores: $8(50) + 5733.3 = 8EI\delta_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{EI\delta_2 = 766.6 \text{ N m}^3}$

862 Determinar el valor de $EI\delta$ en B en la viga de la figura.

Resolución:

De sistema



Por momentos $\quad M_B \quad \frac{w}{2}a^2 + aR_2$

Además $\quad M_A \quad M_C \quad 0$ ...(2)

Por el teorema de los tres momentos en los tramos (A B) y (B C)

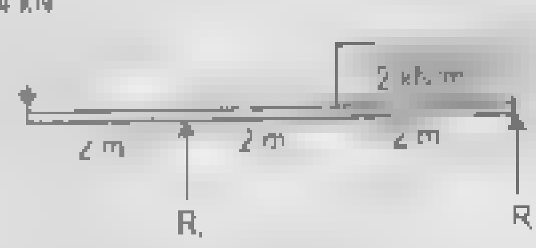
$$2LM_B + \frac{wa^3}{4} \quad 6EI\left(\frac{h}{L-a} \quad \frac{\delta}{a}\right) \quad ...(3)$$

En el apoyo A se toma momentos y por $\Sigma F_y = 0$ se tiene $R_2 = wa - \frac{wa^2}{2L}$ ...(4)

En (3) $\quad 2L\left(\frac{w}{2}a^2 \quad a\left(wa \quad \frac{wa^2}{2L}\right)\right) \quad \frac{wa^3}{4} \quad \frac{6EI\delta(L)}{\ldots a \ldots}$

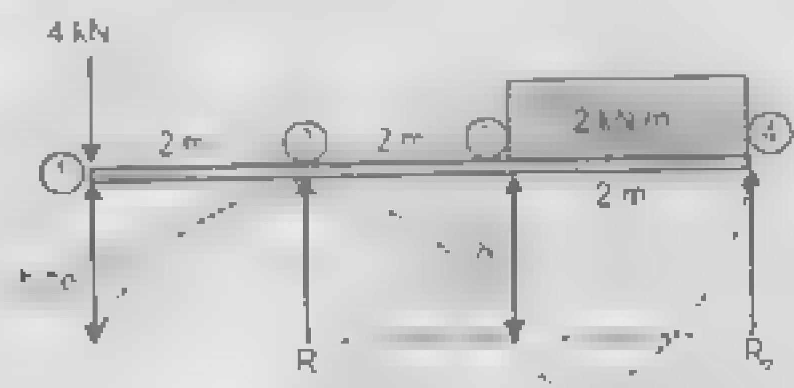
Simplificando: $\quad \boxed{EI\delta = \frac{wa}{24L}(4L - 3a)(L - a)}$

863 En la viga representada en la figura, determinar el valor de $EI\delta$ en el centro del claro y en el extremo izquierdo.



Resolución

De diagrama



Hallando las reacciones: $\Sigma M_4 = 0 = 4R_1 - 8(4) - 4(1) \quad \Rightarrow \quad R_1 = 7 \text{ kN}$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 1 \text{ kN}$

Hallando los momentos

$M_2 = -4(2) = -8 \text{ kN.m}$

$M_3 = 1(2) - 2(2)(1) = -2 \text{ kN.m}$

$M_4 \quad 0 = M_1$

Aplicando el teorema de los tres momentos a los tramos (1-2) y (2-4) donde $h_1 = -\delta_1$ y $h_4 = 0$

Luego: $$8M_2 + \frac{6A\bar{b}}{L} = 6EI\left(-\frac{\delta_1}{2}\right) \quad \ldots (1)$$

En el claro (2 4) por **caso 5**

$$\frac{6A\bar{b}}{L_2} = \frac{w}{4L}\left[d^2(2L^2 - d^2) - c^2(2L^2 - a^2)\right]$$

(en el problema: c = 0; d = 2, L = 4, w = 2

$$\frac{6A\bar{b}}{L_2} = \frac{2}{16}(4(32 - 4) = 3{,}5$$

En (1), $$8(-8) + 3{,}5 = \frac{6}{2}EI(-\delta_1)$$

Luego: $$\boxed{EI\delta_1 = 20{,}16 \text{ kN m}^3}$$

Por el teorema de los tres momentos en los claros (2-3) y (3-4), donde $h_2 = h_4 = \delta_2$

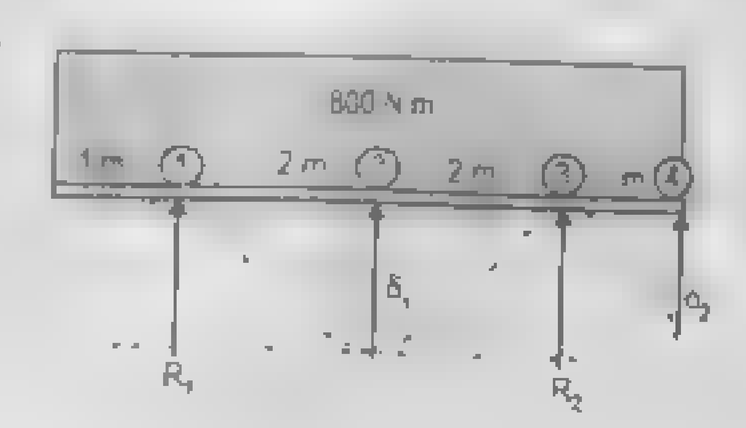
$$2M_2 + 8M_3 + \frac{2(2)^3}{4} = 6EI\left(\frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_2}{2}\right)$$

Luego: $$2(-8) + 8(-2) + 4 = 6EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta_2 = -\frac{14}{3} \text{ kN m}^3}$$

864 Una viga de 6 m de longitud simplemente apoyada a 1 m de cada extremo soporta una carga uniformemente distribuida de 800 N/m sobre toda su longitud. Calcular el valor de EIδ en el centro y en los extremos

Resolución.

Del diagrama



Por la simetría del sistema: $R_1 = R_2 = +2400$ N (1)

Además

$M_1 = M_3 = 800(0{,}5) = -400$ N.m

$$M_2 = (2400)(2) - 800(3)\left(\frac{3}{2}\right) = 1200 \text{ N m}$$

$M_4 = 0$

Para el centro del claro, tomamos los tramos (1-2) y (2-3), aplicando el teorema de los tres momentos.

$$2M_1 + 8M_2 + 2M_3 + \frac{800}{4}(2)^3 + \frac{800}{4}(2)^3 = 6EI\left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2}\right) \quad (2)$$

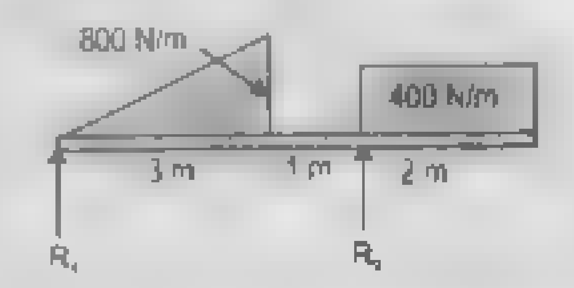
$$2(-400) + 8(1200) + 2(-400) + 800(8) = 6EI\delta_1 \Rightarrow \boxed{EI\delta_1 = 2400 \text{ N.m}^3}$$

Ahora aplicando el teorema de los tramos (1-3) y (3-4).

$$4M_1 + 10M_2 + \frac{800}{4}(4)^3 + \frac{800}{4}(1)^3 = 6EI\left(\frac{0}{4} + \frac{\delta_2}{1}\right)$$

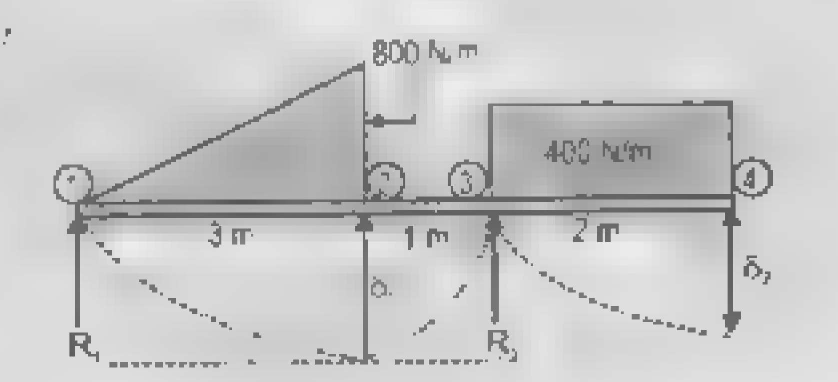
$$\frac{4(-400) + 10(1200) + 200(4^3 + 1)}{6} = EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta_2 = 3900 \text{ N m}^3}$$

865 En la viga de la figura calcular el valor de EIδ en el punto x = 3 m y en el extremo del voladizo



Resolución:

Del sistema



Por momentos en el apoyo (1

$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow 4R_2 = 400(6) + 800(5)$$

R 1600 N

ΣF 0 , R 400 N

Además

$M_3 = -400(2)(1) = -800$ N m

$M_2 = 3(400) - 400(3) = 0$ M M

Por el teorema de los tres momentos en los tramos (1-2) y (2-3)
(donde: $h_1 = h_3 = \delta_1$)

$$3M_1 + 8M_2 + (1)M_3 + \frac{8}{60}(800)(3)^3 = 6EI\left(\frac{\delta_1}{3} + \frac{\delta_1}{1}\right)$$

$$-800 + 2880 = 8EI\delta_1 \Rightarrow \boxed{EI\delta_1 = 260 \text{ N m}^3}$$

Tramos (2-3) y (3-4). ($h_2 = -\delta_1$; $h_4 = -\delta_2$)

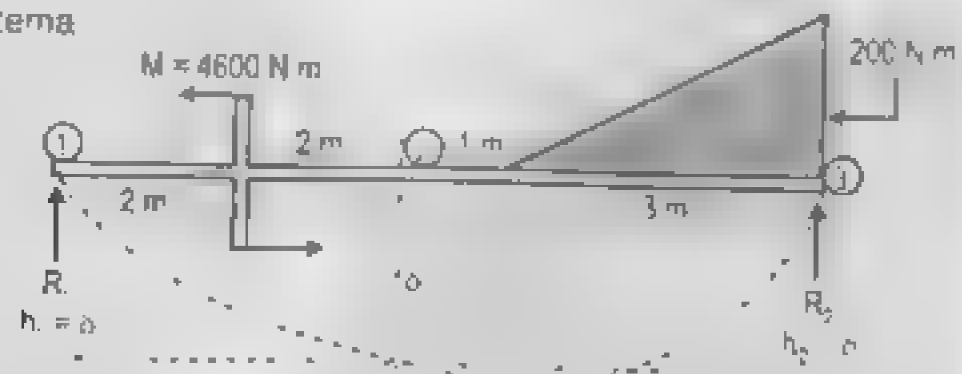
$$M + 6M + M + \frac{4}{4}(2) - 6E\left(\quad \frac{\quad}{2}\right)$$

$$6(-800) + 800 = -6EI\delta_1 - 3EI\delta_2$$

4800 + 800 6(260) 3E EI 813

866. Determinar el valor de EIδ en el centro del claro en la viga de la figura

Resolución:
Del sistema



Por el teorema de los tres momentos en los tramos 1 2 y 2 3 h h

$$4M_1 + 16M_2 + 4M_3 + \frac{6A\bar{a}}{L_1} + \frac{6A\bar{b}}{L_2} = 6EI\left(\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4}\right) \quad ...(1)$$

Pero M M 0 2

Por estática: $\Sigma M_3 = 0 = 8R_1 - 4600 - 1800 \Rightarrow R_1 = 800$ N ... (3)

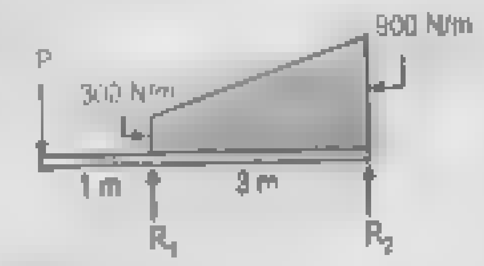
Así: $M_2 = 800(4) - 4600 = -1400$ N.m

Tramo (1-2): $\frac{6A\bar{a}}{L_1} = \frac{(-4600)}{4}(3(2)^2 - 4^2) = -4600$ N m² ... (4)

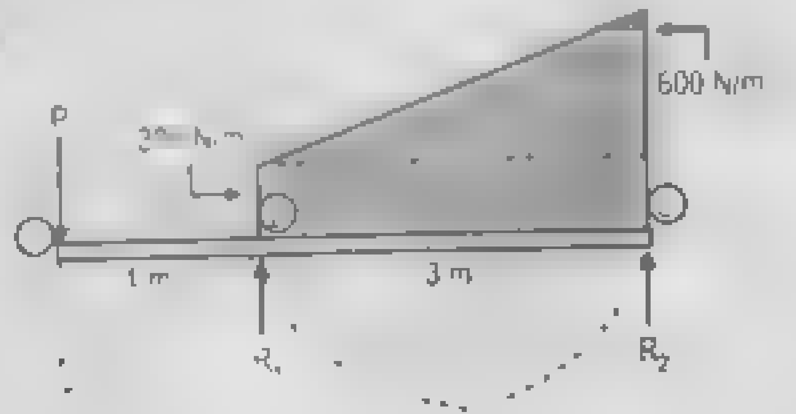
Tramo (2-3): $\frac{6A\bar{b}}{L_2} = 900(4)\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{4}(3)(3600)\left(\frac{3}{5}\right)$ 3180 N m² ... (5)

Todo en (1): $16(-1400) - 4600 + 3180 = 3EI\delta \Rightarrow \boxed{EI\delta = -7940 \text{ N.m}^3}$
(el sentido es hacia arriba)

En la viga de [illegible] que produzca una deflexión nula bajo esta fuerza.



Resolución:
Del sistema



Tenemos: $M_2 = -P$ ... (1)
Además $M_1 = M_3 = 0$ ... (2)
En el tramo (2-3)

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{300}{4}(3)^3 + \frac{7}{60}(600)(3)^3 = 3915 \text{ N m}^2$$

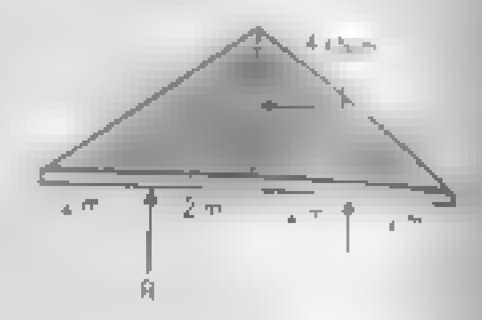
Por condición $h_1 = 0$ ...(3)

Aplicando el teorema de los tres momentos a los claros 1 2 y (2 ...) = 0,

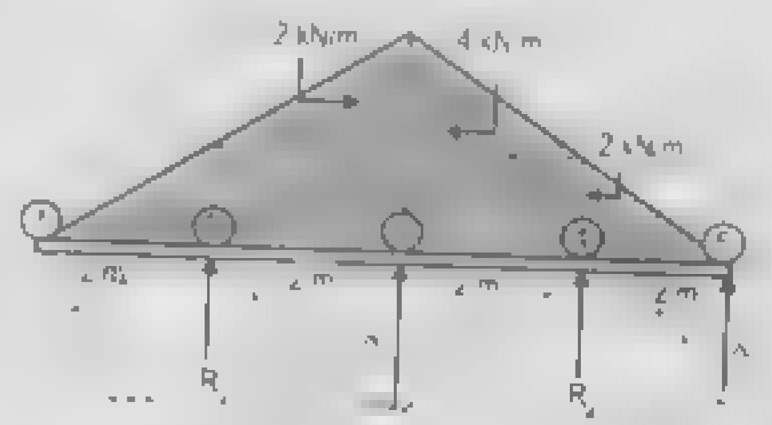
$$1M_1 + 8M_2 + 3M_3 + \frac{6A\bar{b}}{L} = 0$$

$$8(-P) + 3915 = 0 \Rightarrow \boxed{P = 489\ 375\ N}$$

868. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro y en los extremos de la viga cargada como indica la figura.



Resolución.
Del sistema



Por la simetría. R R 8 kN (1)

Hallando M 2 8) 8 $\frac{4}{3}$ 5 33 kN m (2)

M_2 M_4 2 $\frac{2}{3}$ 1 33 kN m (3)

Tramo (2-3). (casos 1 y 3)

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{2(2)^3}{4} + \frac{8}{60}(2)(2)^3 = 6{,}13\ kN.m^2$$

Tramo (3-4): (casos 1 y 4)

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{2(2)^3}{4} + \frac{8}{60}(2)(2)^3 = 6{,}13\ kN.m^2$$

Tramo (2-4): (casos 1 y 6)

$$\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{2(4)}{4} + \frac{5}{32}\ 2\ 4)\quad 52\ kN\ m^2$$

Tramo (4-5) (caso 4)

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{8}{60}(2)(2)^3 = 2{,}13\ kN\ m^2$$

Aplicando el teorema de los tres momentos

- Tramos (2-3) y (3-4). $h_2 = h_4 = \delta_1$

$$2M_2 + 8M_3 + 2M_4 + 6{,}13 + 6{,}13 = 6EI\left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2}\right)$$

$$2(-1\ 33) + 8(5{,}33) + 2(-1{,}33) + 2(6\ 13) = 6EI\delta_1 \Rightarrow \boxed{EI\delta_1 = 8.26\ kN.m^3}$$

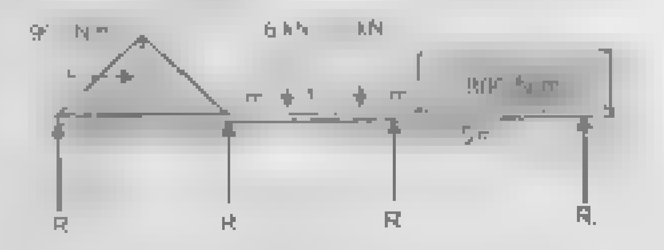
- Tramos (2-4) y (4-5): como $M_5 = 0$; $h_2 = 0$ y $h_5 = \delta_2$

$$4M_2 + 12M_4 + 52 + 2{,}13 = 6EI\left(-\frac{\delta_2}{2}\right)$$

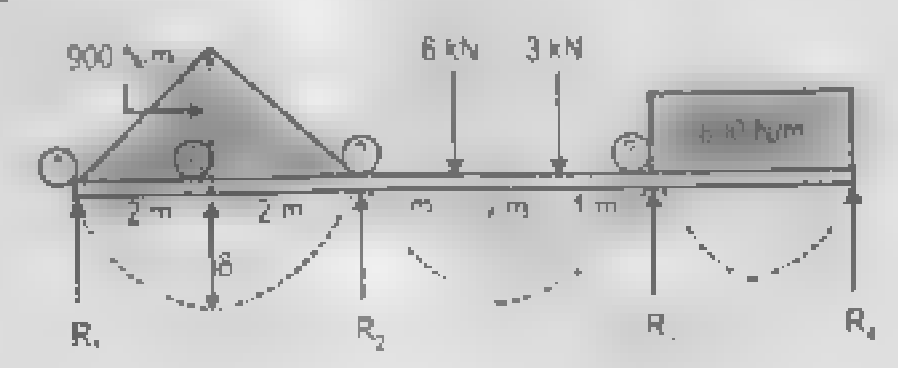
$$4(-1{,}33) + 12(-1{,}33) + 54{,}13 = -3EI\delta_2 \Rightarrow \boxed{EI\delta\quad 10\ 95\ kN.m^3}$$

(El signo negativo indica que debe tomarse δ_2 hacia arriba

869 Hallar el valor de EIδ en el centro de primer claro de la viga continua de la figura sabiendo que M_2 2040 N m y M_3 2810 N m



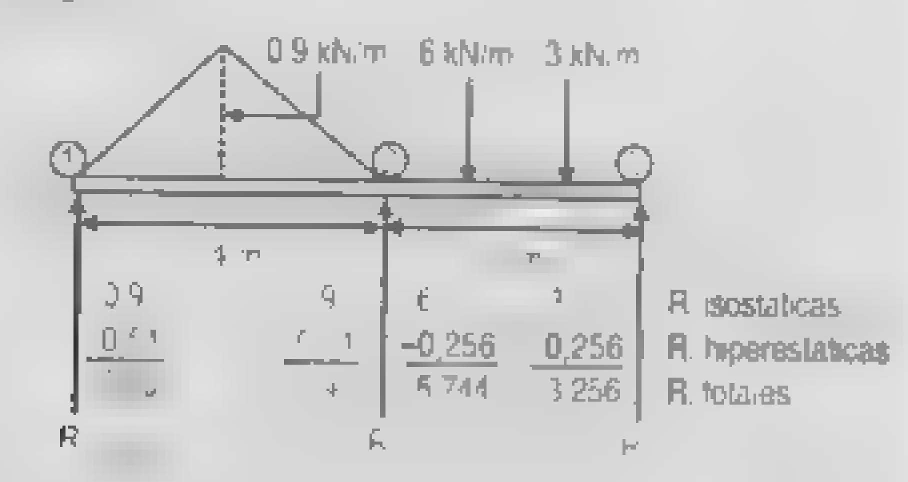
Resolución:
Del sistema



Hallando R_1, R_2 y R_3, tenemos como datos.

$$[illegible] - 2040\ N.m \quad y \quad M_3 = -2810\ N.m$$

En la tabla-diagrama



Así $\quad R_1 = 0{,}39\ kN \quad \wedge \quad R_2 = 7{,}15\ kN$

Luego $\quad M_A$ [illegible] $0{,}18\ kN.m$

Tramo (A-2): $\quad \dfrac{6A\bar{a}}{L} = \dfrac{7}{60}(0{,}9)(2)^3 = 0{,}84\ kN.m^3$

Tramo (2-3) $\quad \dfrac{6A\bar{b}}{L}$ [illegible] $28\ kN.m$

Aplicando el teorema de los tres momentos a los tramos (A-2) y (2-3), donde:

$$h_A = -\delta_1 \quad y \quad h_3 = 0$$

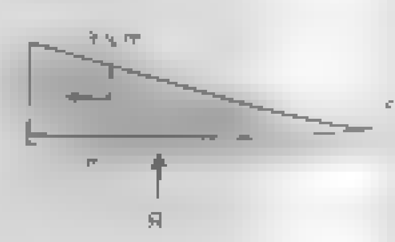
$$2M_A + 10M_2 + 3M_3 + \frac{6A\bar{a}}{L} + \frac{6A\bar{b}}{L} = 6EI\left([illegible] \right)$$

$$2(0{,}18) + 10(-2{,}04) + 3(-2\ 810) + 0{,}84 + 28 = -3EI\delta_1$$

$$\boxed{EI\delta_1 = -0\ 123\ kN.m^3}$$

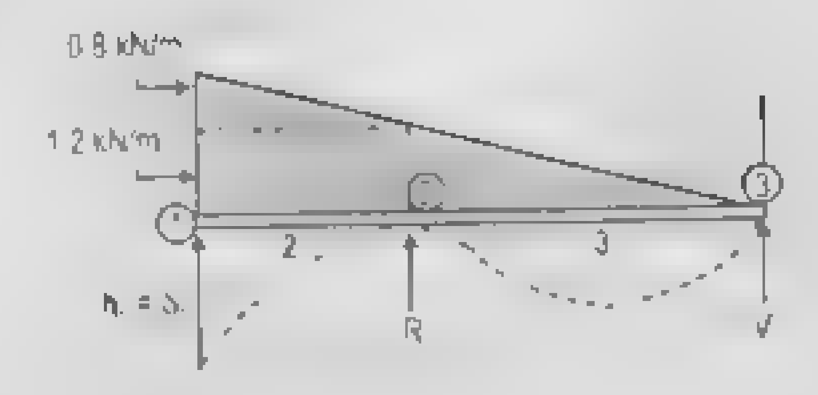
El signo menos indica que se [illegible]

870. Calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo volado de la viga de la figura sabiendo que el momento en el empotramiento es +1100 N.m



Resolución.

Del sistema



Dato. $\quad M_3 = +1100\ N.m = 1{,}1\ kN.m$

Donde $\quad M_2 = -0{,}8\left(\dfrac{2}{3}\right)(2) - (1{,}2)(2)(1) \Rightarrow M_2 = -3{,}46\ kN.m$

Además $M_1 = 0$

Tramo (1-2) $\quad \dfrac{6A\bar{a}}{L}$ [illegible] $\dfrac{7}{60}$ [illegible] $0{,}746\ kN.m^3$

Tramo (2-3) $\quad \dfrac{6A.\bar{b}}{L} = \dfrac{8}{[illegible]}(1{,}2)(3)^3 = 4{,}32\ kN.m^2$

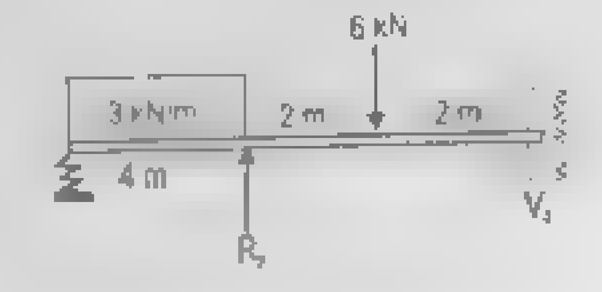
Aplicando el teorema de los tres momentos a los tramos (1-2) y (2-3), así:

[illegible]

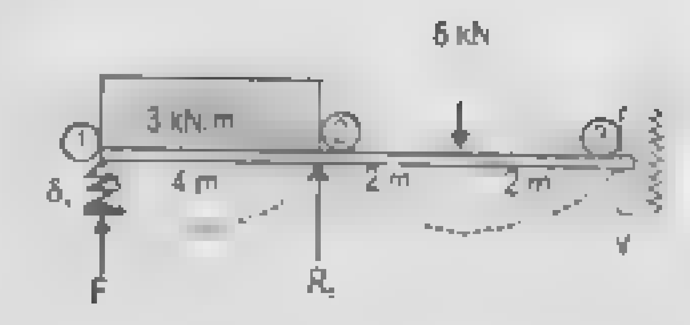
$$10M_2 + 3M_3 + \frac{6A\bar{a}}{L} + \frac{6A\bar{b}}{L} = 6E [illegible]$$

$$\boxed{10(-3{,}46) + 3(1{,}1) + 0{,}746 + 4{,}32 [illegible]\ EI\delta = 8{,}745\ kN.m^3}$$

871. La viga continua de la figura está apoyada en su extremo izquierdo en un resorte cuya constante es de 50 kN/m. En la viga $E = 10 \times 10^9\ N/m^2$ e $I = 40 \times 10^6\ mm^4$. Calcular la deflexión del resorte



Resolución



Obteniendo el producto EI en kN.m

$E = (10 . 10^9)(40)(10^6)(10^{-12})$ N m²

EI 400 kN m² ...(α)

Tramo (1 2) $\frac{6A\bar{a}}{L}$ $\frac{3 \ 4^3}{4}$ = 48 kN m² ...(1)

Tramo (2-3). $\frac{6A\bar{a}}{L} = \frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{6(2)}{4}(4^2 \quad 2^2)$ 36 kN m²

Sea δ la elongación del resorte tomando momentos en el apoyo ②

M_2 kδ(4) 3(4 (2) (Dato k 50 kN.m)

$M_2 = (200\delta - 24)$ ...(3)

Además: $M_1 = 0$ ...(4)

Por el teorema de los tres momentos

- Tramos (1 2) y (2 3), (donde h δ y h_3 0)

$$16M_2 + 4M_3 + (36 + 48) = 6(400)\left(-\frac{\delta}{4}\right) \quad (5)$$

- Tramo (2-3) y viga empotrada:

$$4M_2 + 8M_3 + 36 = 0 \quad (6)$$

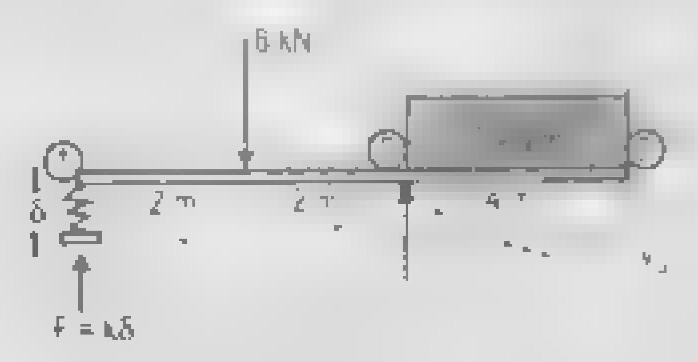
Resolviendo las ecuaciones

$$14(200\delta - 24) + 66 = -600\delta$$

$$\delta = \frac{27}{340} \text{ m} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1350}{17} \text{ mm}}$$

872 Repetir el problema anterior intercambiando las cargas en los claros

Resolución



Se modificó la ecuación de M_2, ahora

$M_2 = 4k\delta - 6(2)$ ⇒ M 200 12

La ecuación (6 se modifica solo por el factor $\frac{6A\bar{a}}{L}$ porque ahora hay otro tipo de carga en el empotramiento

$$4M_2 + 8M_3 + 48 = 0 \quad ...(1)'$$

La ecuación (5) se mantiene

Obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} M_1 + 2M \quad 12 \quad 0 \\ M_2 = 200\delta - 12 \\ 4M_2 + M_3 + 21 = -150\delta \end{cases}$$

Al resolver $\boxed{\delta = \frac{540}{27} \text{mm}}$

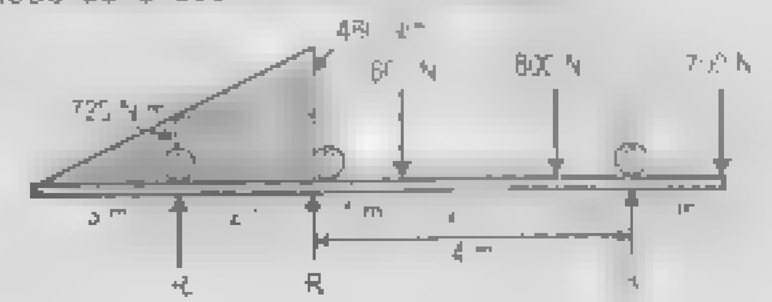
873 874, 875, 876, problemas ilustrativos

Mediante el método de la distribución de momentos, calcular los momentos en los soportes en las vigas continuas a que se refieren los siguientes problemas.

877 Véase problema 814

Resolución

Por el método de Cross resolver el sistema



Car…lo del segundo momento de inerc…a … como el mcm de los tramos AB y BC: I = mcm (2; 4) = 4

Cálculo de las rigideces relativas: $K = I/L$ (1)

Así $K_{AB} = \frac{4}{2} = 2$ $K_{BC} = \frac{4}{4} = 1$

Cálculo de los factores de distribución:

$$FD = \frac{K}{\Sigma K}$$

$FD_{AB} = 1$ (por estar en un extremo); $FD_{BA} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$

$FD_{BC} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ $FD_{CB} = 1$ (por estar en un extremo)

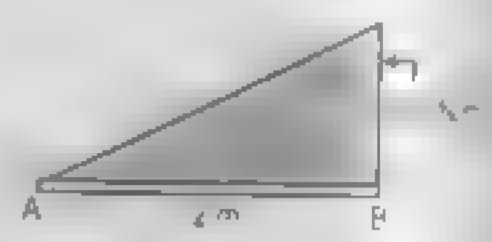
Cálculo del momento de empotramiento perfecto (MEP):

- Tramo AB (hay dos superposiciones)

Carga 1

$$M_{1AB} = -\frac{wL^2}{30} = \frac{-480(2)^2}{30} = -64 \text{ N.m}$$

$$M_{1BA} = -\frac{wL^2}{20} = \frac{-480(2)^2}{20} = -96 \text{ N.m}$$



Carga 2

$$M_{2AB} = M_{2BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{720(2)^2}{12} = -240 \text{ N m}$$

Total (suma de momentos de ambas cargas):

$$M_{AB} = M_{1AB} + M_{2AB} = (-64 - 240) = -304 \text{ N m}$$

$$M_{BA} = M_{1BA} + M_{2AB} = (-96 - 240) = -336 \text{ N.m}$$

- Tramo BC (hay dos cargas superpuestas)

Carga 1:

$$M_{1BC} = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-600(1)(3)^2}{4^2} = -337{,}5 \text{ N m}$$

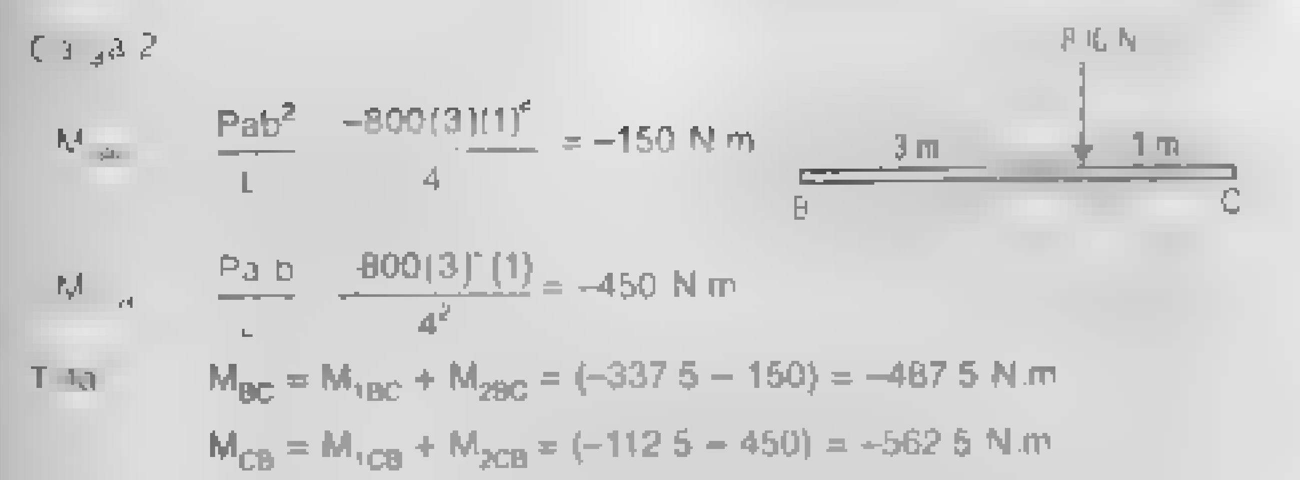
$$M_{1CB} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{600(1)^2(3)}{4^2} = -112{,}5 \text{ N.m}$$

600 N

1 m 3 m

B C

Carga 2



$$M_{2BC} = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-800(3)(1)^2}{4^2} = -150 \text{ N m}$$

$$M_{2CB} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{800(3)^2(1)}{4^2} = -450 \text{ N m}$$

Total

$$M_{BC} = M_{1BC} + M_{2BC} = (-337{,}5 - 150) = -487{,}5 \text{ N.m}$$

$$M_{CB} = M_{1CB} + M_{2CB} = (-112{,}5 - 450) = -562{,}5 \text{ N.m}$$

A la izquierda del apoyo A, el momento es: $-\frac{1}{2}(720)(3)(\frac{1}{…}) = -1080$ N m (se toma un FD en ese punto de 0)

A la derecha del apoyo C, el momento es $-700(1) = -700$ N m (se toma un FD en ese punto de 0)

Proceso de distribución

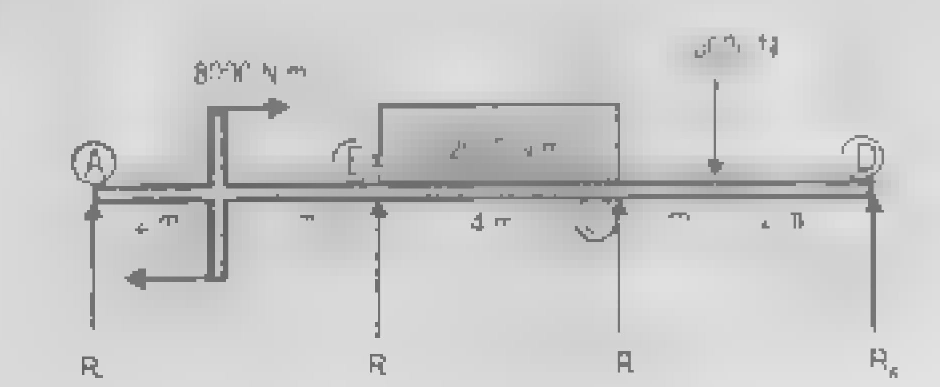
[illegible]		(2)		B	(1)	
[illegible]		1			1	
MEP	−1080	304	−324	487.5	−562.5	700
A, C	0	776 →	388	−68.75 ←	−137.5	0
[illegible]	−1080	1080	52	418.75	−700	700
[illegible]			313.83	−156.92		
M[illegible]	−1080	1080	−261.83	261.83	−700	700

M 1…80 N.m   M −261,83 N m   M −700 N m

…véase problema 826

Resolución

De… sistema



Cálculo de I: (I = mcm (4 4, 3) = 12)

Cálculo de las rigideces relativas (K L

K_{AB} 12 4 = 3 K_{BC} 12 4 = 3 K_{CD} 12 3 4

Para el método abreviado usamos:

$$\overline{K}_{AB} \quad \frac{3}{4}K_{AB} \quad \frac{3}{4}\,3 \quad \frac{9}{4} \qquad \overline{K}_{CD} \quad \frac{3}{4}(K_{CD} \quad \frac{3}{4}(4) \quad 3$$

Cálculo de las factores de distribución $FD \quad \frac{K}{\Sigma K}$

$FD_{AB} = 1$ (por ser extremo) $\qquad FD_{BA} = \frac{9}{4}/\left(\frac{9}{4}+3\right)=\frac{3}{7}$

$FD_{BC} = 3/\left(\frac{9}{4}+3\right)=\frac{4}{7} \qquad FD_{CB} = 3/(3+3) = \frac{1}{2}$

$FD_{CD} = 3/(3+3) = \frac{1}{2} \qquad FD_{DC} = 1$ (por ser extremo)

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto MEP)

- Tramo AB

$$M_{AB} \quad \frac{M}{L} \quad \frac{3a}{L} \quad 1 \quad \frac{8000}{4}\,2, \quad \frac{3\ 2}{4} \quad 1 \quad \Rightarrow M_{AB} \quad 2000\ N\ m$$

$$M_{BA} \quad \frac{Ma}{L} \quad \frac{3b}{L} \quad 1 \quad \frac{8000}{4}\,2, \quad \frac{3\ 2}{4} \quad 1 \quad \Rightarrow M_{BA} \quad 2000\ N\ m$$

- Tramo BC

$$M_{BC} \quad M_{CB} \quad \frac{wL^2}{12} \quad \frac{2000}{12}(4)^2 \quad 2666{,}7\ N\ m$$

- Tramo CD

$$M_{CD} = \frac{Pab}{L} \quad \frac{60\ \ 1}{3^2} \quad 2666{,}7\ N\ m$$

$$M_{DC} \quad \frac{Pa^2b}{L} \quad \frac{-6000(1)^2(2)}{3^2} = \ = -1333{,}3\ N.m$$

Nota por convención de signos en el cuadro del proceso de distribución a la derecha de cada tramo es positivo y a la izquierda negativo)

Proceso de distribución

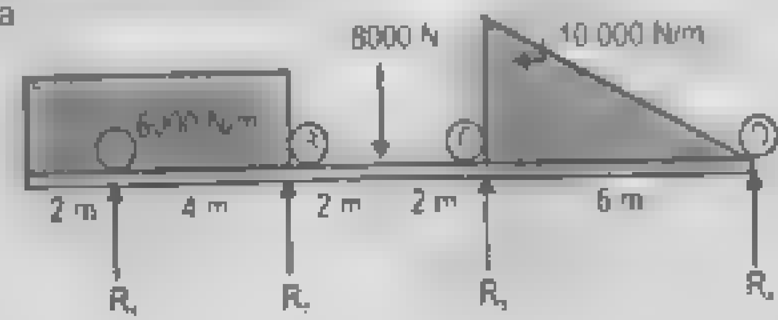
K	A	(9/4)	B	(3)	C	(3) D
FD	1	3/7	4/7	1/2	2	
MEP solta A y D	– 2000 2000	+ 2000 → 4000	– 2666.7	+ 2666	– 2666.7 666.7 ←	+ –1333.3 1333.3
MEP reajustado 1 distribución	0	–1000 714.3	2666.7 –952.4	–2666.7 333.4	3333.4 333.4	0
Trasmisión 2 distribución		71.4	166.7 95.3	476.2 238.1	238.1	
Trasmisión 3 distribución		51	119 68.1	47.6 23.9	23.9	
Trasmisión 4 distribución		1	12 6.9	34.1 17.1	17.1	
Momentos totales	0	–1688,8	1688.8	–3231.3	3231,3	0

Así $\boxed{M_A \quad M_D \quad 0}$ $\boxed{M_B = -1688{,}8\ N\ m}$ $\boxed{M_C = -3231{,}3\ N\ m}$

879 Véase problema 827

Resolución:

Del sistema



Cálculo de I: I = mcm (4, 4; 6) = 12

Cálculo de las rigideces relativas

$K_{AB} = 12/4 = 3$, $K_{BC} = 12/4 = 3$, $K_{CD} = 12/6 = 2$

Para el método abreviado usamos

$\overline{K}_{[illegible]} = \frac{3}{4}K$ [illegible] $\frac{9}{4}$; $\overline{K}_{[illegible]} = \frac{3}{4}K = \frac{3}{4}(2) = \frac{3}{2}$

C[illegible] factores de distribución $FD = \frac{K}{\Sigma K}$

$FD_{AB} = 1$; $FD_{BA} = \frac{9}{4} / \left(\frac{9}{4} + 3\right) = \frac{3}{7}$

$F[illegible] = [illegible]\frac{3}{4}[illegible] 3 = \frac{1}{[illegible]}$; $FD_{[illegible]} = 3 / \left(3 + \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$

$FD_{CD} = \frac{3}{2}/\left(\frac{3}{2}+3\right) = \frac{1}{3}$; $FD_{[illegible]} = 1$

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- $M_{[illegible]} = -(6000)(2)(1) = -12\,000$ N m
- Tramo AB $\quad M_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{[illegible]\,4}{12} = -8000$ N m $= M_{BA}$
- Tramo BC $\quad M_{BC} = M_{[illegible]} = \frac{PL}{8} = \frac{8[illegible]}{8} = [illegible]\,4000$ N m
- Tramo CD $\quad M_{CD} = -\frac{wL^2}{20} = \frac{-10\,000}{[illegible]}(6)^2 = -18\,000$ N m

$\quad M_{DC} = -\frac{wL^2}{30} = \frac{-10\,000}{30}\,6[illegible] = -12\,000$ N m

Proceso de distribución

K	A		B		C	
FD		[illegible] 3/7	4/7	[illegible] 3		
MEP [illegible] A, D	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4[illegible]	8 000 6000 ←	−12 000 12 000
MEP [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4000	−4000	24[illegible]

[illegible]		2[illegible]	6666.7 3809.5	571.5 −381	19[illegible]5	
[illegible]		[illegible]	−190,5 108 9	1904,8 −1269.9	−634 9	
[illegible]		272 1	−635 362 9	54[illegible] −36.3	−18,2	
Momentos finales	12 0[illegible]	1[illegible] 1932	1932	−16 489 7	16 489,7	0

A[illegible] $M_{[illegible]} = [illegible]12[illegible]$ N ; $M_B = -1\,932$ N m ; $M_C = -16\,489{,}7$ N m

[illegible] Véase problema 845

Resolución

De[illegible]

800 N ; 900 N ; 4 m ; [illegible] m ; 2 m

Cá[illegible]do $I = mcm\,(4\;4) = 4$

Cálculo de rigideces relativas: (K = I/L)

$K_{AB} = \frac{4}{4} = 1 \qquad K_{BC} = \frac{4}{4} = 1$

Para el método abreviado: $\overline{K}_{AB} = \frac{3}{4}K_{AB} = \frac{3}{4}$

Cálculo de los factores de distribución (FD = K / ΣK)

$FD_{AB} = 1 \qquad FD_{BA} = \frac{3}{4} / \left(\frac{3}{4}+1\right) = \frac{3}{7}$

$FD_{BC} = 1 / \left(\frac{3}{4}+1\right) = \frac{4}{7} \qquad FD_{CB} = 0$ (por estar empotrado C)

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP).

- $M_A = -800\,(2) = -1600$ N m

- En el tramo AB. $M_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(600)(4)^2}{12} = -800 \text{ N.m} = M_{BA}$

- En el tramo BC: $M_{BC} = M_{CB} = -\frac{PL}{8} = \frac{-(900)(4)}{8} = -450 \text{ N.m}$

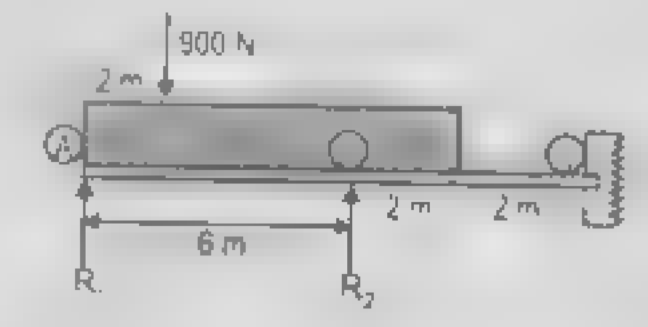
Proceso de distribución

K	A		(3/4)	B	(1)	C
FD	0	1	3/7	4/7		0
MEP soltar A	−1600 0	800 800 →	−800 400	450		−450
MEP, reajustado Distribución	−1600	1600	−400 −21,43	450 −28,57 ↘		−450 −14,285
Momentos totales	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]

A [illegible]

881 Véase problema 846

Resolución.
Del sistema



Cálculo de I. I = mcm (6; 4) = 12

Cálculo de las rigideces relativas (K = I/L)

$K_{AB} = 12/6 = 2$, $K_{BC} = 12/4 = 3$

Para el método abreviado: $\overline{K}_{AB} = \frac{3}{4}K_{AB} = \frac{3}{4}(2) = \frac{3}{2}$

Cálculo de los factores de distribución (FD = K / ΣK)

$FD_{AB} = 1$ $\qquad FD_{BA} = \frac{3}{2} / \frac{3}{2} + 3 = \frac{1}{3}$

$FD_{BC} = 3 / \frac{3}{2} + 3 = \frac{2}{3}$ $\qquad FD_{CB} = 0$

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- Tramo AB (dos superposiciones)
Carga 1

$M_{1AB} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{900(2)(4)^2}{6^2} = -800 \text{ N.m}$

$M_{1BA} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = -\frac{900(2)^2(4)}{6^2} = -400 \text{ N.m}$

Carga 2

$M_{2AB} = M_{2BA} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{600(6)^2}{12} = -1800 \text{ N.m}$

Sumando $\quad M_{AB} = M_{1AB} + M_{2AB} = -800 - 1800 = -2600 \text{ N.m}$

$M_{BA} = M_{1BA} + M_{2AB} = -400 - 1800 = -2200 \text{ N.m}$

- Tramo BC $\quad M_{BC} = -\frac{11}{192}wL^2 = -\frac{11}{192}(600)(4)^2 = -550 \text{ N.m}$

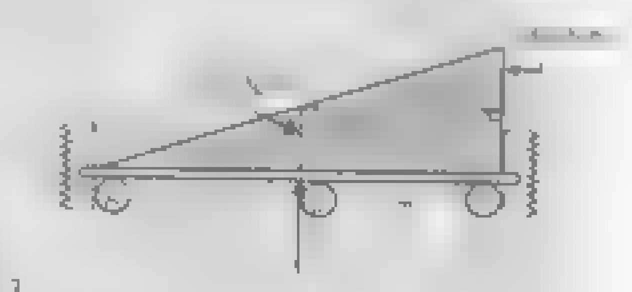
$M_{CB} = -\frac{5}{192}wL^2 = -\frac{5}{192}(600)(4)^2 = -250 \text{ N.m}$

Proceso de distribución

K	A	$\frac{3}{4}(2) = \left(\frac{3}{2}\right)$	B	(3)	C
FD	1	1/3	2/3		0
MEP soltar A	2600 −2600	−2200 −1300	550		−250
MEP reajustado Distribución	0	−3500 983,3	550 1966,7 ↘		−250 983 3
Momentos totales	0	−2516,7	2516 7		733,3

Así $\boxed{M_A = 0}$; $\boxed{M_B = -2516.7 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_C = +733.3 \text{ N.m}}$

882 Vease problema 849



Resolución

Del sistema

Calculo de ... m 3 3 ... 3

Calculo ... K ...

Cálculo de las fuerzas de distribución (FD = K / ΣK)

$FD_{AB} = 0$ (por empotramiento) $FD_{BA} = 3/(3+3) = 1/2 = FD_{BC}$

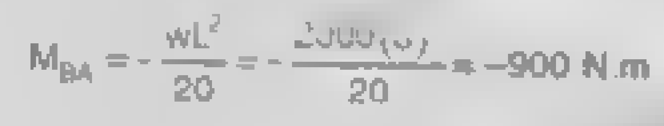
$FD_{CB} = 0$ (por empotramiento)

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

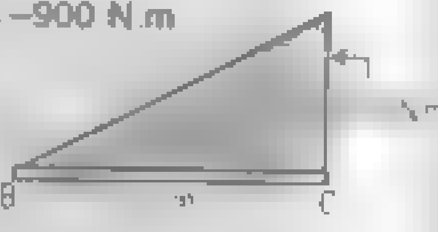
- Tramo AB: $M_{AB} = \frac{wL^2}{30} = \frac{2000(3)^2}{30} = 600$ N.m

$$M_{BA} = -\frac{wL^2}{20} = -\frac{2000(3)^2}{20} = -900 \text{ N.m}$$

- Tramo BC (hay dos cargas superpuestas)

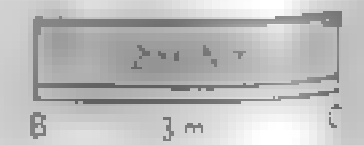


Carga 1



$$M_{1BC} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{2000(3)^2}{30} = -600 \text{ N.m}$$

$$M_{1CB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{2000(3)^2}{20} = 900 \text{ N.m}$$



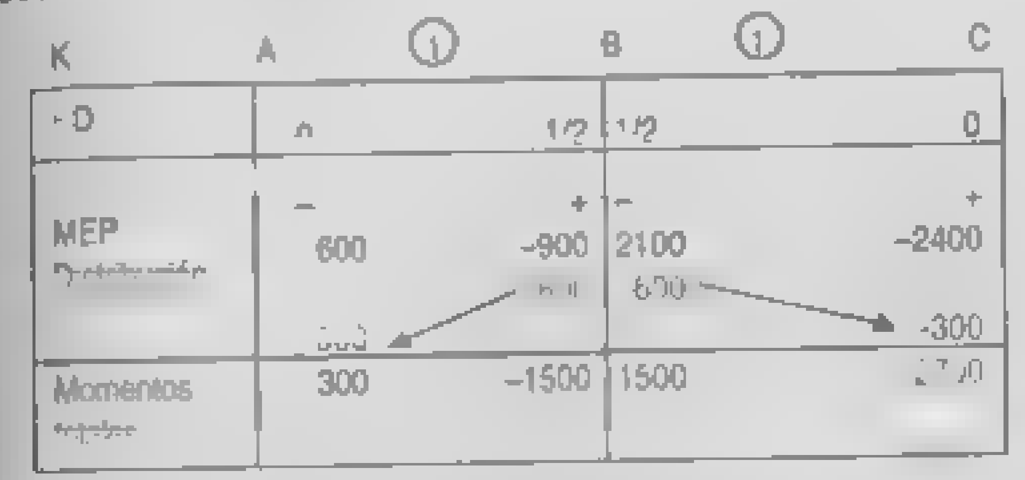
Carga 2

$$M_{2BC} = M_{2CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2000(3)^2}{12} = -1500 \text{ N.m}$$

Sumando: $M_{BC} = M_{1BC} + M_{2BC} = -600 - 1500 = -2100$ N.m

$$M_{CB} = M_{1CB} + M_{2CB} = -900 - 1500 = -2400 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución



K	A	①	B	①	C
FD	0	1/2	1/2		0
MEP Distribución	600	-900	2100		-2400
		600	600		
	300				-300
Momentos finales	300	-1500	1500		2700

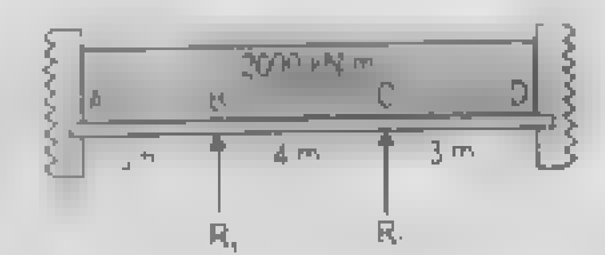
con la convención de signos)

$\boxed{M_A = 300 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_B = -1500 \text{ N.m}}$; $\boxed{M_C = 2700 \text{ N.m}}$

...

Resolución

Del sistema



Hallando I = mcm (3; 4; 3) = 12

Hallando las rigideces relativas (K = I/L).

$K_{AB} = 12/3 = 4$ $K_{BC} = 12/4 = 3$ $K_{CD} = 12/3 = 4$

Hallando las fuerzas distributivas (FD = K / ΣK).

$FD_{AB} = 0$ $FD_{BA} = 4/7$ $FD_{BC} = 3/7$

$FD_{CB} = 3/7$ $FD_{CD} = 4/7$ $FD_{DC} = 0$

Hallando los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- Tramo AB

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2000(3)^2}{12} = 1500 \text{ N.m}$$

- Tramo BC.

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2000(4)^2}{12} = 2666.7 \text{ N.m}$$

- Tramo CD

$$M_{CD} = M_{DC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2000(3)^2}{12} = 1500 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución

K	A	(4)	B	( )	C	(4) D
FD	0	4/7	3/7	3/7	4/7	[illegible]
MEP 1ª distribución	−1500	+1500 +667	−2666.7 500	+2666.7 0	+500 +666.7	−15[illegible]
Trasmisión 2ª distribución	−333.4	83.[illegible]	250 [illegible]	[illegible] 107.1	143.9	[illegible]
Trasmisión 3ª distribución	7.95	[illegible]6	+53.6 23	53.6 23	[illegible]6	[illegible]
Trasmisión 4ª distribución	−15,3	−6.6	11.5 4.9	11.5 4.9	6.6	+5
Momentos totales	1079.35	−2346.8	2346.8	−2346.8	2346.8	−1079.[illegible]

Por convención de signos

$M_A = -1079.35$ N.m ; $M_B = -2346.8$ N.m

$M_C = -2346.8$ N.m ; $M_D = -1079.35$ N.m

884. Véase problema 856

Resolución:

Del sistema

Cálculo de I: I = mcm(4, 4, 3) = 12

Cálculo de las rigideces relativas (K = I/L)

$$K_{AB} = \frac{12}{4} = 3 \text{ (para el método abreviado)}$$

$$K_{AB} = \frac{3}{4}K_{AB}' = \frac{3}{4}\cdot 3 = \frac{9}{4} \qquad K_{BC} = \frac{12}{4} = 3 \qquad K_{CD} = \frac{12}{3} = 4$$

Cálculo de los factores de distribución: (FD = K / ΣK)

$$FD_{AB} = 1 \qquad FD_{BA} = \frac{9}{4}\Big/\left(\frac{9}{4}+3\right) = \frac{3}{7}$$

$$FD_{BC} = 3\Big/\left(\frac{9}{4}+3\right) = \frac{4}{7} \qquad FD_{CB} = 3/(3+4) = \frac{3}{7}$$

$$FD_{CD} = 4/(3+4) = \frac{4}{7} \qquad FD_{DC} = 0$$

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto MEP

- $M_A = -4000(1)\left(\frac{1}{2}\right) = -2000$ N.m

- Tramo AB. $M_{AB} = M_{BA} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{4000(4)^2}{12} = 5333.3$ N.m

- Tramo BC (dos cargas superpuestas)

$$M_{AB} = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-2000(1)(3)^2}{4^2} - \frac{2000(3)(1)^2}{4^2} \Rightarrow M_{AB} = -1500 \text{ N.m}$$

$$M_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{-2000(1)^2(3)}{4^2} - \frac{2000(3)^2(1)}{4^2} \Rightarrow M_{BA} = -1500 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución

FD	0	1	3/7	4/7	3/7	4/7	0
MEP soltar A	+2000	−3333,3 [illegible]	+ [illegible]	− [illegible]	+ [illegible]	− [illegible]	+ [illegible]
MEP [illegible] 1.ª distribución	2000	2000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Trasmisión 2.ª distribución			27,6	−64,3 36,7	1571,5 −673,5	−898	−85
Trasmisión 3.ª distribución			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Trasmisión 4.ª distribución			1,7	2,3	−41,3	−55	[illegible]
Trasmisión 5.ª distribución			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Momentos totales	2000	2000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Así: $M_A = 2000$ N m $M_B =$ [illegible] N m

$M_C = 664,4$ N m $M_D =$ [illegible] N m

885 Resolver el problema 856 si el momento de [illegible] de manera que la rigidez relativa del tramo 1 sea 2; del 2, 1,5 y del 3, 1

Resolución:

Con respecto al problema anterior solo cambian los valores de las rigideces relativas, lo cual modifica los valores de los factores de distribución y modifican el proceso de distribución

Así, de los nuevos datos

$K_{AB} =$ [illegible] $K_{BC} =$ [illegible]

$K_{BC} = 1,5$ $K_{CD} = 1$

Así, los factores de distribución son:

$FD_{AB} = 1$ [illegible] $FD_{BC} = 1,5/(1,5+1) = 0,6$

$FD_{BA} =$ [illegible] $= 0,5$ $FD_{CB} = 1,5/(1+1,5) = 0,6$

$FD_{CD} = 1/(1+1,5) = 0,4$ $FD_{DC} = 0$

Y para los mismos MEP tenemos el siguiente proceso de distribución

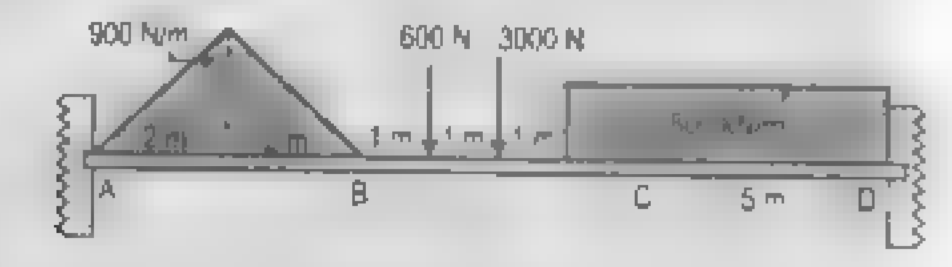
FD		1		0,5	0,6	0,4	0
MEP soltar A	+ [illegible] 0	[illegible] −3333,3 →	+ [illegible] −1666,7	1500	+ 1500	1800	+ 2700
MEP [illegible] 1.ª distribución	[illegible]	2000	[illegible] 2700	1500 2700	1500 6	1800 120	2700
Trasmisión 2.ª distribución			45	−90 45	3 62	55	−60
Trasmisión 3.ª distribución			[illegible]	4 [illegible] 2 [illegible]	2 [illegible] 13 [illegible]	9	275
Trasmisión 4.ª distribución			+3,375	[illegible] +3,375	10,313 −61,88	−41,25	4,5
Momentos totales	2000	2000	[illegible]	3995,375	−1079,75	1079,75	−3039,5

Luego: $M_A = 2000$ N m , $M_B =$ [illegible] N m

$M_C = 1079,75$ N m , $M_D = 3039,5$ N m

886 Calcular los momentos en los apoyos en el problema 825 si los extremos de la viga están empotrados en lugar simplemente de apoyados

Resolución.
Del sistema



Cálculo de I = mcm (4, 3, 5) = 60
Cálculo de rigideces relativas (K = I/L)

$K_{AB} = 60/4 = 15$; $K_{BC} = 60/3 = 20$; $K_{CD} = 60/5 = 12$

Cálculo de las fuerzas de distribución: $(FD = K/\Sigma K)$

$FD_{AB} = 0$ $\qquad$ $FD_{BA} = 15/(15+20) = 3/7$

$FD_{BC} = 20/(15+20) = 4/7$ $\qquad$ $FD_{CB} = 20/(20+12) = 5/8$

$FD_{CD} = 12/(20+12) = 3/8$ $\qquad$ $FD_{DC} = 0$

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (MEP)

- Tramo AB

$$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{5wL^2}{96} = \frac{-5(900)(4)^2}{96} = -750 \text{ N.m}$$

- Tramo BC (dos superposiciones):

$$M_{BC} = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad \frac{6000(1)(2)^2}{3^2} \quad \frac{3000(2)(1)^2}{3^2} \Rightarrow M_{BC} = 3333,3 \text{ N.m}$$

$$M_{CB} \quad \frac{Pa^2b}{L^2} \quad \frac{-6000(1)^2(2)}{3^2} - \frac{3000(2)^2(1)}{3^2} \Rightarrow M_{CB} = -2666,7 \text{ N.m}$$

- Tramo CD

$$M_{CD} = M_{DC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{800(5)^2}{12} = -1666,7 \text{ N.m}$$

Proceso de distribución

MEP	750	−750	3333,3	−2666,7	1666,7	−1666,7
1.ª distribución		−1107,1	−1476,2	625	375	
Trasmisión	−553,55		312,5	738,1		187,5
2.ª distribución		−133,9	−178,6	461,3	276,8	
Trasmisión	−66,95		230,65	−89,3		138,4
3.ª distribución		−98,65	−131,8	55,82	33,48	
Trasmisión	−49,43		27,91	−65,9		16,74
4.ª distribución		−11,96	−15,95	41,19	24,71	
Trasmisión	5,98		20,60	−7,98		12,35
5.ª distribución		−8,83	−11,77	4,99	2,94	
Momentos totales	74,09	−2110,64	2110,64	−2379,68	2379,68	−1311,71

Por el método de Cross obtenemos

$M_A = -74,09$ N.m ; $M_B = -2110,64$ N.m

$M_C = 2379,68$ N.m ; $M_D = -1311,71$ N.m

CAPÍTULO 9

ESFUERZOS COMBINADOS

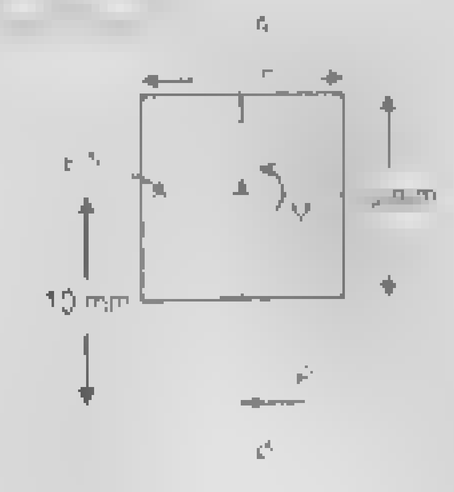
Problema ilustrativo

Comparar el esfuerzo máximo en una barra de sección cuadrada, de 10 mm de lado, ligeramente curvada, las fuerzas P actuan a 10 mm del centro de la sección central como indica la figura con el esfuerzo máximo producido si la barra fuera perfectamente recta y las fuerzas P se aplicaran axialmente. Este problema es un claro ejemplo del peligro de la flexión lateral en las columnas.

Resolución

Del sistema

[illegible]



El momento flector respecto al E.N. es

$$M = 10P \qquad (1)$$

Area de sección recta $A = (10)^2\ mm^2$

Momento de inercia: $I = \dfrac{(10)(10)^3}{12} = \dfrac{10^4}{12}\ mm^2$

Distancia de extremo de sección a la línea del E.N. $c = \dfrac{10}{2} = 5\ mm$

El esfuerzo máximo normal es la suma de esfuerzo axial (de compresión) y del esfuerzo de flexión, producido por M

$$\sigma_{axial} = \frac{P}{A};\ \sigma_{flexion} = \frac{Mc}{I}$$

Así

$$\sigma = \sigma_{axial} + \sigma_{flexion} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$\sigma = \frac{P}{10^2} + \frac{(10P)(5)}{(10^4/12)} = \frac{7P}{10^2} \quad \ldots(2)$$

Si no existe flexión, es decir, si la barra estuviera perfectamente recta, sólo habría esfuerzo axial

$$\sigma = \sigma_{axial} = \frac{P}{A} = \frac{P}{I} \quad (3)$$

∴ la relación de ambos esfuerzos es (2) ÷ (3): $\dfrac{\dfrac{7P}{10^2}}{\dfrac{P}{10^2}}$ $\boxed{\dfrac{7}{1}}$

90. Una varilla de conexión de fundición tiene 40 mm de ancho por 200 mm de altura y 500 mm de longitud. Los esfuerzos admisibles son de 40 MN/m² a tensión y 80 MN/m² a compresión. Calcular la mayor fuerza de compresión que puede aplicarse a sus extremos a lo largo de un eje longitudinal situado a 150 mm arriba del borde inferior de la pieza

Resolución.

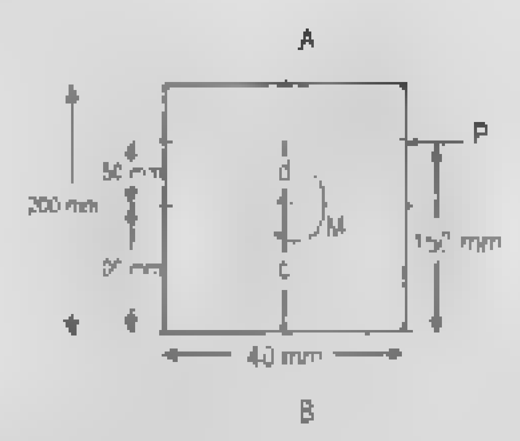
Del diagrama:

A

P → [50 mm; 200 mm; 100 mm] ← P

B

Tiene la sección rectangular



Area de sección rectangular $[A = bh^2]$

$\Rightarrow\ A = (0{,}04)(0{,}2)\ m^2 = 8 \times 10^{-3}\ m^2$ ... (1)

Momento de inercia. $\Rightarrow \left[\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{12}\right]\ I = \dfrac{(0{,}04)(0{,}2)^3 m^4}{12} = \dfrac{8}{3} \times 10^{-5}\ m^4$ ... (2)

Como c = 100 mm = 0,1 m, es la distancia tanto para el esfuerzo de tensión y compresión ... (3)

Tomando momentos respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección rectangular

$M = -Pd = -P(0{,}05)$; (d: está en metros) ...(4)

Calculando el esfuerzo normal tanto de tensión y compresión

$\left[\sigma_c = -\dfrac{P}{A} - \dfrac{Mc}{I}\right]$: esfuerzo a compresión

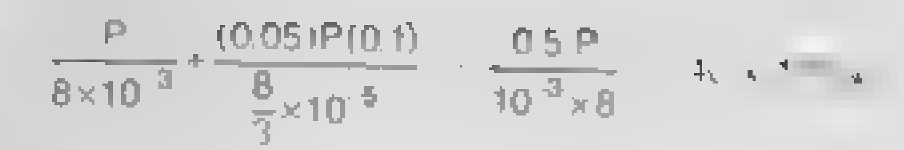
$$\Rightarrow \sigma_c = \frac{P}{8 \times 10^{-3}} - \frac{(0{,}05)P(0{,}1)}{\frac{8}{3} \times 10^{-5}}$$

(en valor absoluto)

$$\sigma_c = \frac{2{,}5}{8} \times 10^3 P \leq 80 \times 10^6\ N$$

Resolviendo: $P \leq 256\ kN$ ... (α)

$\left[\sigma_t = -\dfrac{P}{A} + \dfrac{Mc}{I}\right]$: esfuerzo a tensión (β)

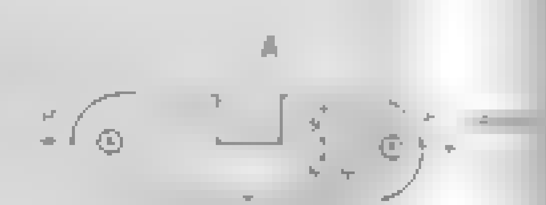


$$\frac{P}{8\times10^{-3}} + \frac{(0.05)P(0.1)}{\frac{8}{3}\times10^{-5}} \quad \frac{0.5\,P}{10^{-3}\times8}$$

Resolviendo: $P \leq 640$ kN

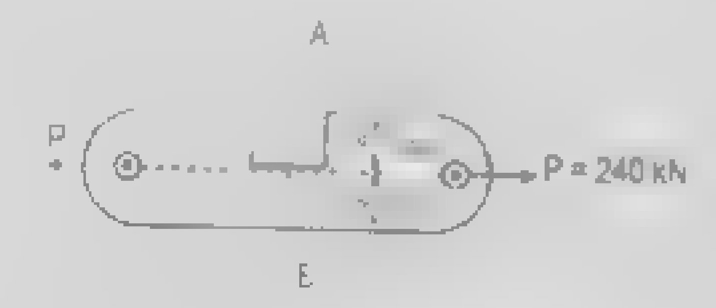
La mayor fuerza de compresión admisible es la menor de las dos f...zas ha...adas. $P_{máx} = 256$ kN

904. Un elemento de máquina tiene la forma indicada en la figura, con un rebaje que reduce ... A ... de evitar interferencia con otros elementos. Calcular el esfuerzo de tensión máximo en A-B si (a) la sección es cuadrada con 160 mm por lado, y (b) si la sección es circular de 160 mm de diámetro.

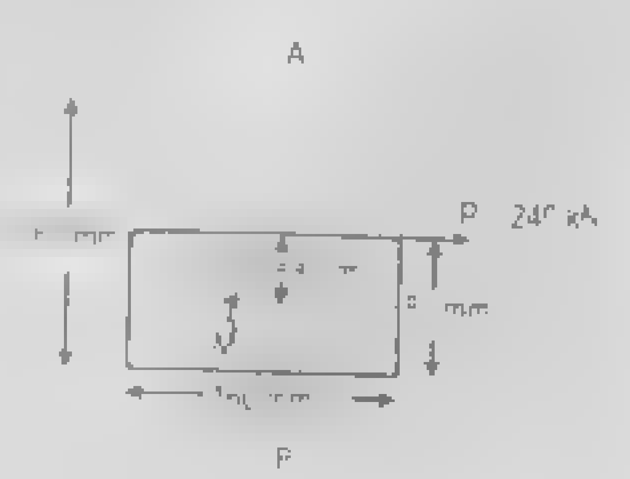


Resolución:

Del sistema del elemento de máquina



a) Para la sección cuadrada en A B



(todas las dimensiones a metros)

$A = (0,16)(0.08)\ m^2 = 128 \times 10^{-4}\ m^2$ ... (α)

$\frac{0,16)(0.08)^3}{12}\ m^4 = \frac{2048}{3} \times 10^{-8}\ m^4$ ... (β)

El brazo flector de P es, $d = 0,04$ m ...(γ)

Distancia de esfuerzo por tensión: $c = 0.04$ m (θ)

El momento flector respecto a la horizontal que pasa por el centro de gravedad

$M = Pd = 0.04P$ ...(φ)

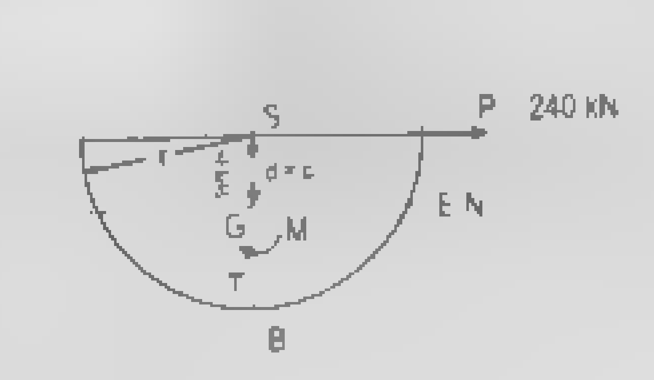
El esfuerzo de tensión máximo es

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \qquad \sigma = \frac{P}{128\times10^{-4}} + \frac{(0.04P)(0.04)}{\frac{2048}{3}\times10^{-8}}$$

$\sigma = 78,125P + 234,375P = 312,5P;\ \sigma_t = (312.5)(240)\frac{kN}{m^2} = 75\ 000\ kN/m^2$

σ ... 5 ... MPa

b) Para la sección circular en A B



[illegible]

$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}(0,08)^2\ m^2$ ...(α)

El momento de inercia de la semicircunferencia es.

$I = [0,11r^4] = (0.11)(0,08)^4\ m^4$ (β)

La fuerza P de tensión produce una flexión hacia abajo. Así la distancia del punto de tensión máxima (S) al centroide de la sección (G) es

$\frac{4r}{3\pi} = \frac{4(0.08)}{3\pi}\,m$ ...(γ)

[illegible] $\frac{4r}{3\pi} = \frac{4(0.08)}{3\pi}$ [illegible] A su vez [illegible] el momento flector:

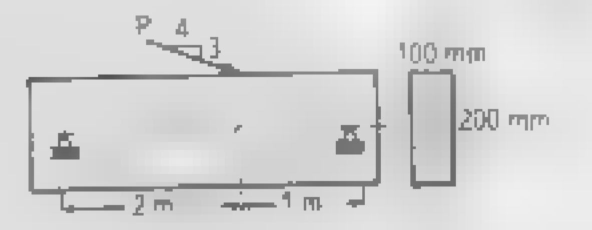
$M = Pd = \frac{4(0.08)}{3\pi}(240)\ kN\,m$ ...(θ)

El esfuerzo de tensión máximo es

$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{[illegible]}{\left(\frac{\pi}{2}\right)(0,08)^2} + \frac{\frac{(4)(0.08)(240)}{3\pi}\frac{(4)(0.08)}{3\pi}}{(0,11)(0,08)^4}\ kN/m^2$

$\sigma = \frac{240}{\pi(0,08)^2}$ [illegible] $= 85\ 260\ kN/m^2$

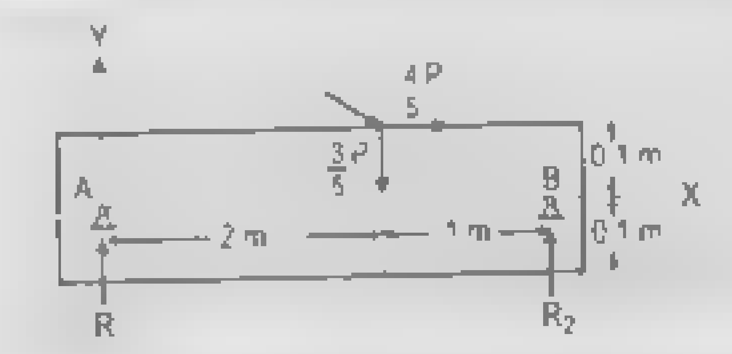
σ = 8[illegible] MPa



[illegible] La viga de madera de sección rectangular de 100 mm x 200 mm está apoyada como indica la figura y soporta una carga P. Calcular el máximo valor de P si el esfuerzo normal no debe exceder de 10 MPa

Resolución

Hallando las reacciones R y R que dependen de P en la viga



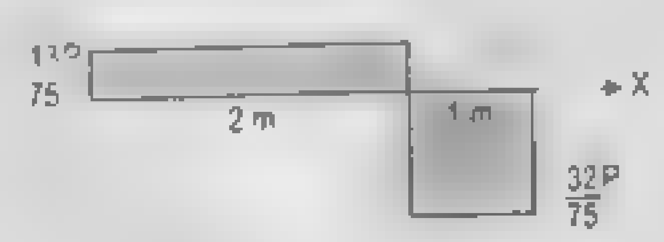
Del diagrama de cuerpo libre del sistema y descomponiendo P en el sistema XY

$$\Sigma M_B = 0 = 3R_1 + \frac{4}{5}P(0,1) - \frac{3}{5}P(1) \quad ...(1)$$

$$\Sigma F_y = 0 = R_1 + R_2 - \frac{3}{5}P \quad ...(2)$$

Resolviendo (1) y (2): $R_1 = \frac{13}{75}P$; $R_2 = \frac{32}{75}P$

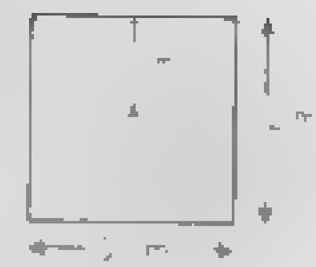
Graficando las fuerzas cortantes



Donde el momento máximo es.

$$M_{máx.} = \frac{32}{75}P \quad ...(\alpha)$$

De la sección rectangular



donde A = (0,1)(0,2) m² ...

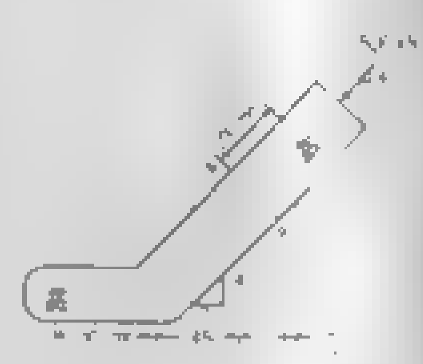
además $I = \frac{(0,1)(0,2)^3}{12}\,m^4 = \frac{2}{3}\times 10^{-4}\,m^4$ ... c = $\frac{h}{2}$ = 0,1 m

El esfuerzo normal máximo será: $\sigma_N = \frac{P}{A} + \frac{M \cdot c}{I} = 10\ MPa$

Así $\frac{\frac{4}{5}P}{(2\times10^{-2})} + \frac{\frac{32}{75}P\times(0,1)}{\left(\frac{2}{3}\right)\times10^{-4}} = 10\times10^{6}\ N$

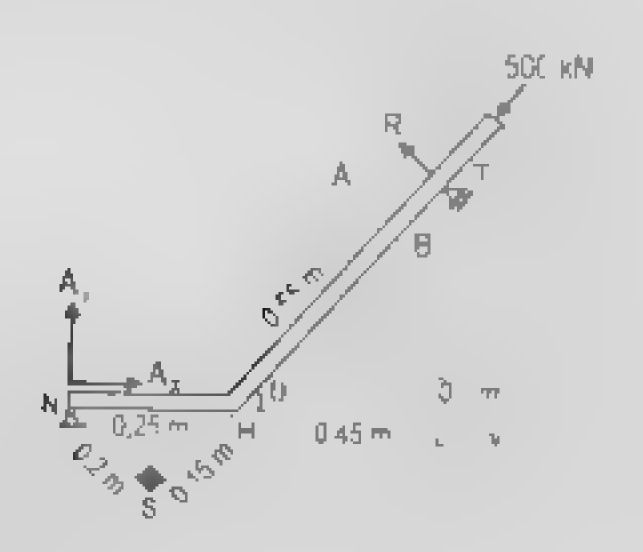
$680P = 10^7\ N \Rightarrow$ **P = 1 1 kN**

906 La barra de acero de la figura es de sección cuadrada, de 200 mm de lado. Calcular el esfuerzo normal en A y en B



Resolución.

Diagrama de cuerpo libre del sistema



Tomando momentos en el punto N

$\sum M_N = 0$ Rx(ST) − 500 x (NS) ... (α)

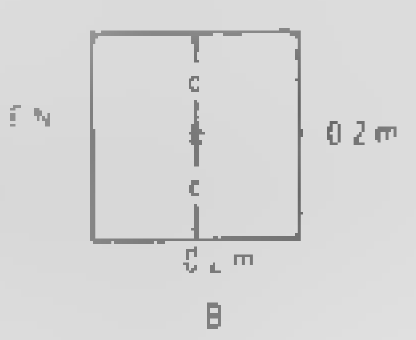
... aplicando relaciones geométricas elementales

HT = 0,75 m; SH = 0,15 m NS = 0,2 m

En (α): R(SH + HT) = 500(NS)

0,9R = 500(0,2) kN; así $R = \frac{1000}{9}$ kN

De la sección transversal de la barra



... A ... 4×10^{-2}

$\frac{...}{12}$ ... $\frac{4}{3}\times10^{-4}$

$c = \frac{0,2}{2}\ m = 0,1\ m$

Las fuerzas que actúan sobre A-B son

A
R
0,2 m
500 kN
B

Tomando momentos respecto al eje A-B

$M = (0,2)R = (0,2)\left(\frac{1000}{9}\right)\ kN{\cdot}m \Rightarrow M = \frac{200}{9}\ kN\ m$

Como la fuerza axial de 500 kN es de compresión, así:

En A se da compresión; el esfuerzo normal es

$\sigma_A = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \left(-\frac{500}{4\times10^{-2}} - \frac{200}{9}\cdot\frac{0,1}{\frac{4}{3}\times10^{-4}}\right)\frac{kN}{m^2}$

$\sigma_A = (-12\,500 - 16\,666,67)\ kN/m^2$

$\sigma_A = -29\,166,67\ kN/m^2$

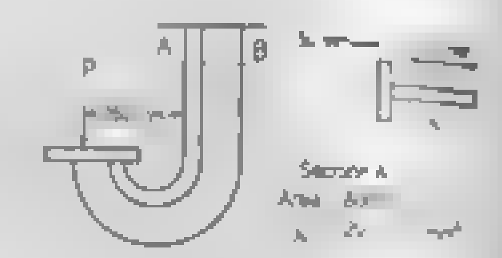
$\sigma_A = -29,2\ MPa$

En B se da tensión: el esfuerzo normal es

$$\sigma_t = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = (-12\,500 + 16\,666{,}67)\ \text{kN/m}^2$$

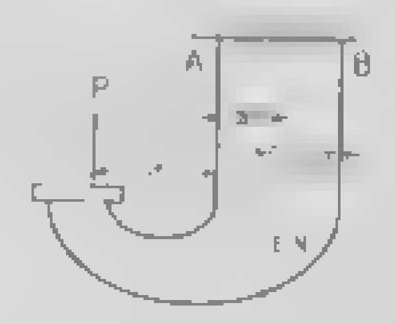
$\boxed{\sigma_t = 4{,}2\ \text{MPa}}$

907 Calcular la carga máxima P que se puede aplicar a la plataforma del soporte de fundición de la figura, si $\sigma_t \leq 30\ \text{MN/m}^2$ y $\sigma_c \leq 70\ \text{MN/m}^2$



Resolución

Del diagrama de cuerpo libre



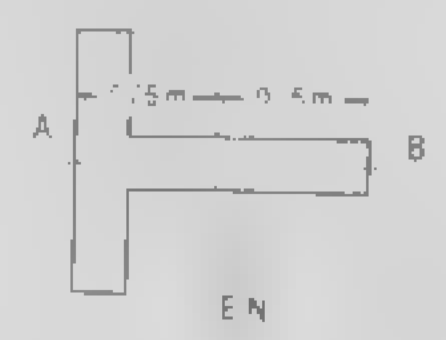
La carga P genera tensión en A y compresión en B

Tomando momentos respecto al eje neutro (E N):

$M = (0{,}25 + 0{,}05)P$ .. (1)

$M = (0{,}3)P$ .. (1)'

De la sección A B tenemos



donde $A = 8 \times 10^3\ \text{mm}^2 = 8 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$

$I_{EN} = 20 \times 10^6\ \text{mm}^4 = 2 \times 10^{-5}\ \text{m}^4$

$c_1 = 0{,}05$ m (distancia por tensión)

$c_2 = 0{,}15$ m (distancia por compresión)

Esfuerzo normal por tensión

$$\sigma_t = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I_{EN}} = \frac{P}{8\times10^{-3}} + \frac{(0{,}3\,P)(0{,}05)}{2\times10^{-5}} = 125P + 750P = 875P$$

Por condición del problema: $\sigma_t = 875P \leq 30\times10^3$ kN

o $P \leq 34{,}285$ kN

Esfuerzo normal por compresión

$$\sigma_c = \left[\frac{P}{A} - \frac{Mc_2}{I_{EN}}\right] = \frac{P}{8\times10^{-3}} - \frac{(0{,}3)P(0{,}15)}{2\times10^{-5}}$$

$\sigma_c = 125P - 2250P = -2125P$

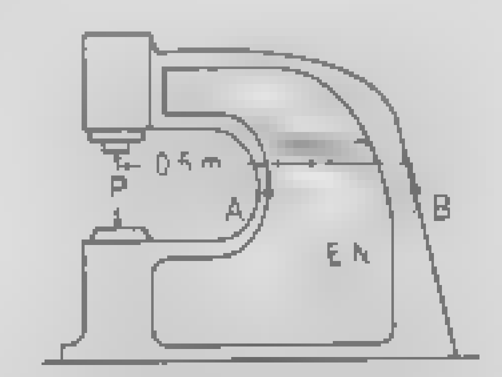
Tomando el valor absoluto: $\sigma_c = 2125P \leq 70\times10^3$ kN o $P \leq 32{,}941$ kN

Es decir, el máximo valor admisible para P será: $\boxed{P = 32{,}9\ \text{kN}}$

908 Una prensa tiene la estructura de acero fundido que muestra la figura. Calcular la fuerza máxima de prensado que se puede ejercer sin sobrepasar el esfuerzo máximo de 120 MPa en la sección A-B, cuyo esquema y datos se indican también en la figura (1-1 es el eje que pasa por el centro de gravedad de la sección)

Resolución

Del diagrama



Tomando momentos respecto a E.N.

$$M = (0{,}5 + 0{,}2)P = (0{,}7)P \qquad \dots (1)$$

En B se da tensión y en A compresión
De la sección transversal

donde $I = 1600 \times 10^{6}\ mm^4 = 16 \times 10^{-4}\ m^4$
$A = 80 \times 10^{3} mm^2 = 8 \times 10^{-2}\ m^2$
$c_1 = 0{,}3$ m (distancia por tensión)
$c_2 = 0{,}2$ m (distancia por compresión)

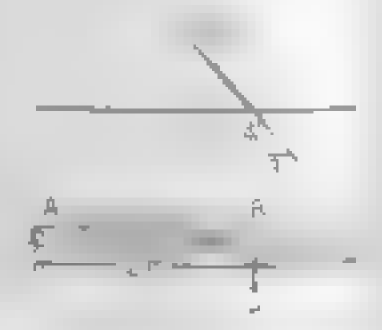
El esfuerzo máximo se da por tensión

$$\sigma_t = \sigma_B = \left[\frac{P}{A} + \frac{Mc_1}{I}\right] \Rightarrow \sigma_B = \frac{P}{8\times10^{-2}} + \frac{(0{,}7)P(0{,}3)}{16\times10^{-4}} = 143{,}75P$$

Por condición del problema σ_B: $143{,}75P \le 120\times10^3$ kN $\Rightarrow P \le 834{,}78$ kN

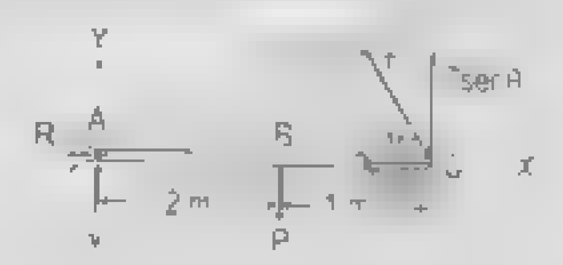
Así: $\boxed{P_{máx} = 834{,}78\ kN}$

909 Una viga de sección rectangular de 100 mm de ancho por 400 mm de altura, está articulada en A, sujeta mediante un cable CD y sometida a una carga P, como se muestra en la figura. Calcular el máximo valor de P que producirá un esfuerzo normal no mayor de 120 MPa. Descarte la posibilidad de pandeo.



Resolución

Del diagrama de cuerpo libre del sistema



Como $\tan\theta = \frac{4}{3} \rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$

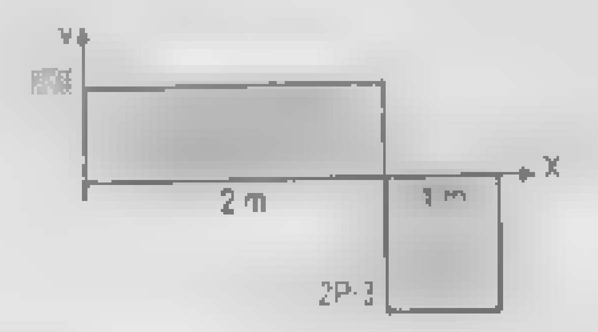
Por las leyes de la estática

$$\sum F_y = 0 = V + T\frac{4}{5} - P \qquad (1)$$

$$\sum M = 0: 3V = P \qquad (2)$$

Resolviendo: $V = \frac{P}{3}$, $T = \frac{5}{6}P \qquad (\alpha)$

Graficando las fuerzas cortantes



El momento máximo está para x = 2 m, así: $M_{máx} = \frac{P}{3}(2) = \frac{2}{3}P \qquad (\beta)$

De la sección rectangular

0,4 m
0,1 m

donde $A = (0{,}1)(0{,}4)\ m^2 = 4 \times 10^{-2}\ m^2$

$$I = \frac{(0{,}1)(0{,}4)^3}{12}\ m^4 = \frac{16}{3}\times10^{-4}\ m^4$$

$$c = \frac{(0{,}4)}{2}\ m = 0{,}2\ m$$

La fuerza $T\cos\theta$ es axial por compresión además

$$T\cos\theta = \frac{P}{2} \qquad \text{.. } (\theta)$$

El esfuerzo normal máximo será por compresión

$$\sigma_{máx.} = \frac{-T\cos\theta}{A} - \frac{Mc}{I}$$

$$\sigma_{máx.} = \frac{-(P/2)}{4\times10^{-2}} - \frac{(2)(3)(P/2)}{(16/3)\times10^{-4}}$$

Sólo tomando su valor absoluto: $\sigma_{máx} = 12{,}5P + 250P = 262{,}5P$

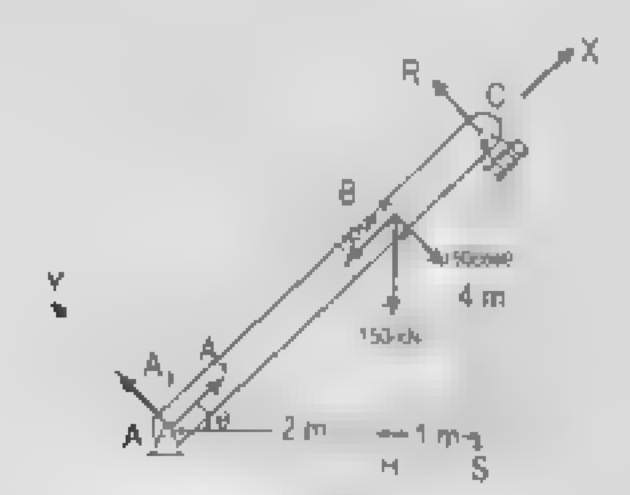
Por condición del problema: $\sigma_{máx.} = 262{,}5P \leq 120 \times 10^3$ kN,
así $P \leq 457{,}14$ kN

Luego $\boxed{P_{máx} = 457 \text{ kN}}$

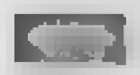
910 La viga inclinada de la figura está sujeta mediante un perno en A y sobre rodillos en C. Si su sección es rectangular, de 100 mm x 300 mm, calcular el esfuerzo de compresión máximo desarrollado en la viga.

Resolución:

Diagrama de cuerpo libre del sistema



Como $\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$. (1)



además $AB = \frac{AH}{\cos\theta} = \frac{10}{3}$ m $\quad BC = \frac{AB}{2} = \frac{5}{3}$ m

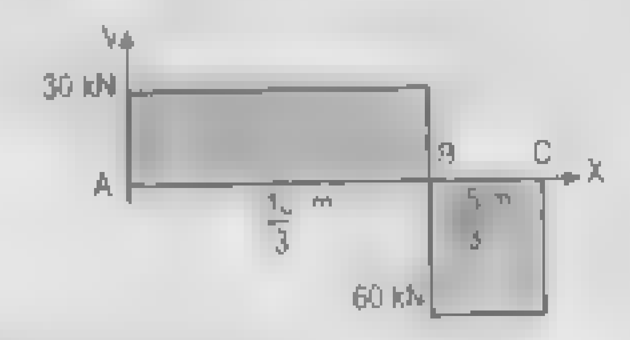
Por leyes de la Estática

$$\sum F_y = 0 = A_y + R - 150\left(\frac{3}{5}\right) \qquad . (2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad (AC)R - (AB)(150)\left(\frac{3}{5}\right) \qquad .. (3)$$

De (2) y (3): $R = 60$ kN
$A_y = 30$ kN

Hallando el momento máximo
(del diagrama de fuerzas cortantes)



El momento máximo se da en $x = \frac{10}{3}$ m

$$M_{máx} = 30\left(\frac{10}{3}\right) \text{ kN m} = 100 \text{ kN m} \qquad (\alpha)$$

De la sección rectangular

donde $A = (0{,}1)(0{,}3)$ m^2 = 3×10^{-2} m^2

$$I = \frac{(0{,}1)(0{,}3)^3}{12} \text{ m}^4 = 225 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$c = \frac{0{,}3}{2} \text{ m} = 0{,}15 \text{ m}$$

La fuerza axial de compresión es $P = 150sen\theta = 120$ kN

El esfuerzo normal por compresión es. $\sigma_c = \left| -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} \right|$

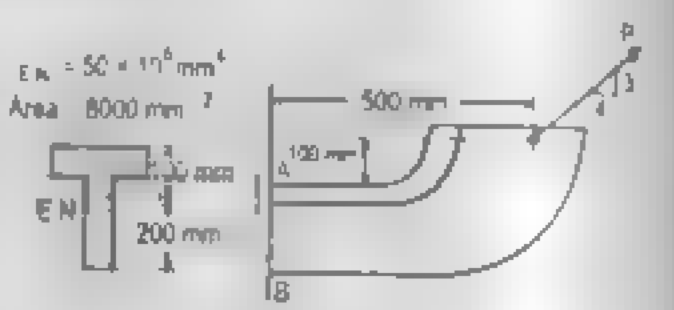
Solo tomando el valor absoluto

$$\sigma_c = \left(\frac{120}{3\times10^{-2}} + \frac{100(0.15)}{225\times10^{-6}} \right) kN/m^2$$

$$\sigma_c = (4000 + 66\ 666{,}7)\ kN/m^2$$

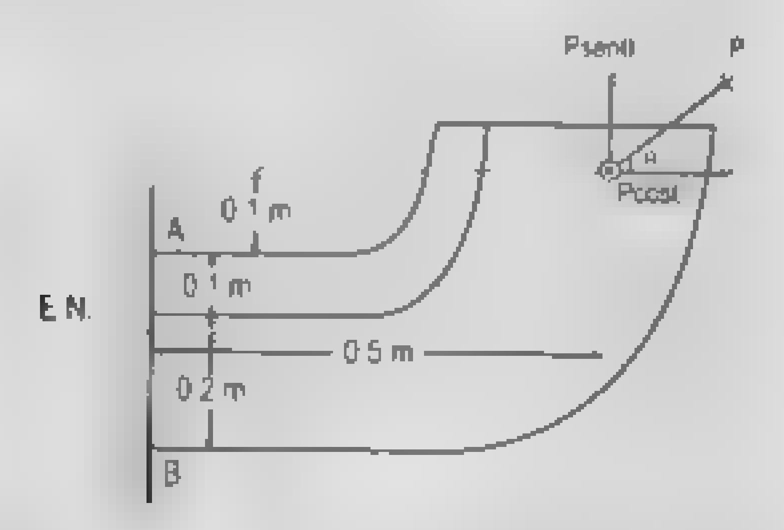
$\sigma_c = 70\ 666.7$ kN/m² o $\boxed{\sigma_c = 70.7\ MPa}$

911 Si P = 100 kN en la mensula de la figura, calcular los máximos valores de esfuerzo a tensión y compresión en la sección A B.



Resolución:

Del diagrama de cuerpo libre:



Tomando momento flexionante de P respecto al eje A B y al E N

$$M = (0{,}5)Psen\theta - (0{,}1 + 0{,}1)Pcos\theta$$

como $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ⟹ $sen\theta = \frac{3}{5}$ ∧ $cos\theta = \frac{4}{5}$

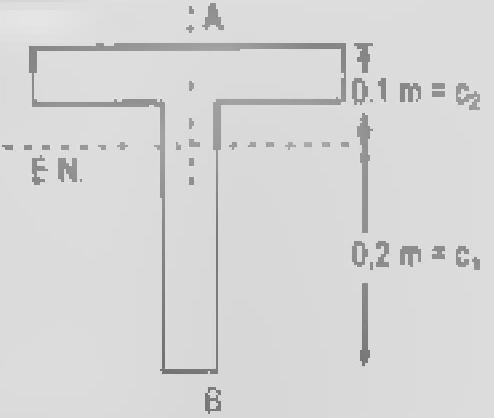
tenemos que $M = (0{,}5)\left(\frac{3}{5}\right)P - (0{,}2)\left(\frac{4}{5}\right)P = 0{,}14P$ ... (α)

La fuerza axial es de tensión producida por

$$P_{axial} = Pcos\theta = \frac{4}{5}P \qquad ...(\beta)$$

Por la dirección de la fuerza flectora P se produce tensión en B y compresión en A

De la sección transversal



Donde $A = 8\times10^3\ mm^2 = 8\times10^{-3}\ m^2$

$I_{EN} = 50\times10^6\ mm^4 = 5\times10^{-5}\ m^4$

$c_1 = 0.2$ m (distancia por tensión)

$c_1 = 0{,}1$ m (distancia por compresión)

Hallando los esfuerzos normales máximos

$$\sigma_t = \frac{P_{axial}}{A} + \frac{M_{AB}c_1}{I_{EN}} \qquad \text{(de tensión)}$$

$$\sigma_t = \frac{\frac{4}{5}P}{8\times10^{-3}} + \frac{(0.14P)(0.2)}{5\times10^{-5}} = 660P \qquad (1)$$

$$\sigma_c = \frac{P_{axial}}{A} - \frac{M_{AB}c_2}{I_{EN}} \qquad \text{(de compresión)}$$

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)P}{8\times10^{-3}} - \frac{(0.14P)(0.1)}{5\times10^{-5}} = -180P \qquad ...(2)$$

Para el problema P = 100 kN así

$\boxed{\sigma_t = 660(100)\ kN/m^2 = 66\ MPa}$ $\sigma_c = 18\times10^3\ kN/m^2 = 18\ MPa$

912 Determinar la máxima fuerza P que se puede aplicar en el problema anterior si los esfuerzos admisibles en A B son de 8 MPa y 12 MPa a tensión y compresión, respectivamente

Resolución

Por las ecuaciones (1) y (2) del problema 911 $\sigma_t = 660P \leq 8000$ kN

donde $P \leq 12{,}12$ kN ...(α)

y (solo tomando el valor absoluto).

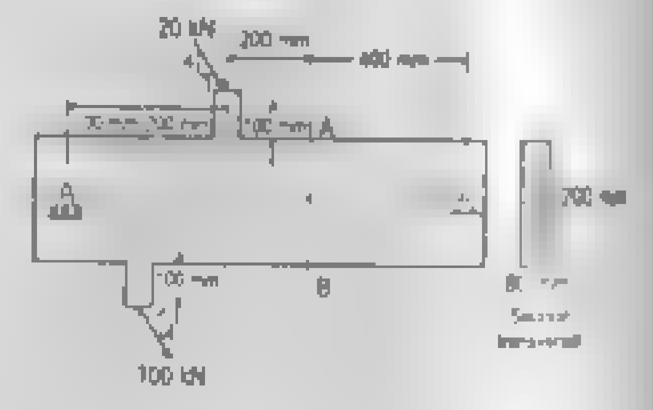
$\sigma_c = 180P \leq 12\,000$ kN

$P \leq 66{,}67$ kN ...(β)

de (α) y (β) el máximo valor de P es el menor de los valores hallados así

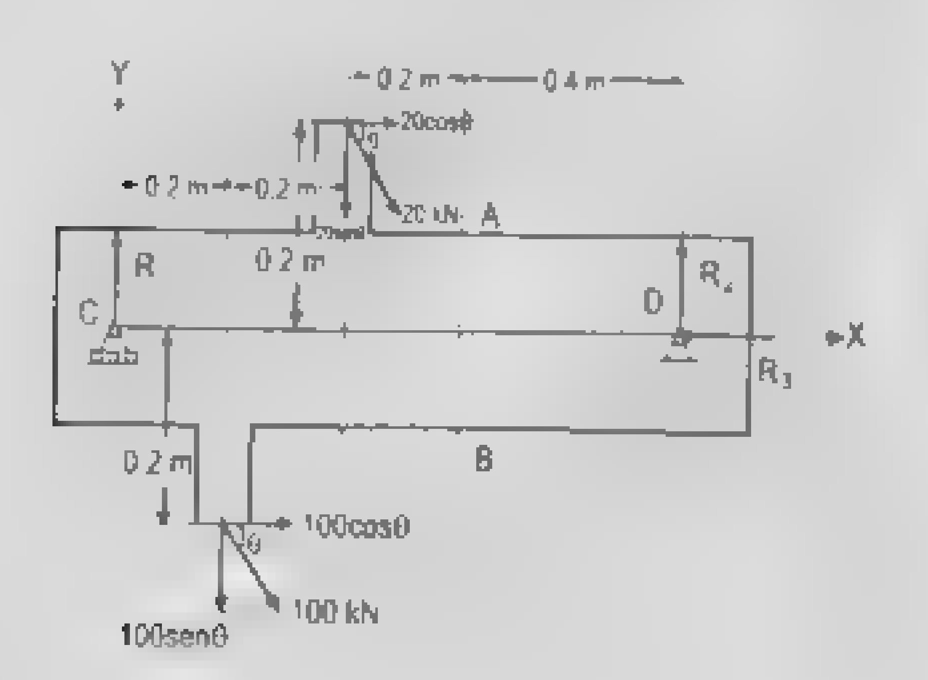
$\boxed{P_{max} = 12{,}1 \text{ kN}}$

913. Calcular los esfuerzos en A y en B en la pieza cargada como indica la figura.



Resolución

Del diagrama de cuerpo libre del sistema



De dato $\tan\theta = \frac{4}{3} \rightarrow \text{sen}\theta = \frac{4}{5} \rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$

Luego, por las ecuaciones de la Estática

$\sum F_x = 0 \quad 20\cos\theta + 100\cos\theta = R_3$

así $R_3 = 72$ kN

$\sum F_y = 0 = R_1 + R_2 - 20\text{sen}\theta - 100\text{sen}\theta$

así $R_1 + R_2 = 96$ kN ...(1)

$\sum M_C = 0 = (0{,}1)R_2 + (0{,}2)(100\cos\theta) - (0{,}2)(100\text{sen}\theta)$
$\quad - (0{,}4)(20\text{sen}\theta) - (0{,}2)(20\cos\theta)$

Luego, $R_2 = 12{,}8$ kN ...(2)

De (1) y (2): $R_1 = 83{,}2$ kN

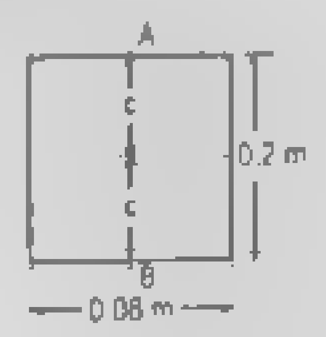
Tomando momentos respecto al eje A-B. (por el lado derecho)

$M = (0.4)R_2 = (0.4)(12{,}8)$ kN·m o

$M = 5{,}12$ kN·m

La fuerza axial que actúa sobre A-B es R_3 por compresión

De la sección transversal



tenemos

$A = (0.08)(0.2)\ m^2 = 16 \times 10^{-3}\ m^2$

$I = \frac{(0{,}08)(0{,}2)^3}{12} m^4 = \frac{16}{3} \times 10^{-5} m^2$

$c = \frac{0.2}{2} = 0.1$ m

Los esfuerzos normales en A-B son

$$\sigma = \left[\frac{R_3}{A} + \frac{Mc}{I}\right] \text{(por tensión)}$$

$$\sigma = \left[\frac{72}{16\times10^{-3}} + \frac{(5.12)(0,1)}{\frac{16}{3}10^{-5}}\right] \text{kN/m}^2$$

$$\sigma_I = (-4500 + 9600)\ \text{kN/m}^2$$

$$\sigma_I = 5,1\ \text{MPa}$$

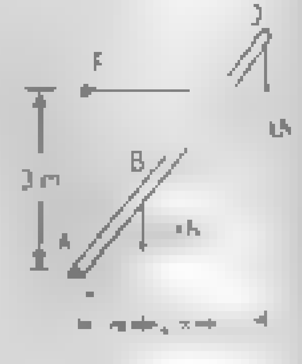
Como el punto B es afectado por tensión, así $\boxed{\sigma_I = \sigma_B = 5,1\ \text{MPa}}$

A compresión $\sigma = \left[\frac{R_3}{A} - \frac{Mc}{I}\right]$ (por compresión)

$$\sigma = (-4500 - 9600)\ \text{kN/m}^2$$

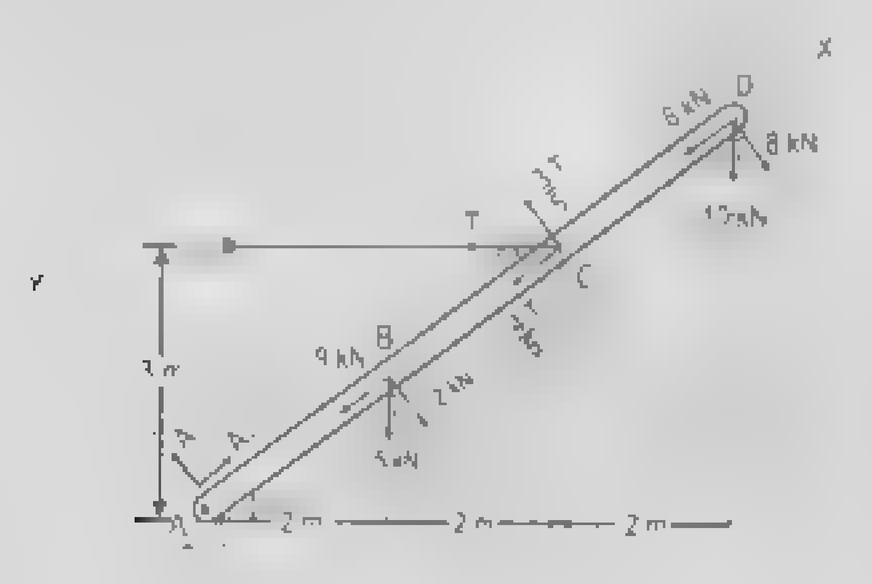
$$\boxed{\sigma_I = -14,1\ \text{MPa} = \sigma_A}$$

914 Una viga de madera, AD, de 100 mm de espesor y 300 mm de peralte, cargada como se indica en la figura, está articulada en su extremo inferior y sujeta por un cable horizontal CE. Determinar el máximo esfuerzo de compresión en la viga



Resolución

Del diagrama de cuerpo libre del sistema. ($\tan\theta = 3/4$)



$$\sum M_A = 0 = 2(15) + 6(10) - T(3) \Rightarrow T = 30\ \text{kN}$$

$$\sum F_x = 0 = -15\text{sen}\theta - T\cos\theta - 10\text{sen}\theta + A_x$$

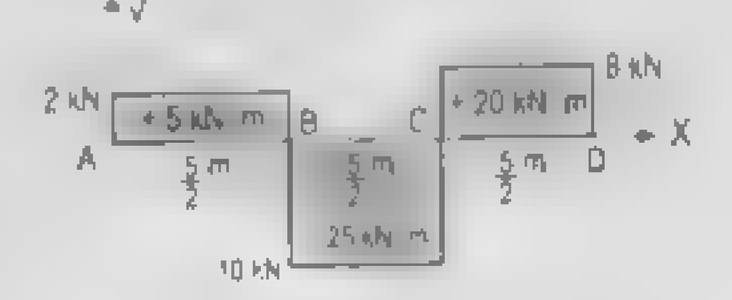
$$\Rightarrow A_x = 15\left(\frac{3}{5}\right) + (30)\left(\frac{4}{5}\right) + 10\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow A_x = 39\ \text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 = A_y - 15\cos\theta + T\text{sen}\theta - \cos\theta$$

$$\Rightarrow A_y = 15\left(\frac{4}{5}\right) - 30\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow A_y = 2\ \text{kN};$$

(también $AB = BC = CD = \frac{5}{2}$ m)

Graficando las fuerzas cortantes



Donde el momento flector máximo se da en C, para x = 5 m

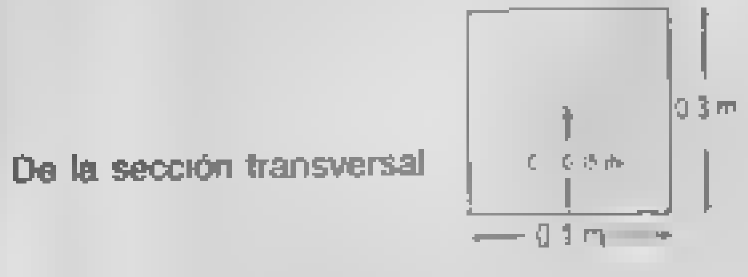
$$M_{máx.} = 20\ \text{kN m}$$

En el punto C la fuerza axial es $P_{axial} = \frac{4}{5}T + 6\ \text{kN} = \frac{4}{5}(30) + 6 = 30\ \text{kN}$

Ojo: P_{axial} es de compresión

El esfuerzo normal es: $\sigma_N = \frac{P_{axial}}{A} + \frac{M_{máx}c}{I}$

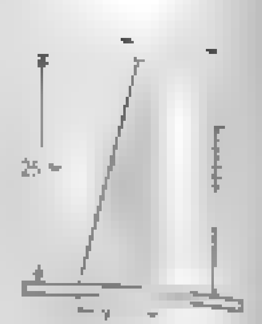
De la sección transversal



$$\sigma_N = \frac{30\ \text{kN}}{(0,1)(0,3)\ \text{m}^2} + \frac{(20\ \text{kN·m})(0.15\ \text{m})}{\left(\frac{0.1}{12}\right)\text{m}\cdot(0,3)^3\text{m}^3}$$

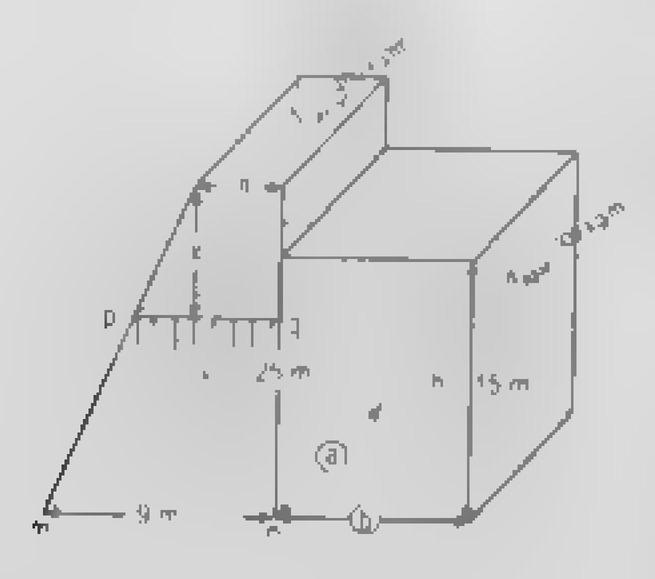
$$\sigma_N = 14333,3\ \text{kN/m}^2 \quad \text{o} \quad \boxed{\sigma_N = 14,3\ \text{MPa}}$$

915. Una presa de concreto tiene el perfil indicado en la figura. Si la densidad del concreto es 2400 kg/m^3 y la del agua, 1000 kg/m^3, determinar el máximo esfuerzo de compresión en la sección m-n cuando la altura del agua embalsada, h, es de 15 m.



Resolucion:

Del diagrama de cuerpo libre del sistema



El peso del concreto equilibra con la fuerza de reacción del bloque:

(volumen) x (densidad) x (g) = σ_x · (área) ...(1)

Por relaciones geométricas: $pq = \frac{6x}{25} + 3$

El volumen del concreto a una altura "x" es

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{6x}{25}\right)x \cdot a + (3)(x)\,a = (3)\left(\frac{x}{25}+1\right)a$$

Además (área) = pq a $= 3\left(\frac{2x}{25}+1\right)\cdot a$

En (1): $(3x)\left(\frac{x}{25}+1\right)a\,(2400\ \frac{kg}{m^3})(9{,}81\ \frac{m}{s^2}) = \sigma_x\, 3\left(\frac{2x}{25}+1\right)a$

Simplificando: $\sigma_x = \frac{x(x+25)}{2x+25} \times (2400)(9{,}81)\ \frac{N}{m^2}$ donde $x \in \langle 0;\ 25\rangle$

Así el esfuerzo generado por el peso del concreto en la base m-n se da para x = 25 m

$$\sigma_1 = \frac{(25+25)(25)}{(2(25)+25)}(2400)(9{,}81)\ \frac{N}{m^2} \Rightarrow \sigma_1 = 392{,}4\ \text{kPa} \quad ...(2)$$

El peso del agua genera un esfuerzo en fondo igual a

$(\sigma_{agua})(\text{área}) = (V_{agua})(d_{agua})$

$(\sigma_{agua})(a \times b) = (a \times b \times h)(1000\ \frac{kg}{m^3})\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)$

$\sigma_{agua} = (15)(1000)(9{,}81)\ N/m^2$

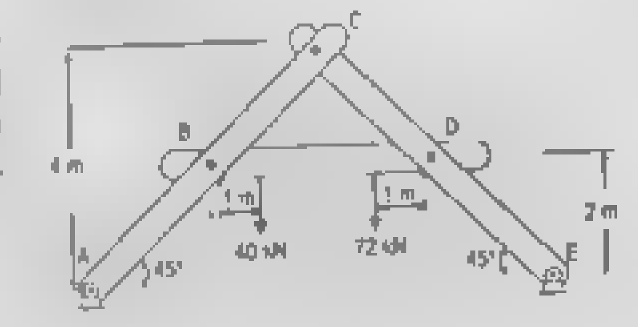
$\sigma_{agua} = 147{,}15\ \text{kPa}$ ... (3)

El esfuerzo conjunto que soporta el fondo de la represa es la suma de ambos esfuerzos

$\sigma_{m-n} = \sigma_1 + \sigma_{agua}$

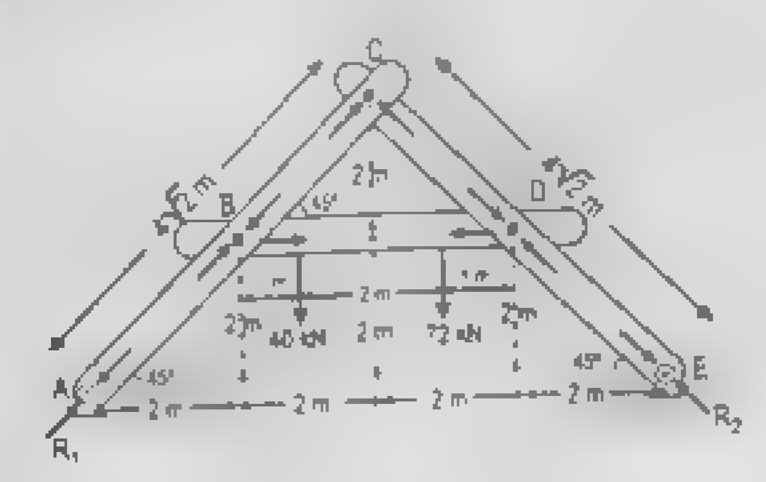
$\sigma_{m-n} = 392{,}4\ \text{kPa} + 147{,}15\ \text{kPa} \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{m-n} = 539{,}55\ \text{kPa}}$

6 Dado el marco articulado de la figura, calcular el esfuerzo normal máximo en el miembro BD si su sección es de 100 mm de ancho por 400 mm de altura. Despreciar los pesos de todos los miembros



Resolución.

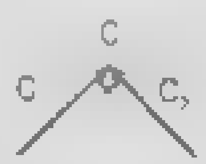
Del diagrama de cuerpo libre



Como: $\Sigma M_E = 0 \quad 4\sqrt{2}\,R_1 - 40(5) - 72(3) \Rightarrow R_1 = 52\sqrt{2}\,kN$

Del mismo modo: $\Sigma M_A = 0 = 4\sqrt{2}R_2 - 40(3) - 72(5) \Rightarrow R_2 = 60\sqrt{2}kN$

En el nudo C



Para el equilibrio solo si: $c_1 = c = 0$

En el nudo B

donde $B_1 = R_1\cos45° = 52$ kN ...(1)

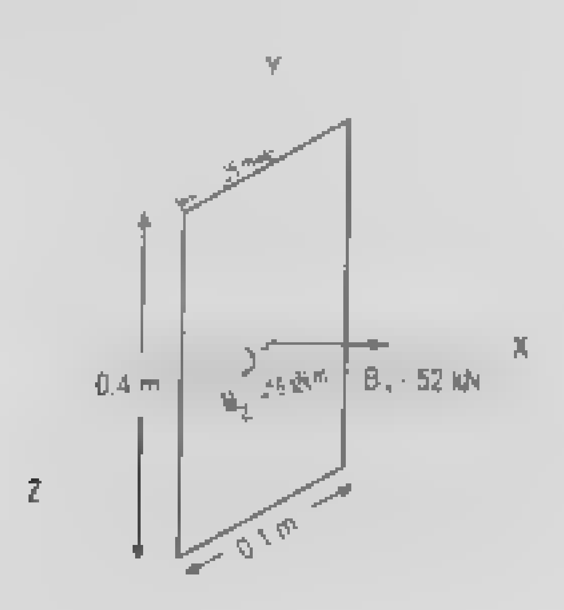
Tomando momentos en B

$\Sigma M_B = 2\sqrt{2}R_2 - 40(1) - 72(3)$

$\Sigma M_B = (2\sqrt{2}(60\sqrt{2}) - 40 - 72(3))$ kN m

$\Sigma M_B = -16$ kN·m ...(2)

Así la sección recta de la viga BD soporta.



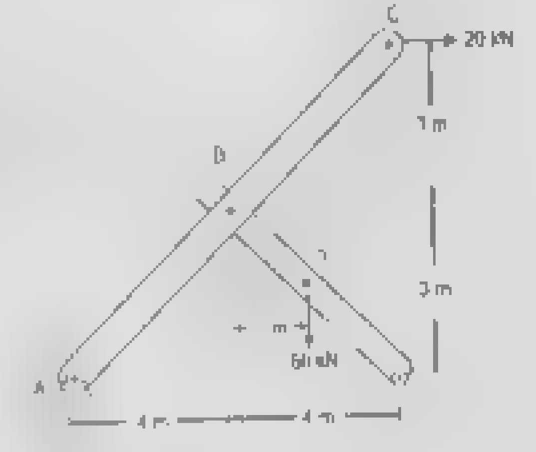
... momento torsionante que soporta la barra AB es M_z = 16 kN·m a lo largo ... eje Z; es la que produce el esfuerzo flector

... , el esfuerzo normal es

$$\sigma_1 = \frac{B}{A} + \frac{M \cdot c}{I} = \frac{52\ kN}{(0.1)(0.4)m^2} + \frac{16\ 0.0...\ kN\ m^2}{\frac{(0.4)(0.1)^3}{12}\ m^4}$$

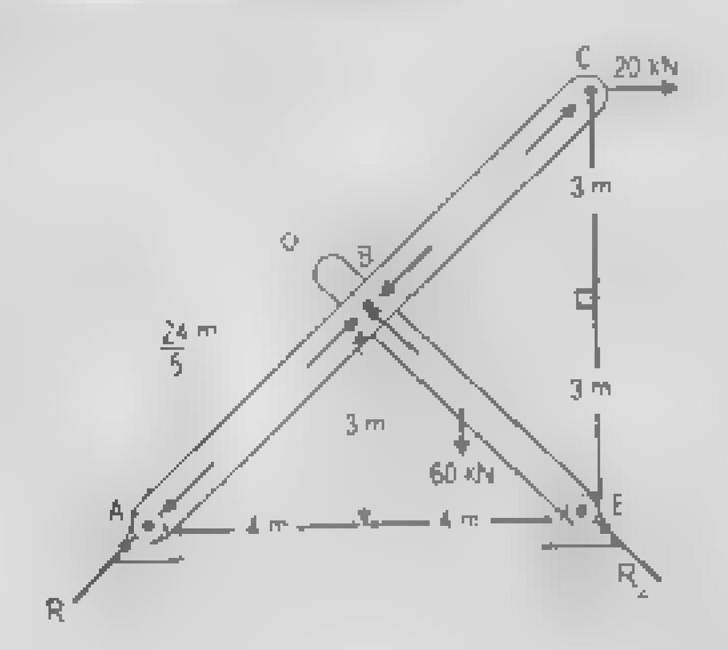
$$\sigma = 1.3\ MPa + 24\ MPa \Rightarrow \boxed{\sigma = 25.3\ MPa}$$

7. La estructura mostrada en la figura, esta ... da a apoyos fijos en A y en E. Calcular ... máximo esfuerzo de compresión desarro... ...do en la barra BDE, si su sección es cua... ...da, de 200 mm de lado. Despreciar los pesos de todos los miembros



Resolución.

Del diagrama de cuerpo libre del sistema



Por las leyes de la estática

$$\Sigma M_A = 0 = \left(\frac{24}{5}\right)R_2 - (6)(60) - 6(20)$$

$$\Rightarrow R_2 = 100 \text{ kN} \qquad \ldots(1)$$

Siendo R_2 la fuerza o carga axial sobre la barra BE es la causante de[illegible]zo normal axial

$$\sigma_{axial} = \left(\frac{P}{A}\right) = \frac{R_2}{A} \quad [illegible] \qquad \ldots(2)$$

El momento flector máximo será la que expenmente en el punto B

$$\Sigma M_B = M = (60(2) + 20(3)) \text{ kN m} \Rightarrow M = 180 \text{ kN m}$$

donde el esfuerzo normal es

$$\sigma_f = \frac{Mc}{I} = \frac{M(a/2)}{\frac{a^4}{12}} = \frac{6M}{a^3} \qquad \ldots(B)$$

donde "a" es el doble de la sección cuadrado, por los datos a = 0.2 m

La carga axial es de compresión, así que el esfuerzo máximo a compresión es

$$\sigma_{máx} = \frac{R_2}{a^2} + \frac{6M}{a^3} \Rightarrow \sigma_{máx} = \frac{100 \text{ kN}}{(0.2)^2 \text{ m}^2} + \frac{6(180 \text{ kN·m})}{0.2 \text{ m}^3}$$

$$\sigma_{máx} = 2{,}5 \text{ MPa} + 135 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{máx} = 137{,}5 \text{ MPa}}$$

918. Una fuerza de compresión de 80 kN se aplica, como representa la figura I, en un punto situado 40 mm a la derecha y 60 mm por encima del centro de gravedad de una sección rectangular de b = 200 mm y h = 400 mm. Calcular los esfuerzos en las cuatro esquinas y la posición de la línea neutra. Hágase, de acuerdo con las soluciones obtenidas, un esquema como el de la figura II

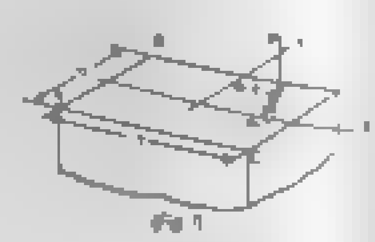
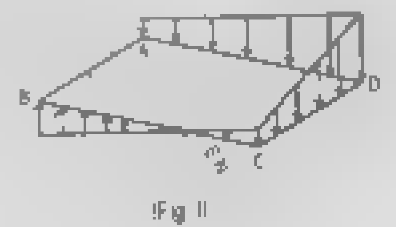


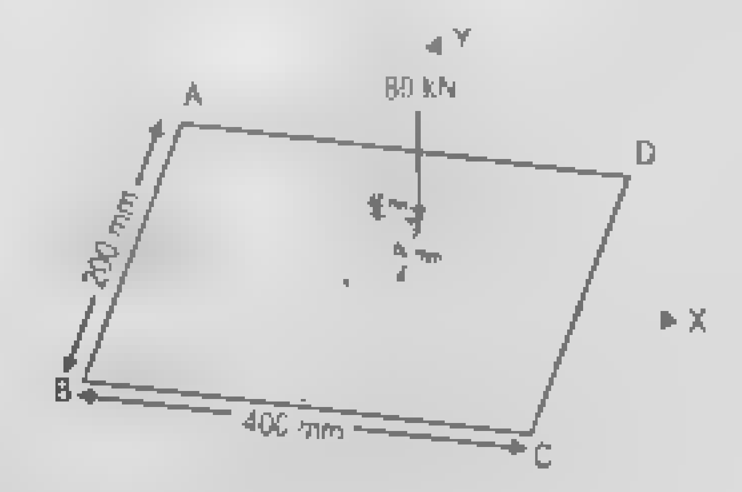
Fig I



!Fig II

Resolución

Graficando



b = 200 mm = 0.2 m ; h = 400 mm = 0.4 m

e_x = 40 mm = 0.04 m ; e_y = 60 mm = 0.06 m

P = 80 kN

Además tenemos

$$A = b.h = (0{,}2)(0{,}4) \text{ m}^2 = 8\times10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{b^3h}{12} = \frac{(0.2)^3(0.4)}{12} \text{ m}^4 = \frac{8}{3}\times10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0{,}2)(0{,}4)^3}{12} \text{ m}^4 = \frac{32}{3}\times10^{-4} \text{ m}^4$$

El esfuerzo σ en un punto cualquiera (x, y), es $\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_x}{I_y}x + \frac{Pe_y}{I_x}y$

$$\sigma = \frac{-80 \text{ kN}}{8\times10^{-2} \text{ m}^2} - \frac{(80 \text{ kN})(0{,}04 \text{ m})x}{\frac{32}{3}\times10^{-4} \text{ m}^4} - \frac{(80 \text{ kN})(0{,}06 \text{ m})y}{\frac{8}{3}\times10^{-4} \text{m}^4}$$

$$\sigma = -(1000 + 3000x + 18\,000y)\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \Rightarrow \sigma = -(1 + 3x + 18y) \text{ MPa}$$

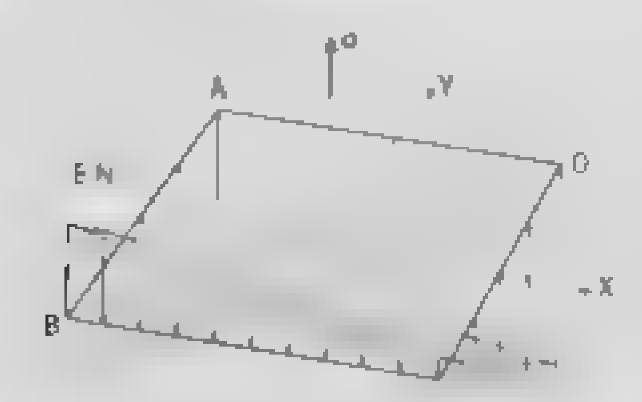
Hallando los esfuerzos en las esquinas

A = (– 0,2; 0,1) ⇒ $\boxed{\sigma_A = -2,2\ \text{MPa}}$

B = (– 0,2; – 0,1) ⇒ $\boxed{\sigma_B = 1,4\ \text{MPa}}$

C = (0,2; – 0,1) ⇒ $\boxed{\sigma_C = 0,2\ \text{MPa}}$

D = (0,2; 0,1) ⇒ [illegible]



919 Con los datos del problema 918, [illegible] centro de gravedad de la sección para que no aparezcan esfuerzos de tensión en punto alguno de la misma?

Resolución

Al colocar una carga P_1 en el centro de gravedad de la sección, tenemos

$$\frac{P_1+P}{A}=\frac{(P\cdot e_x)}{I_y}x+\frac{(P\cdot e_y)}{I_x}y$$

es decir, para que no haya tensión, el esfuerzo axial (producido por P_1 y P) es igual al esfuerzo por flexión (producido solo por P)

Colocando los datos y operando

$$\frac{P_1+80}{8\times10^{-2}}=\frac{(80)(0.04)}{\frac{32}{3}\times10^{-4}}x+\frac{(80)(0.06)}{\frac{8}{3}\times10^{-4}}y \Rightarrow P_1=8(30x+180y)-80$$

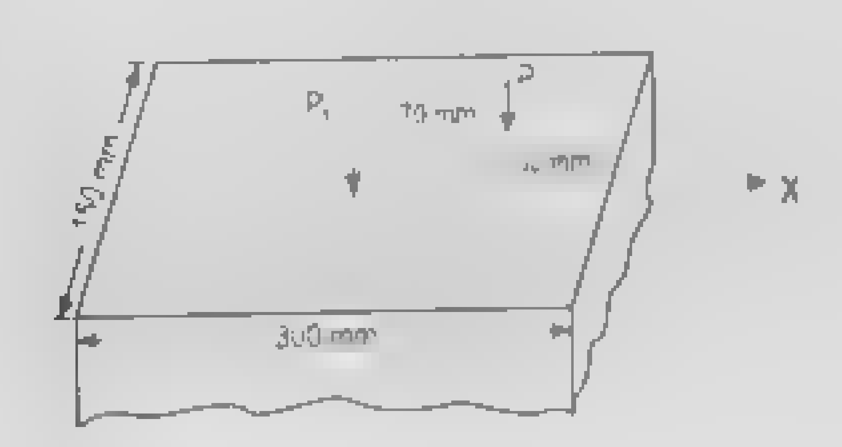
Hallando P_1 máximo; será para. $x = 0.2$ m ∧ $y = 0.1$ m;

así: $P_1 = 8[30(0.2) + 180(0,1)] - 80$ $\boxed{P_1 = 112\ \text{kN}}$

Una fuerza de compresión de 100 kN se aplica, como indica la figura ... de problema 918, en un punto 70 mm a la derecha y 30 mm por encima del centro de gravedad de una sección rectangular de b = 150 mm y h = 300 mm. ¿Qué carga adicional, actuando normalmente a la sección en su centro de gravedad, elimina los esfuerzos de tensión?

Resolución

Graficando



$$I_y=\frac{bh^3}{12}=\frac{(150)(300)^3}{12}\ \text{mm}^4=3375\times10^5\ \text{mm}^4$$

$$I_x=\frac{b^3h}{12}=\frac{(150)^3(300)}{12}\ \text{mm}^4=84\ 375\times10^3\ \text{mm}^4$$

El esfuerzo axial es: $\sigma_A=\frac{P_1+P}{A}=\frac{P_1+100}{45\times10^3}$ ... (1)

El esfuerzo por flexión es: $\sigma_f=\frac{(Pe_x)x}{I_y}+\frac{(Pe_y)y}{I_x}$

$$\sigma_f=\frac{(100)(70)}{3375\times10^5}x+\frac{(100)(30)}{84\ 375\times10^3}y \quad \text{... (2)}$$

Para que no haya tensión, el esfuerzo axial es igual al esfuerzo de tensión

(1) = (2)

$$\frac{P_1+100}{45\times10^3}=\frac{(100)(70)}{3375\times10^5}x+\frac{(100)(30)}{84\,375\times10^3}y$$

Simplificando: $P_1 = 45\left(\frac{56}{27\times10^2}x+\frac{8}{225}y\right)-100$

P_1 máximo será para:

x = 150 mm ; y = 75 mm

Así: $P_1 = 45\left(\frac{28}{9}+\frac{8}{3}\right)-100 = 260-100 \quad \therefore \boxed{P_1 = 160\ kN}$

921 Determinar y dibujar el núcleo de la sección de una sección W360 × 122

Resolución:

Graficando:

Para el perfil W360 × 122, se tiene:

A = 15 500 mm²

$I_x = 365 \times 10^6\ mm^4$

$I_y = 61,5 \times 10^6\ mm^4$

h = 363 mm

b = 257 mm

El esfuerzo combinado producido por una carga P en el punto (e_x, e_y) en cualquier punto genérico (x, y): $\sigma = \frac{P}{A}+\frac{Pe_x}{I_y}x+\frac{Pe_y}{I_x}y$

el esfuerzo nulo se da en $0 = \frac{P}{A}+\frac{Pe_x}{I_y}x+\frac{Pe_y}{I_x}y$

$$\left(\frac{x}{I_y}\right)e_x+\left(\frac{y}{I_x}\right)e_y=\frac{-1}{A} \quad \ldots(1)$$

que es la ecuación de una recta cuyos valores para los puntos extremos de la sección, son:

1 Para $x = \frac{257}{2}$ mm ∧ $y = \frac{363}{2}$ mm

Reemplazando en (1): $\frac{257}{2}\frac{e_x}{61,5\times10^6}+\frac{363}{2}\frac{e_y}{365\times10^6}=\frac{-1}{15\,500}$

Hallando los puntos de intersección con X e Y

$e_x = -30,877$ mm (si $e_y = 0$) ; $e_y = -129,743$ mm (si $e_x = 0$)

Es una recta que pasa por los puntos

(− 30 877, 0) ∧ (0; − 129 743)

2 Para $x = -\frac{257}{2}$ mm ∧ $y = \frac{363}{2}$ mm

Reemplazando en (1): $\left(\frac{257}{2}\right)\frac{e_x}{61,5\times10^6}+\left(\frac{363}{2}\right)\frac{e_y}{365\times10^6}=\frac{-1}{15\,500}$

Los puntos de intersección con X e Y son: (+ 30.877; 0) ∧ (0; −129.743)

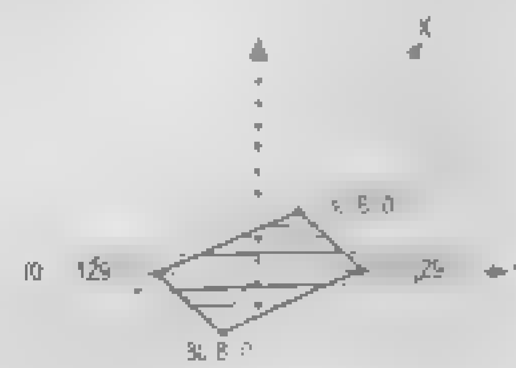
3 Del mismo modo para $x = \frac{257}{2}$ mm ∧ $y = -\frac{363}{2}$

Se tiene los puntos de intersección: (30.877; 0) ∧ (0; 129.743)

4 Por último para $x = \frac{257}{2}$ mm ∧ $y = \frac{-363}{2}$

los puntos de intersección son: (− 30.877, 0) ∧ (0; 129.743)

La gráfica de las cuatro rectas nos da el núcleo de la sección, que es un diamante con los puntos dados.



Es decir, una figura en forma de diamante con coordenadas
(30 677, 0) ; (0; 129,743)
(– 30 677; 0) ; (0; – 129,743)

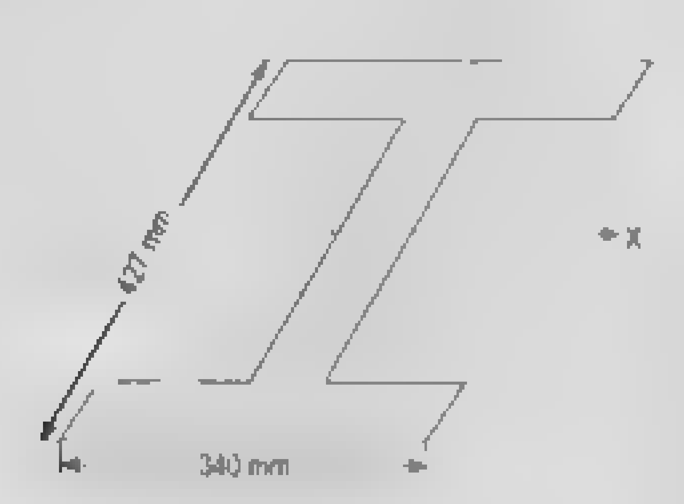
922 Resolver el problema anterior para una sección W310 × 500.

Resolución

Graficando

El perfil W310 × 500 tiene las siguientes dimensiones.

A 63 700 mm²
I_x 1690 × 10⁶ mm⁴
I_y 494 × 10⁶ mm⁴
h 427 mm
b = 340 mm



Los puntos extremos de la sección son

$$\frac{340}{2}\ \frac{427}{2} \qquad \frac{340}{2}\ \frac{427}{2} \qquad \frac{340}{2}\ \frac{427}{2} \qquad \frac{340}{2}\ \frac{427}{2}$$

El esfuerzo combinado en cualquier punto (x; y) producido por una carga P aplicada en (e_x e_y) será

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P e_x}{I_y}x + \frac{P e_y}{I_x}y$$

El esfuerzo es nulo si $\frac{x}{I_y}e_x + \frac{y}{I_x}e_y = -\frac{1}{A}$ (1)

que es una recta, hallando los puntos de intersección con XY en los puntos extremos de la sección: (en (1))

1. $$\frac{\left(\frac{340}{2}\right)e_x}{494\times10^6}+\frac{\left(\frac{427}{2}\right)e_y}{1690\times10^6}=\frac{-1}{63\,700}$$

Los puntos de intersección son: (– 45,6 mm; 0) ∧ (0; – 124,3 mm)

2. $$\frac{\left(\frac{-340}{2}\right)e_x}{494\times10^6}+\frac{\left(\frac{427}{2}\right)e_y}{1690\times10^6}=\frac{1}{63\,700}$$

Los puntos de intersección son: (45,6 mm; 0) ∧ (0; – 124,3 mm)

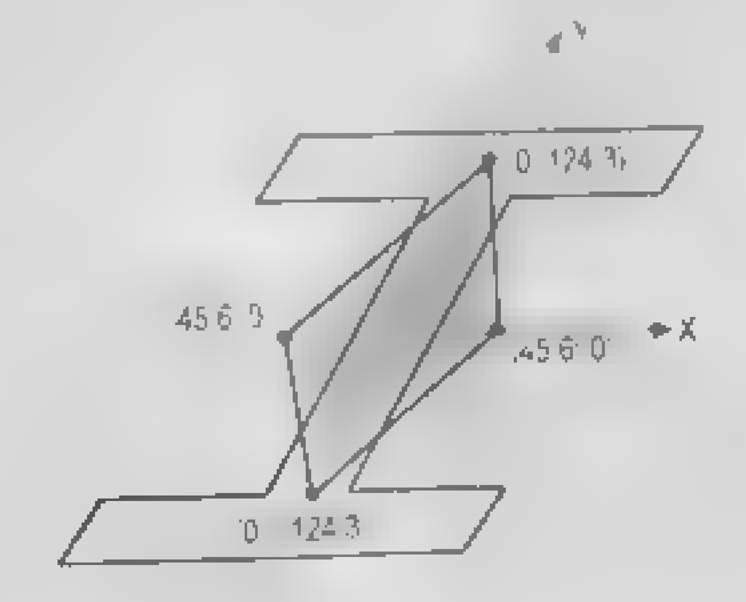
3. $$\frac{\left(\frac{-340}{2}\right)e_x}{494\times10^6}+\frac{\left(\frac{-427}{2}\right)e_y}{1690\times10^6}=\frac{-1}{63\,700}$$

Los puntos de intersección son: (45,6 mm; 0) ∧ (0; 124,3 mm)

4. $$\frac{\left(\frac{340}{2}\right)e_x}{494\times10^6}+\frac{\left(\frac{-427}{2}\right)e_y}{1690\times10^6}=\frac{1}{63\,700}$$

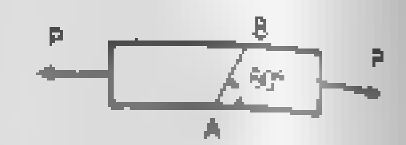
Los puntos de intersección son: (– 45,6 mm; 0) ∧ (0; 124,3 mm)

Los puntos hallados son los vértices del núcleo de la sección



923, 924 problemas ilustrativos

925 Dos piezas de madera de 50 mm × 100 mm de sección están ensambladas a lo largo de la junta AB como se indica en la figura. Calcular los esfuerzos normal y cortante sobre la superficie de ensamble, si P = 100 kN

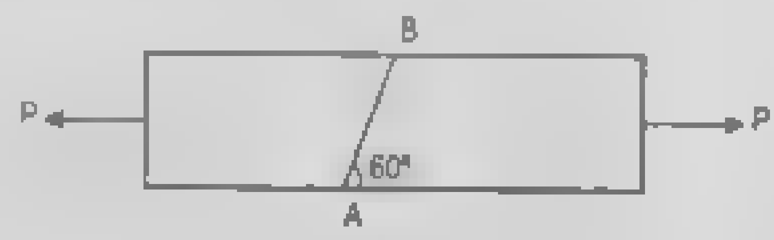


Resolución

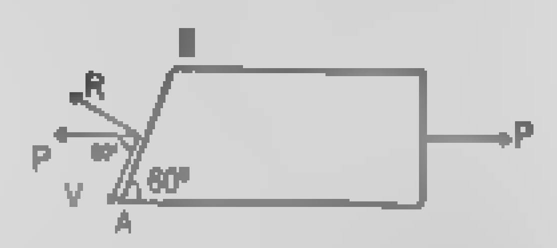
El área de la sección recta es

$A = (0{,}05)(0{,}1)\ m^2 = 5 \times 10^{-3} m^2$

Del diagrama



En el corte AB



Donde

$R = P\text{sen}60°,\ V = P\cos 60°$

además, AB: área de la sección oblicua, luego: $\dfrac{A}{\text{sen}60°} = AB$

Para los esfuerzos tenemos

$$\sigma_N = \frac{R}{AB} = \frac{P}{A}\ \text{sen}^2 60° \qquad \ldots(\alpha)$$

$$y \quad \tau = \frac{V}{AB} = \frac{P}{A}\ \text{sen}60°\cos 60° \qquad \ldots(\beta)$$

Como de los datos: P = 100kN, en (α) y (β): $\sigma_N = \dfrac{100}{5\times10^{-3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \dfrac{kN}{m^2}$

$\boxed{\sigma_N = 15\ MPa}$ del mismo modo: $\boxed{\tau = 5\sqrt{3}\ MPa}$

926 Una barra de pequeña longitud de sección circular de 50 mm de diámetro está hecha de un material cuyos esfuerzos admisibles son de 80 MN/m² a compresión y 30 MN/m² a cortante. Determinar la fuerza axial de compresión máxima que puede aplicarse

Resolución

Donde

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{-80 + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{-80}{2} - 0\right)^2 + (30)^2}$$

$$\frac{P_{máx.}}{A} = (-40 - 50)\ MN/m^2$$

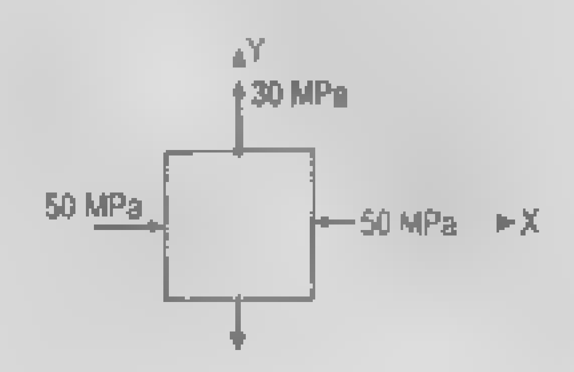
$$P_{máx.} = -(90)(1{,}96 \times 10^{-3})\ MN = -176{,}7\ kN$$

$\boxed{P_{máx} = 176{,}7\ kN}$ a compresión

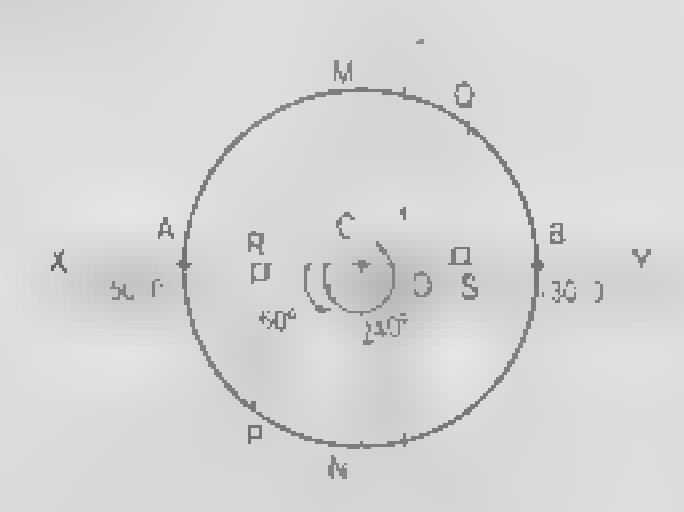
927 En un elemento de un sólido elástico, los esfuerzos principales son $\sigma_x = -50$ MPa y $\sigma_y = 30$ MPa. Calcular las componentes de esfuerzo en planos inclinados + 30° y + 120° respecto del eje X. Ilustre gráficamente sus respuestas

Resolución

El diagrama diferencial inicial es:



Ubicando los esfuerzos en el circulo de Mohr



Por las relaciones geométricas

$C = \frac{A+B}{2} = (-10;\ 0);\ AC = CB = PC = CQ = 40$

Para la inclinación de 30°, se toma 60° en el circulo de Mohr, donde

$RP = PC \ldots \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3};\ RC = PC\cos 60 = 40\ \frac{1}{2} \ldots 0$

Así $\sigma = (-10-20)$ MPa $= -30$ MPa; $\tau = -20\sqrt{3}$ MPa

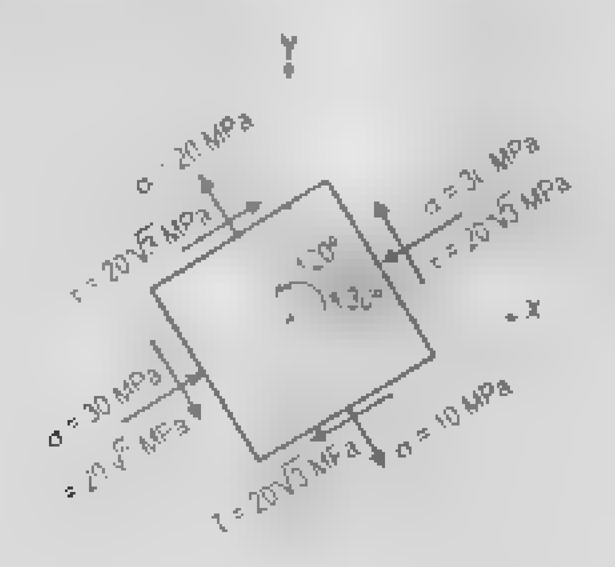
Para la inclinación de 120°, se toma 240° en el circulo de Mohr

$QS = CQ\ \text{sen}60° = 40(\sqrt{3}/2) = 20\sqrt{3}$

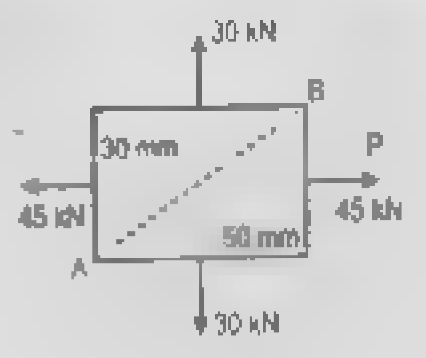
$CS = CQ\cos 60 = 40 \ldots 2 = 20$

Así $\sigma = (-10+20)$ MPa $= 10$ MPa; $\tau = 20\sqrt{3}$ MPa

Graficando:

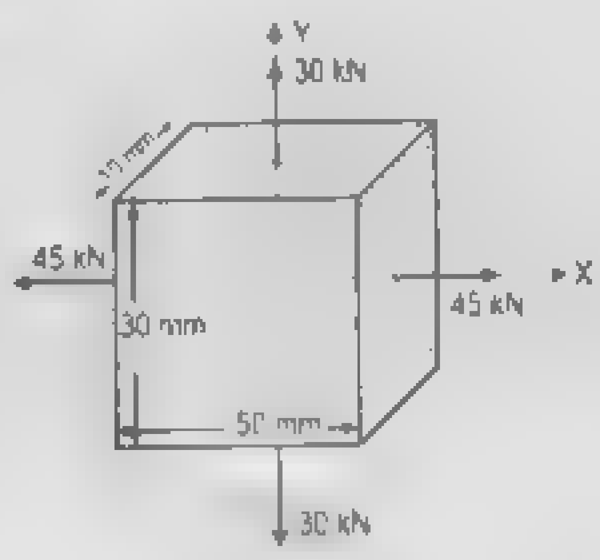


8 Un pequeño bloque en forma de paralelepípedo, de dimensiones 50 mm × 30 mm y 10 mm de espesor está sometido a unas fuerzas de tensión uniformemente distribuidas sobre sus caras, cuyas resultantes se indican en la figura. Calcular las componentes del esfuerzo en la diagonal AB



Resolución

Dibujando el cubo

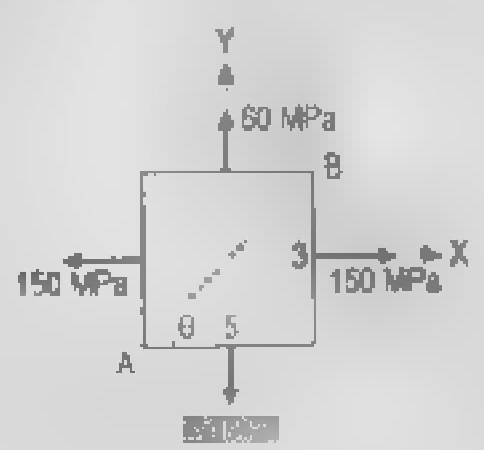


Las fuerzas producidas en cada cara son

$$\sigma_x = \frac{45\ \text{kN}}{30\ \text{mm} \times 10\ \text{mm}} = \frac{45\ \text{kN}}{(0{,}03)(0{,}01)\ \text{m}^2} = 150\ \text{MPa}$$

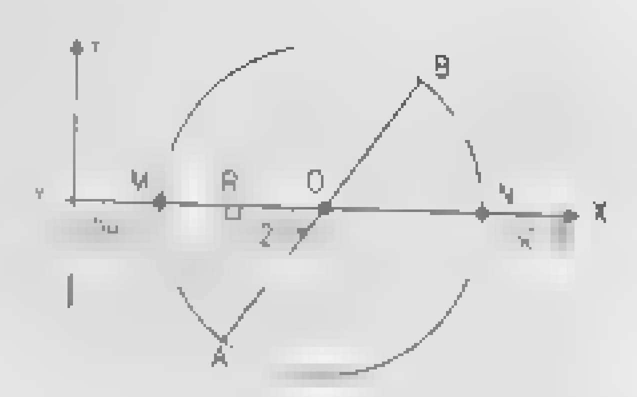
$$\sigma_y = \frac{30\ \text{kN}}{(50\ \text{mm})(10\ \text{mm})} = \frac{30\ \text{kN}}{(0{,}05)(0{,}01)\ \text{m}^2} = 60\ \text{MPa}$$

Tenemos.



como: $\tan\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = 30{,}96°$

En el circulo de Mohr



donde: $MO = ON = AO = OB = 45$, $O = (105, 0)$

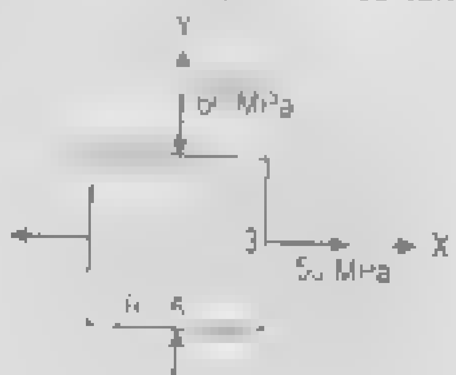
Así $\sigma = 105 - AO\cos 2\theta \Rightarrow \sigma = 105 - (45)\cos(2 \times 30{,}96°)$ ⇒ [illegible]

y $\tau = -AO\,\text{sen}2\theta = (45)(\text{sen}2(30{,}96°)) \Rightarrow$ [illegible] MPa

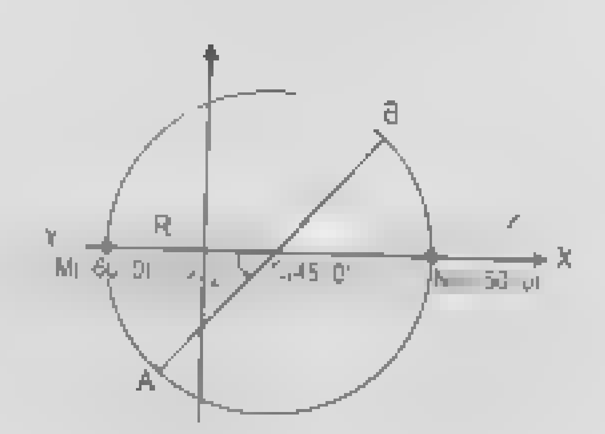
9… [illegible] a anterior si las fuerzas de 30 kN son de compresión en [illegible]

Resolución.

S[illegible] fuerza de 30 kN fuese de compresión se tendría el siguiente d[illegible]



En el circulo de Mohr



donde $MC = CN = AC = CB = 105$

Luego $\sigma = 45 - AC\cos(2\theta) \Rightarrow \sigma = 45 - (105)\cos(2 \times 30{,}96°)$

$$\boxed{\sigma = -4{,}42 \text{ MPa}}$$

Además $\tau = -AC\,\text{sen}(2\theta) \Rightarrow \tau = -(105)\text{sen}(2 \times 30{,}96°)$

$$\boxed{\tau = -92{,}64 \text{ MPa}}$$

Un depósito cilíndrico cerrado, construido con placa de 10 mm, se somete a una presión interior de 1400 kPa. Determinar el diámetro máximo que se le puede dar si el esfuerzo cortante admisible es de 30 MPa. ***Indicación:*** El esfuerzo circunferencial está dado por pD/2t mientras que el longitudinal por pD/4t. Vea la sección teórica 1-6 y consulte el problema 941.

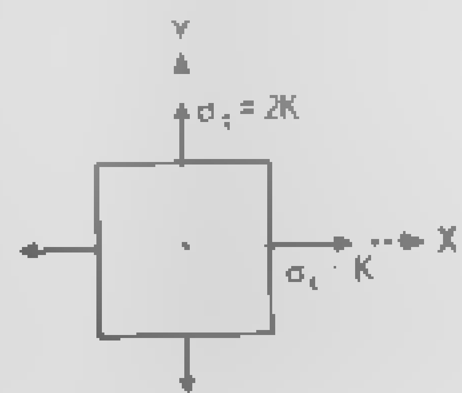
Resolución.

Por la presión interna p_i, el cilindro experimenta dos esfuerzos.

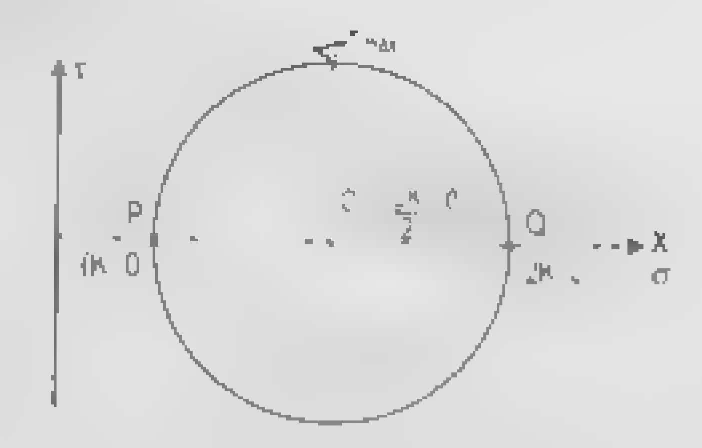
- Esfuerzo circunferencial $= \sigma_t = \dfrac{p_i D}{2t}$
- **Esfuerzo longitudinal** $= \sigma_L = \dfrac{p_i D}{4t}$

donde espesor $t = 0{,}01$ m ; $p_i = 1400$ kPa

Sea $K = \dfrac{p_i D}{4t}$, luego, en el diferencial:



En el círculo de Mohr



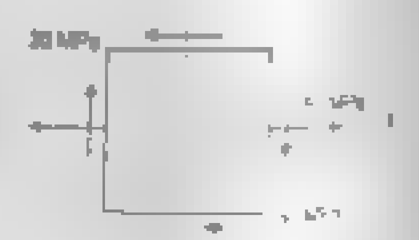
Donde: $\tau_{máx} = CQ = \left(2K - \frac{3}{2}K\right) = \frac{K}{2}$ pero $\tau_{máx} = 30$ MPa

Así $30 \text{ MPa} = \frac{K}{2} \Rightarrow K = 60 \text{ MPa o } K = 60\,000 \text{ kPa}$

Reemplazando el valor $\frac{pD}{4t} = 60\,000$ kPa $\Rightarrow \frac{(1400 \text{ kPa})D}{4(0,01) \text{ m}} = 60\,000$ ...

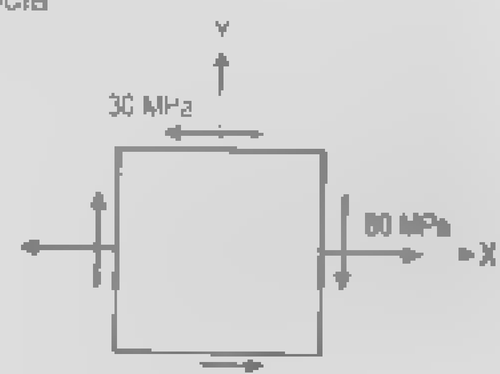
Así $\boxed{D = 1,714 \text{ m}}$

931 Para el estado de esfuerzo mostrado en la figura, determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. Mostrar todos sus resultados gráficamente sobre elementos diferenciales.

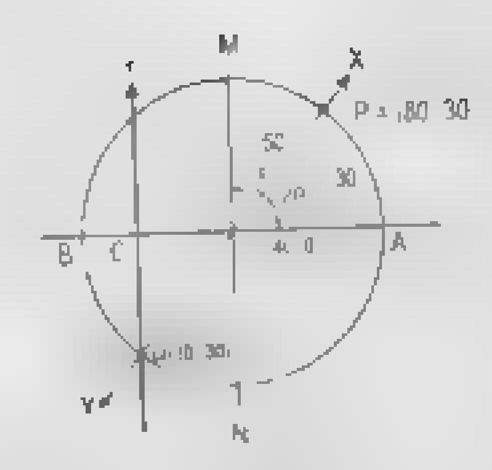


Resolución.

Del elemento diferencial



El círculo de Mohr



Por Geometría: $PC = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$

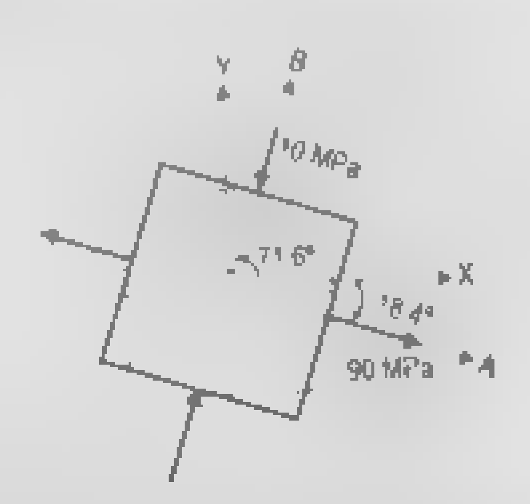
Además: $BC = CA = MC = CN = OC = PC = 50$

$\sigma_{máx} = OC + CA = (40 + 50) \text{ MPa} = 90 \text{ MPa}$

$\sigma_{mín} = OC - BC = (40 - 50) \text{ MPa} = -10 \text{ MPa}$

Además $\text{sen}\,2\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow 2\theta = 36,87° \text{ o } \theta = -18,4°$, negativo porque es medido en sentido horario

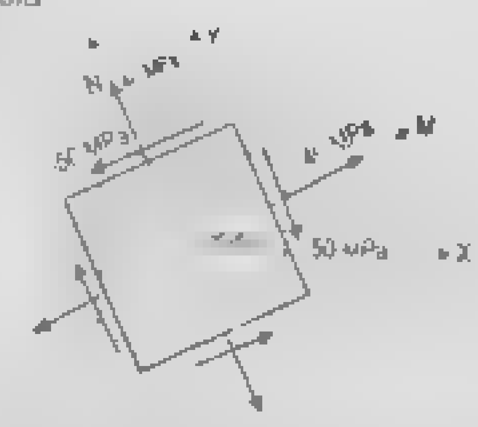
Graficando



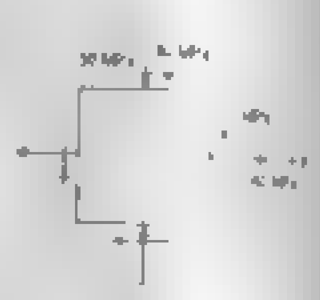
Además $\tau_{máx} = MC = 50 \text{ MPa}$ $\tau_{mín} = -CN = -50 \text{ MPa}$

En ambos casos σ = 40 MPa, con un ángulo de giro igual a $2\alpha = 90° - 2\theta = 90° - 36,87°$, así $\alpha = 26,57°$

Graficando el diferencia

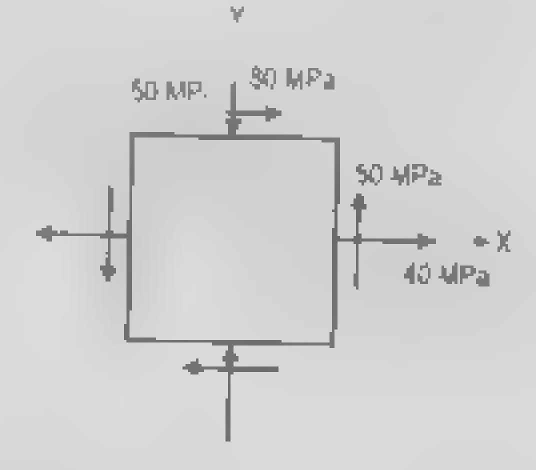


932. El estado de esfuerzo en un punto de un cuerpo se muestra en la figura. Calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, mostrando todos sus resultados gráficamente sobre elementos diferenciales.

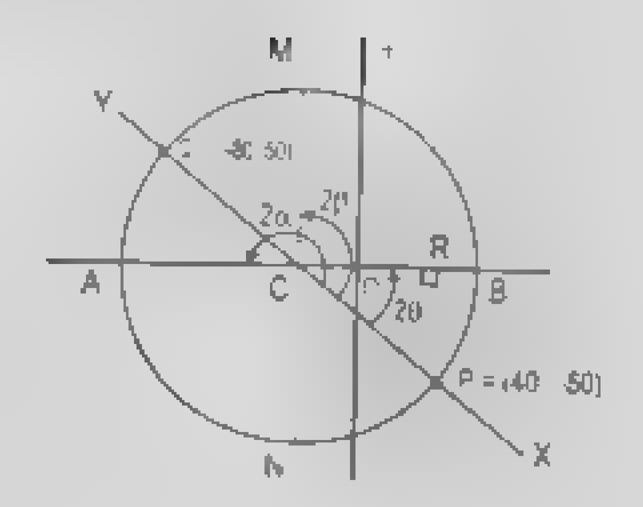


Resolución:

Del diferencial



En el circulo de Mohr



Del grafico tenemos

$A = \sigma_{máx}$ $\quad$ $B = \sigma_{min}$

$M = \tau_{máx}$ $\quad$ $N = \tau_{min}$

Por relaciones geometricas

$$C = (-20; 0) = \frac{Q+P}{2} \text{ y } QC = \sqrt{(-80+20)^2 + 50^2} = 78{,}1$$

Tambien: $AC = CB = MC = CN = CP = QC = 78{,}1$

$\sigma_{máx} = (-20 + CB) = (-20 + 78{,}1)$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx} = 58{,}1 \text{ MPa}}$

$\sigma_{min} = (-20 - AC) = (-20 - 78{,}1)$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{min} = -98{,}1 \text{ MPa}}$

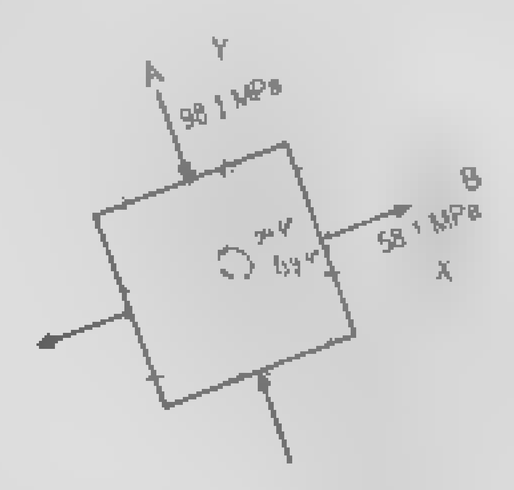
Además: $\tan(2\theta) = \dfrac{50}{20+40} = \dfrac{5}{6}$; así: $2\theta = 39{,}8°$

entonces ; $\boxed{\theta = 19{,}9°}$ ángulo del eje X al eje de $\sigma_{máx}$

Luego $2\alpha = 180° + 2\theta = 219{,}8°$

$\boxed{\alpha = 109{,}9°}$; ángulo del eje X al eje de σ_{min}

Grafica del diferencial



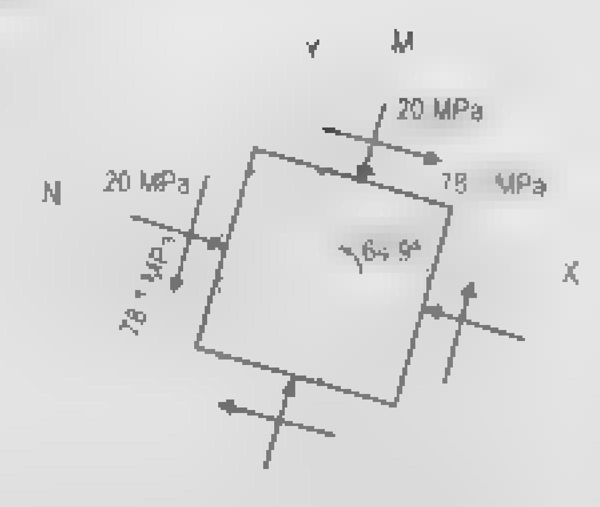
$\tau_{máx} = MN = 78{,}1 \text{ MPa} \wedge \tau_{min} = -CN = -78{,}1 \text{ MPa}$

Además: $2\beta = 90° + 2\theta = 129{,}8°$

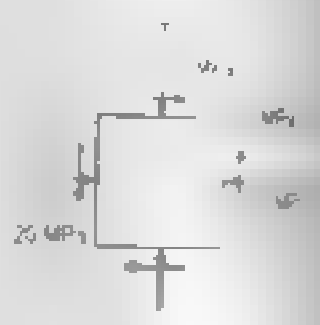
así: $\beta = 64{,}9°$; ángulo del eje X al eje de $\tau_{máx}$

En ambos casos: $\sigma = -20$ MPa

Graficando el diferencial

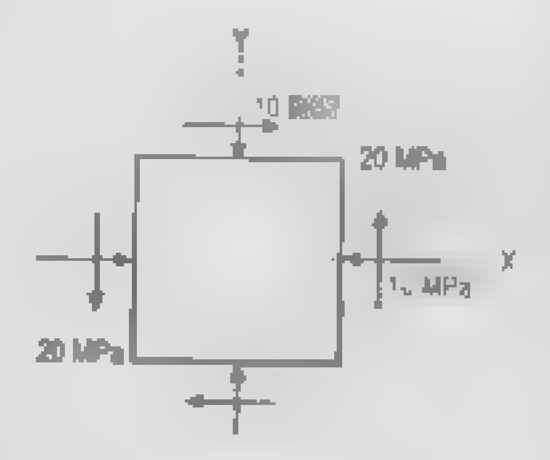


933. Para el estado de esfuerzo mostrado en la figura calcular los esfuerzos normal y cortante en los planos cuyas normales están inclinadas a +60° y +150° con respecto al eje X, mostrando sus resultados gráficamente

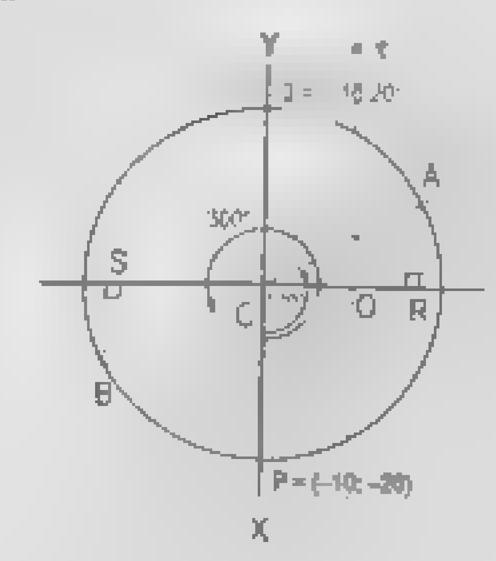


Resolución:

Del diferencial,



En el circulo de Mohr



Para el plano a 60° del eje X en el circulo de Mohr es el eje AB que se encuentra a 120° del mismo. (Que coincide con el giro de 150°, es decir, 300° en el circulo de Mohr)

Por relaciones geométricas: $C = \frac{Q + P}{2} = (-10; 0)$

Además, QC = CP = AC   BC = 20

Para el plano de 60°, los esfuerzos son

$\sigma = -10 + AC \times \cos 30° = -10 + 20 \times \cos 30° \Rightarrow [\sigma = 7{,}32 \text{ MPa}]$

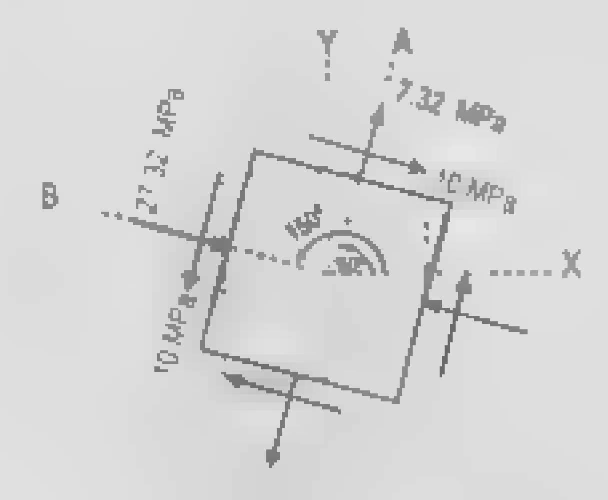
$\tau = AC \times \text{sen}30° = (20)\text{sen}30° = 10 \text{ MPa} \Rightarrow [\tau = 10 \text{ MPa}]$

Para el plano de 150°, los esfuerzos son

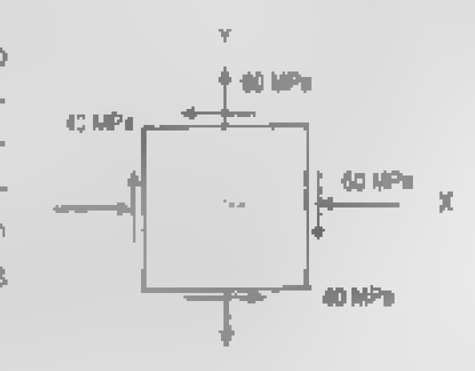
$\sigma = -10 - BC \times \cos 30° = -10 - 20 \times \cos 30° \Rightarrow [\sigma = -27{,}32 \text{ MPa}]$

$\tau = -BC \times \text{sen}30° = -(20)\text{sen}30° \Rightarrow [\tau = -10 \text{ MPa}]$

El gráfico del diferencial es:

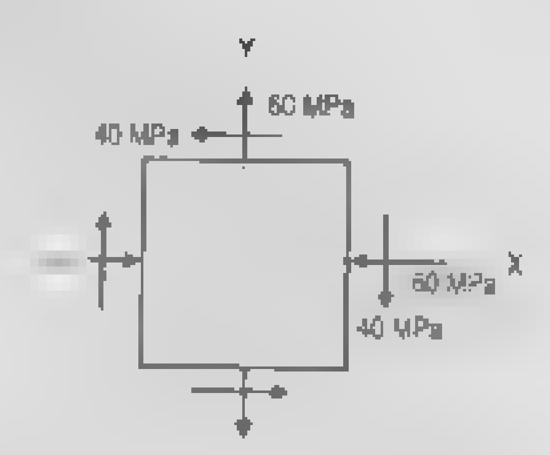


934. Si un elemento está sujeto al estado de esfuerzo mostrado en la figura, calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. Calcular también las componentes del esfuerzo en planos cuyas normales están dirigidas a 45° y a 135° con respecto al eje X. Muestre gráficamente todos sus resultados

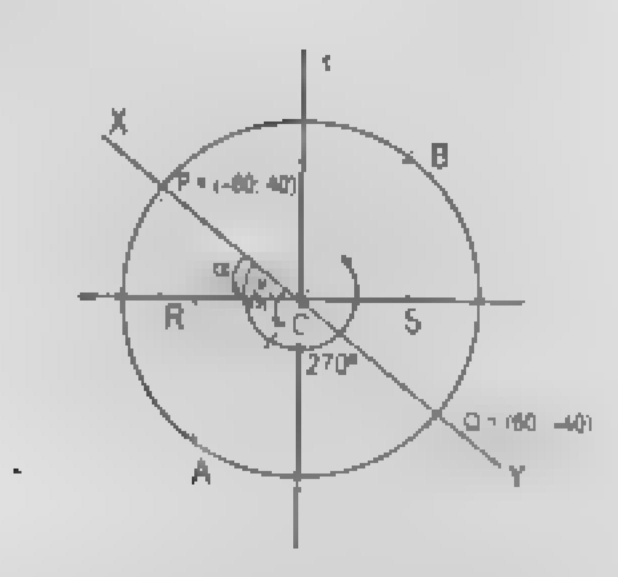


Resolución:

Del diferencial



En el círculo de Mohr



Por relaciones geométricas: $C = \frac{P+Q}{2} = (0;\ 0)$, además: $PC = \sqrt{60^2 + 40^2} = 72{,}11$

También: $AC = CB = CQ = PC = 72{,}11$, vemos que: $\tan\alpha = \frac{40}{60} \Rightarrow \alpha = 33{,}69$

Los esfuerzos a 45° del eje X son:

$\sigma = -AC\cos(90° - \alpha) = -(72{,}11)\cos(56{,}31°) \Rightarrow \boxed{\sigma = -40\ MPa}$

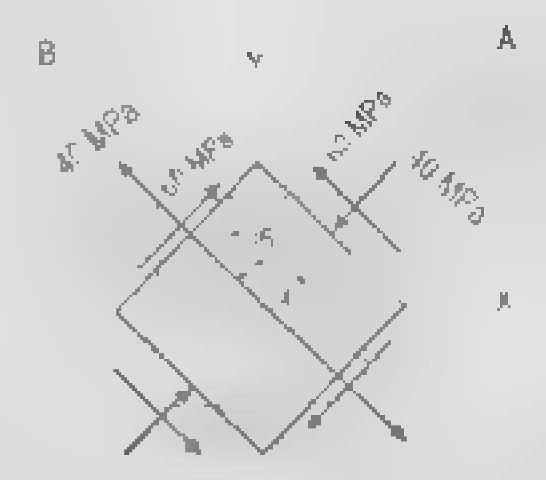
$\tau = -AC\text{sen}(90° - \alpha) = -72{,}11\text{sen}(56{,}31°) \Rightarrow \boxed{\tau = -60\ MPa}$

Los esfuerzos a 135° del eje X son

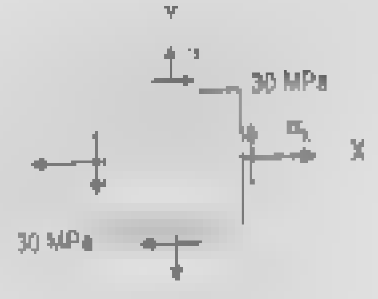
$\sigma = CB\cos(90° - \alpha) = 72{,}11 \times \cos(56{,}31°) \Rightarrow \boxed{\sigma = 40\ MPa}$

$\tau = CB\text{sen}(90° - \alpha) = 72{,}11 \times \text{sen}(56{,}31°) \Rightarrow \boxed{\tau = 60\ MPa}$

El diagrama del diferencial es

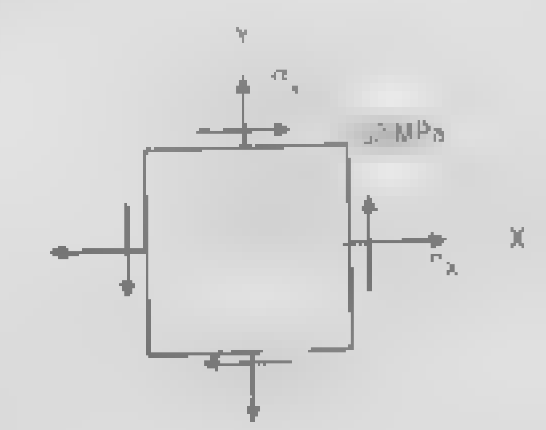


Dado el elemento de la figura, calcular los valores de σ_x y σ_y, sabiendo que los esfuerzos principales son 20 MPa y −80 MPa.

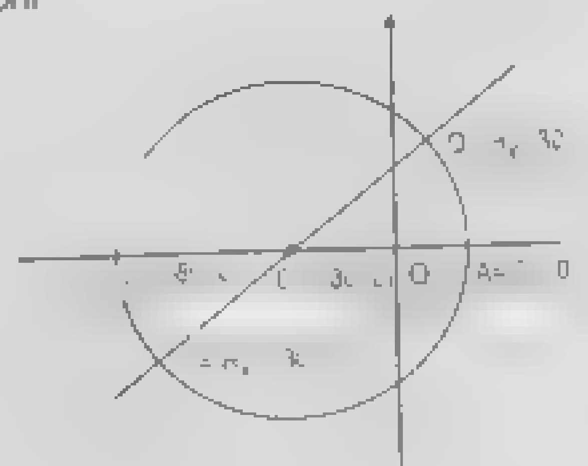


Resolución

Del diferencial



En el círculo de Mohr



Siendo A punto del esfuerzo máximo, así: A = (20; 0)

Además, B punto del esfuerzo mínimo, así B = (– 80; 0)

Por relaciones geométricas. $C = \frac{A+B}{2} = (-30;\ 0)$

Luego. CA = 50, además BC = PC = CQ = CA = 50

Por Pitágoras: $CQ = 50 = \sqrt{(\sigma_y + 30)^2 + 30^2}$, resolviendo: $\boxed{\sigma_y = 10\ MPa}$

(el valor negativo corresponde a σ_x) $\boxed{\sigma\ [illegible]\ MPa}$

9.36 Un tubo de [illegible]metro externo de 150 mm está construido con placa de [illegible] de espesor. Esta [illegible] una espira de soldadura que forma [illegible] de +30° con el eje longitudinal. Determinar el [illegible] para que pueda [illegible] si el esfuerzo cortante a [illegible] de la soldadura [illegible] a 30 MPa.

Resolución:

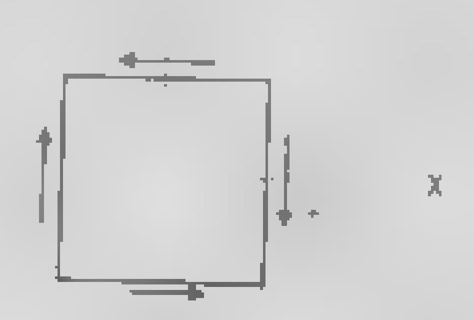
El tubo delgado tiene.

radio exterior $= r_e = 0{,}075$ m

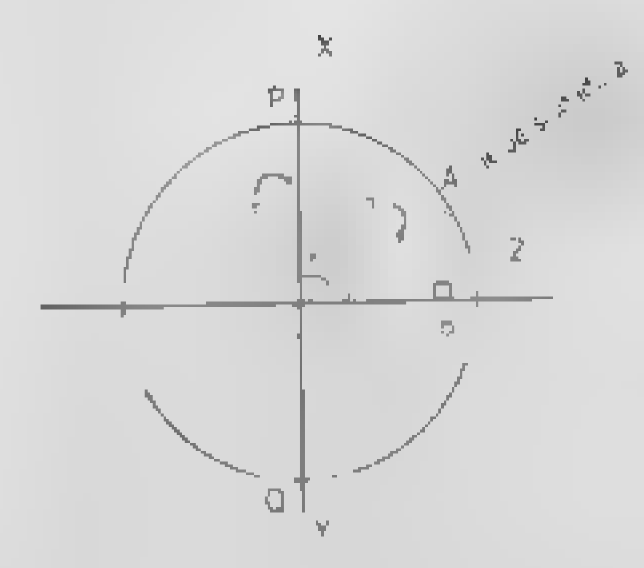
espesor $= e = 0{,}01$ m

radio interior $= r_i = 0{,}065$ m

El par torsor aplicado genera un esfuerzo cortante τ, así el diferencial



En el círculo de Mohr



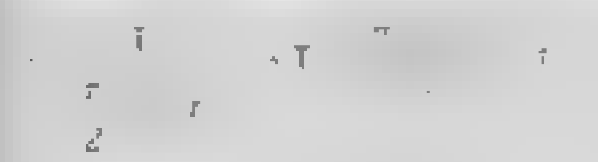
El esfuerzo cortante a 30° (60° en el círculo de Mohr) es de

$$\tau_{(a\ 30°)} = AB = \tau \operatorname{sen} 30° = \frac{\tau}{2}$$

Del dato del problema. $\tau_{(a\ 30°)} = 30\ MPa = \frac{\tau}{2}$

Así $\tau = 60$ MPa

El par [illegible] T necesario para generar [illegible]



$$T = \frac{\pi(0{,}075^4 - 0{,}065^4) \times 60 \times 10^6}{2(0{,}075)}\ N\cdot m \quad \therefore \quad \boxed{T = 17{,}3\ kN\cdot m}$$

[illegible] recipiente cerrado de forma [illegible] de diámetro exterior de 600 mm [illegible] construido con placa de 10 mm de [illegible] y se encuentra sometido a una presión interna de 1400 kPa. Calcular los esfuerzos normal y cortante a lo largo de la espira de soldadura [illegible] forma un ángulo de +[illegible] con el eje longitudinal.

Resolución

La presión interna P = 1400 kPa crea un esfuerzo tangencial σ_T y un esfuerzo longitudinal σ_L

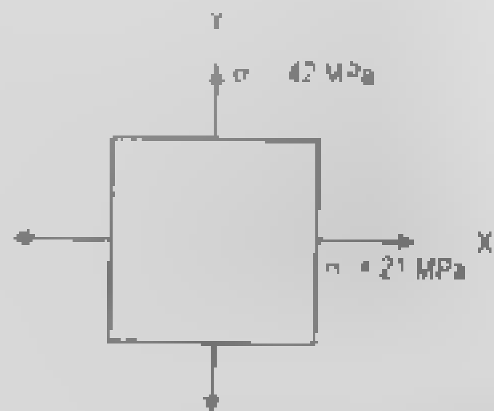
Así $\sigma_T = \frac{P_i r_a}{e} = \frac{(1400)(0,3)}{(0,01)}$ kPa

$\sigma_T = 42$ MPa ... (1)

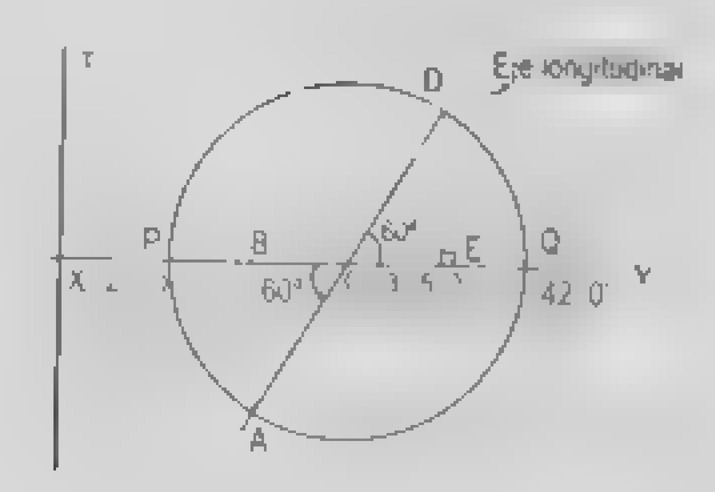
y $\sigma_L = \frac{P_i \times r_a}{2e} = \frac{(1400)(0,3)}{2(0,01)}$ kPa

$\sigma_L = 21$ MPa ... (2)

Nos da el diferencia.



En el circulo de Mohr



Así

$\sigma_N = (31,5 + CE) = (31,5 + CD\cos 60°)$

$\sigma_N = (31,5 + (42 - 31,5)\cos 60°) = 36,75$ MPa

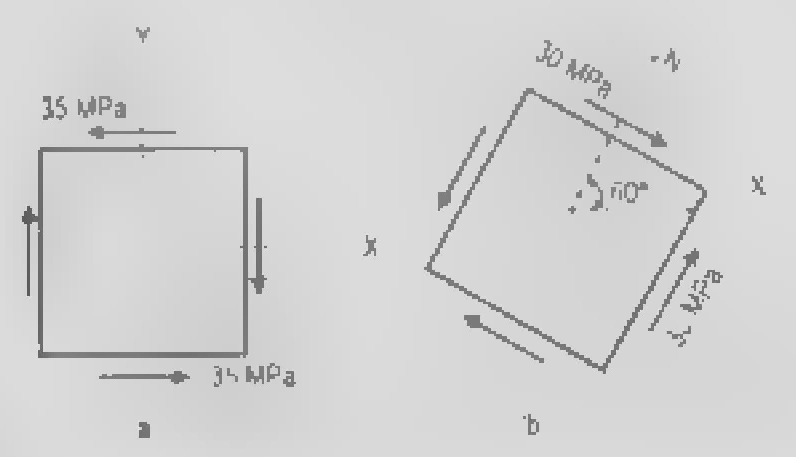
$\tau = DE = CD \operatorname{sen} 60° = (42 - 31,5)(\sqrt{3}/2)$

$\tau = 9,09$ MPa

Así a 30° con el eje longitudinal (60° en el circulo de Mohr) se tiene

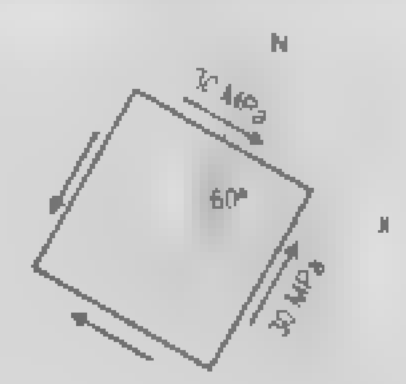
$\boxed{\sigma_N = 36,75 \text{ MPa}}$, $\boxed{\tau = 9,09 \text{ MPa}}$

En un punto de un cuerpo, el estado de esfuerzo es el resultado de dos estados separados que se muestran en la figura (a) y (b). Calcular el estado de esfuerzo que resulta de la acción simultánea de esos dos estados. ***Indicación:*** Orientar el elemento de la figura (b) paralelamente a de la figura, calculando el estado de esfuerzo en esta nueva orientación, para poder superponer ambos. En seguida, calcular los esfuerzos y determinar los planos principales de esfuerzo

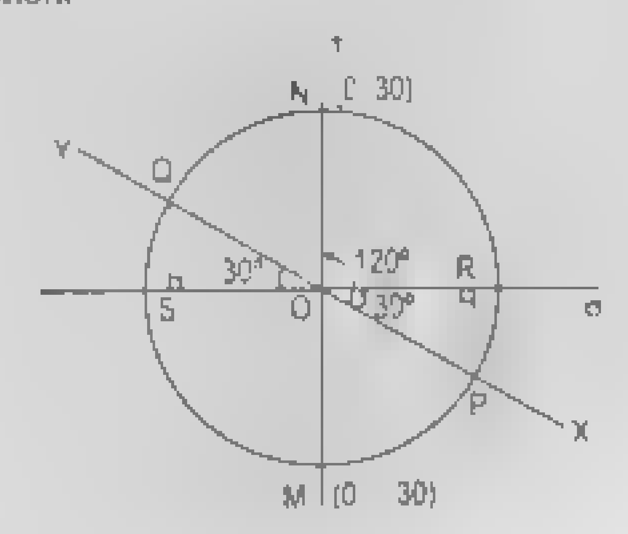


Resolucion

Vamos a superponer los esfuerzos para ello tenemos ... orientado



En el circulo de Mohr



Como: ON = OM = OP = OQ = 30

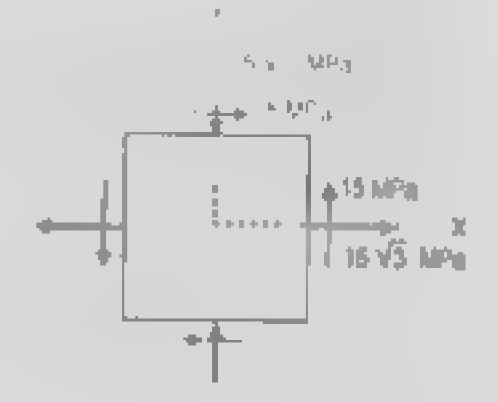
Luego $OR = OP\cos 30° = 30\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 15\sqrt{3} \wedge PR = -OP\operatorname{sen}30° = -30\left(\frac{1}{2}\right) = -15$

Así los esfuerzos en el eje X son: $\sigma_x = 15\sqrt{3}$ MPa, $\tau_{xy} = -15$ MPa

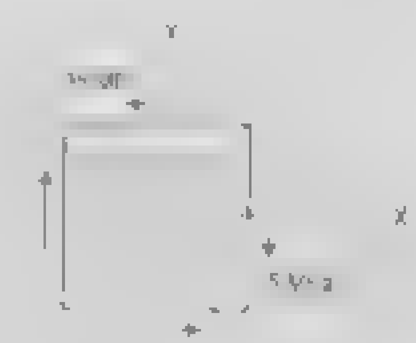
También: $SO = -OQ\cos 30° = -30\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -15\sqrt{3} \wedge QS = OQ\operatorname{sen}30° = 30\left(\frac{1}{2}\right) = 15$

Los esfuerzos en el eje Y son: $\sigma_y = -15\sqrt{3}$ MPa, $\tau_{yx} = 15$ MPa

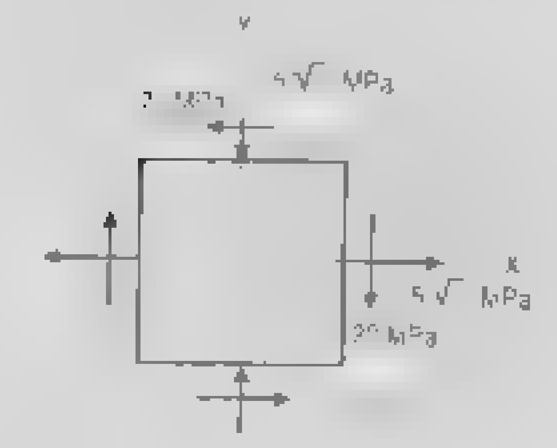
El diferencial es



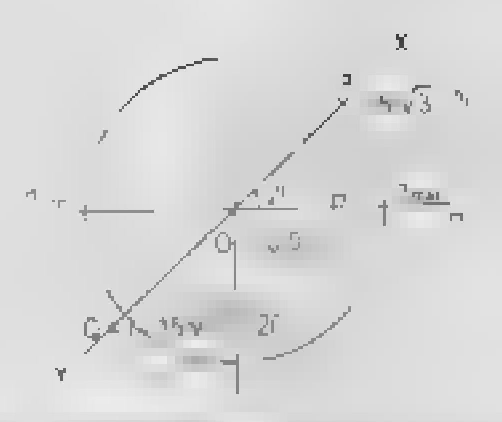
Sumando al diferencial



Obtenemos



En el círculo de Mohr



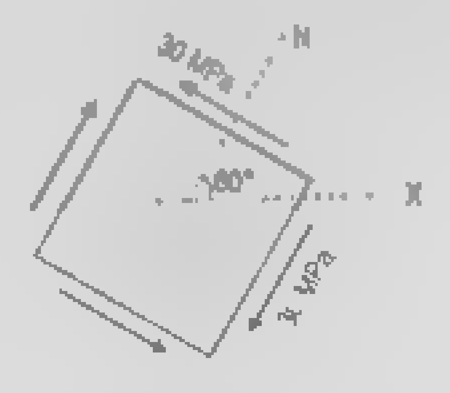
Así de gráfico ... 15√3 ... 20 ... 32,8 MPa que está a

... 20 / 15√3 ... meu do hacia abajo

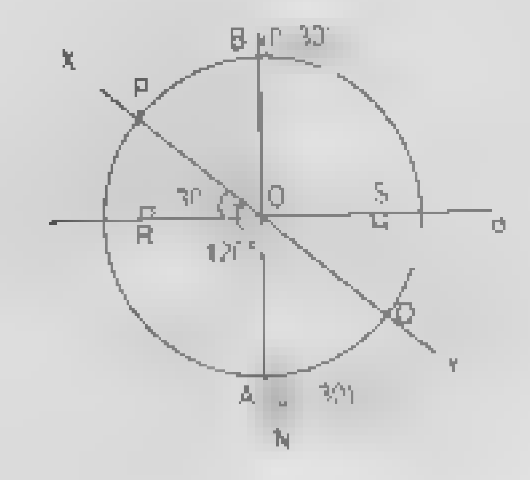
939 Resolver el problema 938 suponiendo que los sentidos de los esfuerzos cortantes de 30 MPa se invierten

Resolución:

Al invertirse la orientación del esfuerzo cortante tenemos.



En el círculo de Mohr

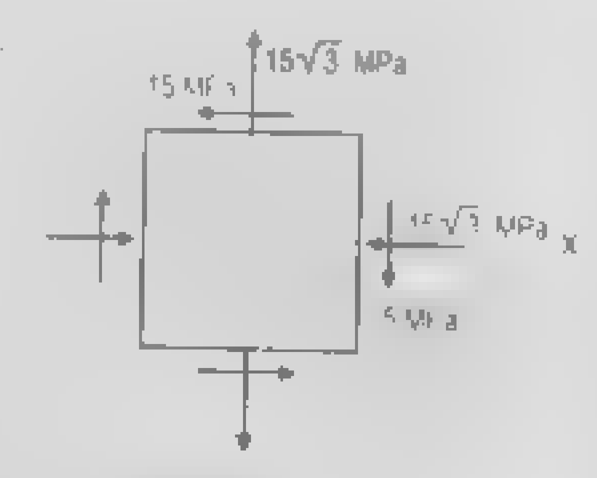


Que es el mismo circulo anterior pero con los valores invertidos

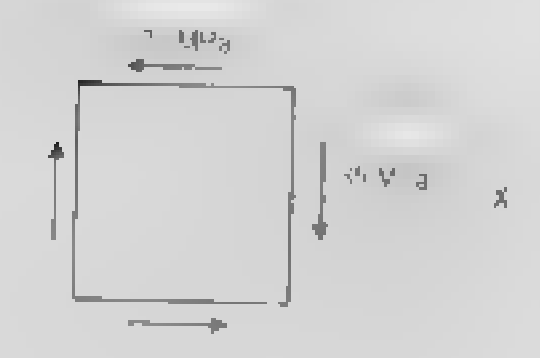
$\sigma_x = -15\sqrt{3}$ MPa $\quad \sigma_y = 15\sqrt{3}$ MPa

$\tau_{xy} = 15$ MPa $\quad \wedge \quad \tau_{yx} = -15$ MPa

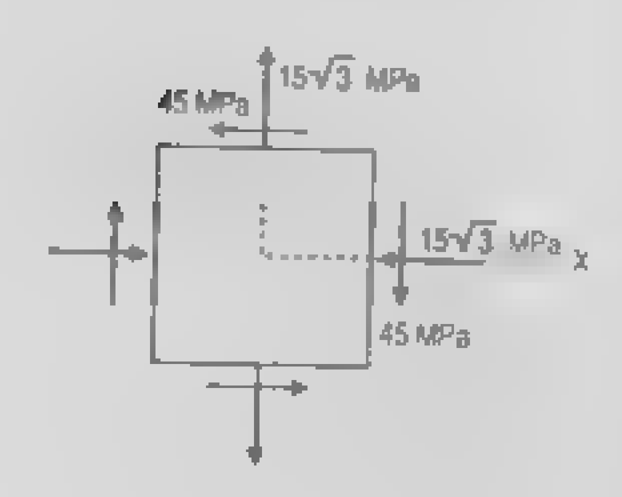
Nos da el diferencia.



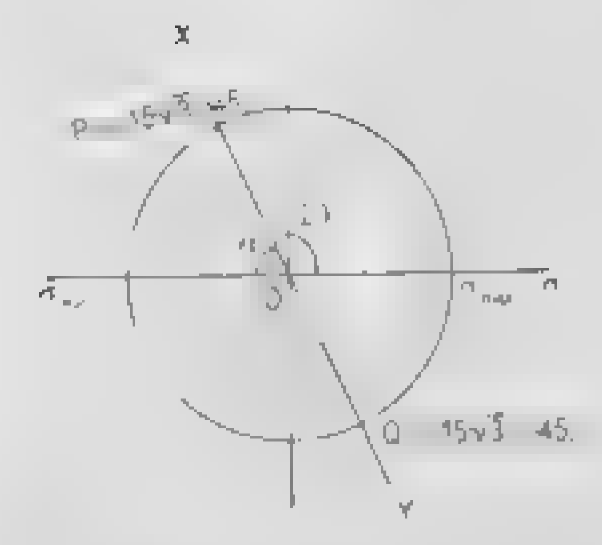
Sumando a



Obtenemos



En el circulo de Mohr



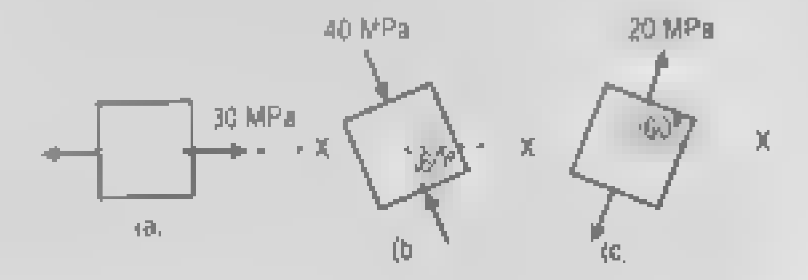
Donde

$\sigma_{máx} = \sqrt{(15\sqrt{3})^2 + (45)^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{máx} = 30\sqrt{3}\ \text{MPa}}$

$\tan\alpha = \dfrac{45}{15\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 60°$

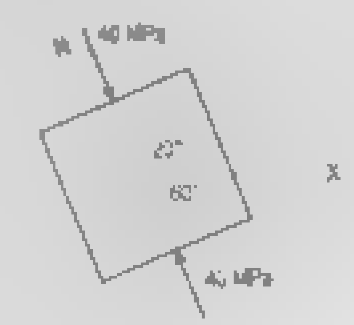
Así: $2\theta = 180° - 60° \Rightarrow \theta = 60°$ o $\boxed{\theta = 60°}$ midiendo hacia abajo

El estado de esfuerzo en un punto es el resultado de la acción conjunta de los tres estados que se muestran en la figura. Calcular los esfuerzos principales, así como su orientación, a partir del estado de esfuerzo resultante

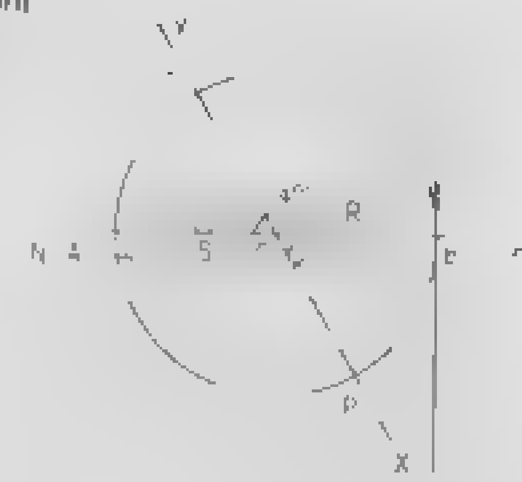


Resolución

Representando las diferenciales inclinadas.



En el circulo de Mohr



Donde C = (− 20; 0); así AC = CB = CP = CQ = 20

[illegible] CR [illegible] CP [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible]

$$PR = CP\text{sen}60° = 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3}$$

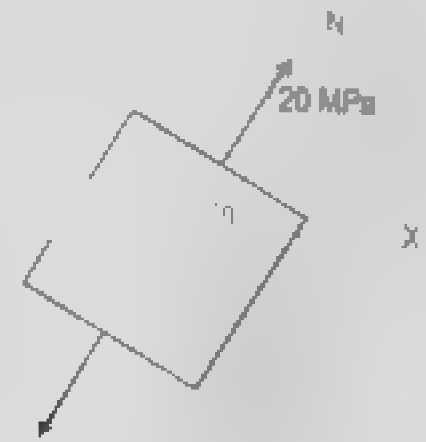
Los esfuerzos en el eje X son

σ_x = (− 20 + 10) MPa [illegible] 10 MPa
τ_{xy} [illegible] $-10\sqrt{3}$ MPa

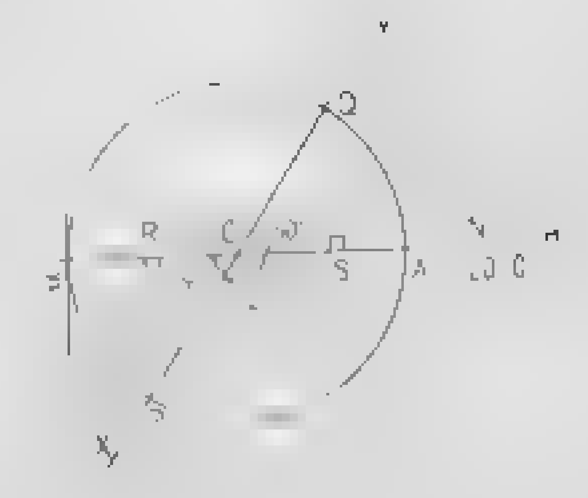
Del mismo modo los esfuerzos en el eje Y son

σ_y = (− 20 − 10) MPa = − 30 MPa
$\tau_{yx} = 10\sqrt{3}$ MPa

2 Del segundo diferencial



En el circulo de Mohr



[illegible] C [illegible] 1) 0)

Los esfuerzos en el eje X son

$$\sigma_x = 10 - RC = 10 - PC\cos 60° = 10 - 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -PC\text{sen}60° = -10\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ MPa} = -5\sqrt{3} \text{ MPa}$$

Los esfuerzos en el eje Y son

σ_y [illegible] + CQ [illegible] 10 + 1[illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] 15 MPa

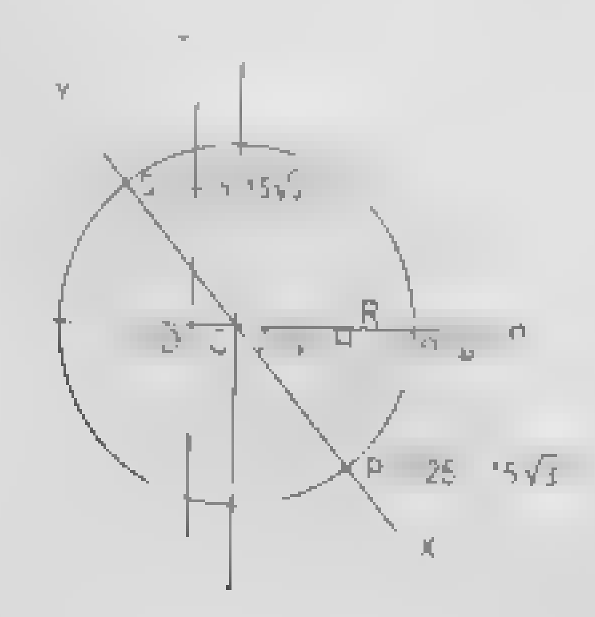
τ_{yx} [illegible] CQ [illegible] 10 × [illegible] MPa

3. Del tercer diferencial
$\sigma_x = 30$ MPa; $\tau_{xy} = 0$; $\sigma_y = 0$, $\tau_{yx} = 0$

Por la superposición de esfuerzos, sumamos miembro a miembro para la resultante de esfuerzos

σ_x [illegible] 10 MPa + 5 MPa + 30 MPa = 25 MPa
τ_{xy} [illegible] $-10\sqrt{3}$ MPa $-5\sqrt{3}$ MPa + 0 = $-15\sqrt{3}$ MPa
σ_y [illegible] − 30 MPa + 15 MPa + 0 = − 15 MPa
$\tau_{yx} = 10\sqrt{3}$ MPa + $5\sqrt{3}$ MPa + 0 = $15\sqrt{3}$ MPa

En el círculo de Mohr tenemos:



Donde C = (5, 0)

Y: $\sigma_{máx} = 5 + CP = 5 + \sqrt{(25-5)^2 + (15\sqrt{3})^2} = (5 + 32{,}78)$ MPa

$\sigma_{máx} = 37{,}78$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx} = 37{,}8 \text{ MPa}}$

También $\tan 2\theta = \dfrac{15\sqrt{3}}{25 - 5}$

Donde $2\theta = 52{,}42° \Rightarrow \theta = 2$[illegible]

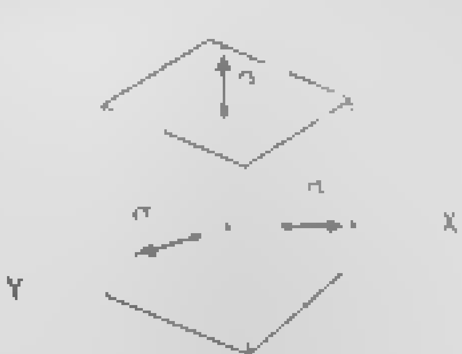
941 Los esfuerzos principales en un elemento en el espacio tridimensional son σ_x, σ_y y σ_z. Suponiendo que $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$, demostrar que el esfuerzo cortante máximo en un cierto plano [illegible] que corte al elemento es [illegible] $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)$. Considere todas las orientaciones posibles del elemento para poder trazar círculos de Mohr independientes, cada una de las cuales re[illegible] los esfuerzos en planos que pasan por uno de los ejes principales

Resolución:

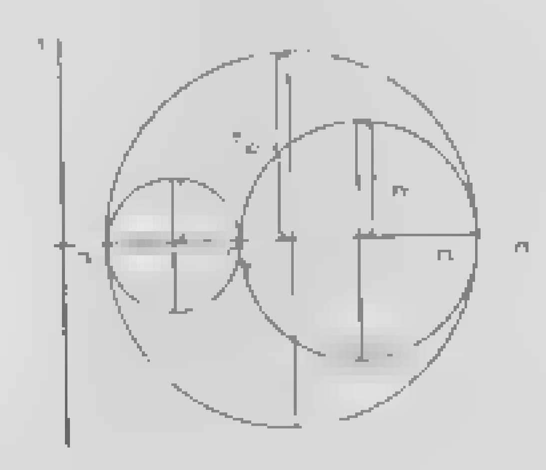
Tenemos presente que la relación de esfuerzos es

$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$ ... (1)

La diferencial tridimensional es



Tomando secciones planas con pares de esfuerzos; en el círculo de Mohr



Donde en cada círculo se cumple

$\tau_{xz} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)$; $\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$; τ [illegible] $\frac{1}{2}(\sigma$ [illegible] $\sigma_z)$

De (1): $\sigma_x > \sigma$ [illegible] $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma$ [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible] ... (α)

Esto es: $\tau_{xz} > \tau_y$ [illegible]

También de (1): $\sigma_y > \sigma_z$ [illegible]

Y: $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) > \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$ ... (β)

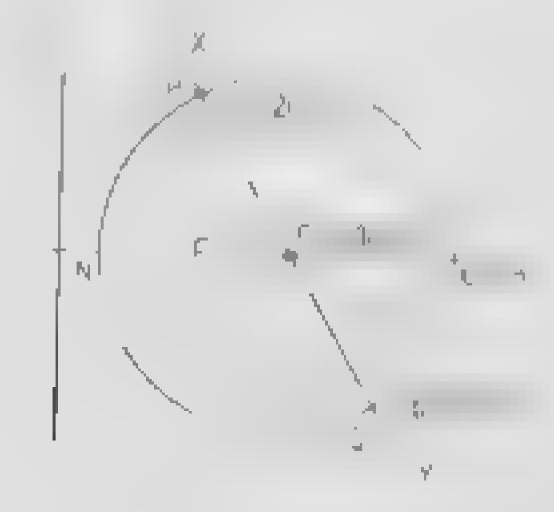
Es decir: $\tau_{xz} > \tau_{xy}$

Así el esfuerzo cortante máximo es: $\boxed{\tau_{máx} = \tau_{xz} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)}$

942 Un estado de esfuerzo plano está definido por $\sigma_x = 20\ MN/m^2$ $\sigma = 40$ ... y τ ... 20 MN ... Determinar el esfuerzo ... que pase por el punto. *Indicación*: Hallar primero los esfuerzos principales y luego aplicar el resultado del problema anterior.

Resolución

En el circulo de Mohr para hallar los esfuerzos máximos



Donde $\sigma_{máx.} = 30 + CM = 30 + \sqrt{(40-30)^2 + 20^2} = 52.36\ MPa$ σ_1

$\sigma_{mín.} = 30 - CN = 30 - \sqrt{(40-30)^2 + 20}$ $7.64\ MPa = \sigma_2$

Para hallar el esfuerzo cortante máximo, hay que tomar en cuenta que el tercer esfuerzo es nulo, $\sigma_3 = 0$

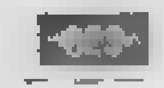
Hallando el esfuerzo cortante máximo, como el mayor de

τ $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2$ $22.36\ MPa$; $\tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 26.18\ MPa$

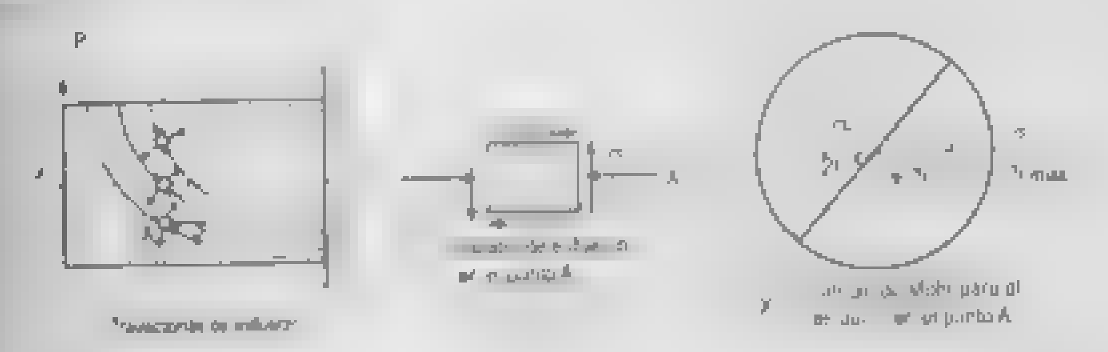
τ $\frac{1}{3}(\sigma_2 - \sigma_3) = 3.82\ MPa$

Así τ 26.18 MPa

943, 944, 945 Problemas ilustrativos

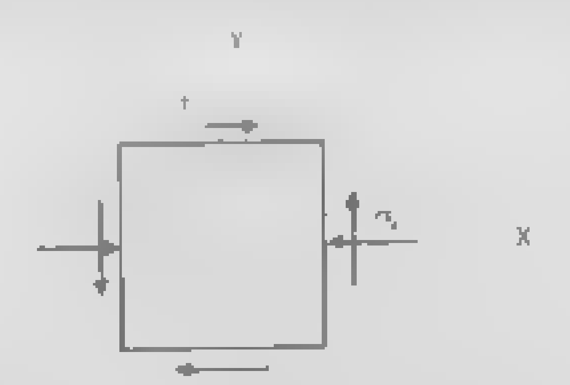


... Explicar por qué las trayectorias de esfuerzo, en la figura, tienden a ser horizontales al aproximarse al empotramiento. ¿En dónde son exactamente horizontales? ¿Cuáles son las trayectorias de esfuerzo en el caso de tensión o compresión axiales?

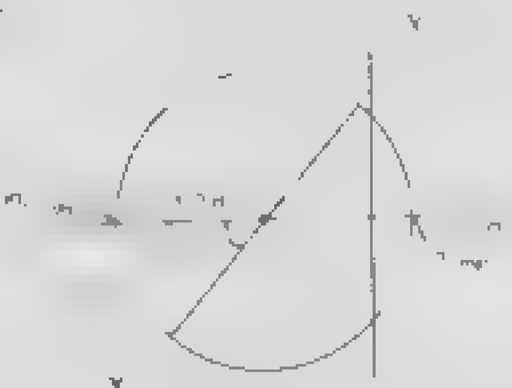


Resolución

Para una viga empotrada afectada por una carga P produce esfuerzos por flexión y cortantes, en un punto cualquiera, el diferencial será



En el circulo de Mohr



Donde tan2θ =

2

En el empotramiento τ 0 así tan2θ 0 donde se halla dos valores para θ

θ 0 o θ 90

Lo cual sólo es posible cuando las trayectorias en el empotramiento son horizontales.

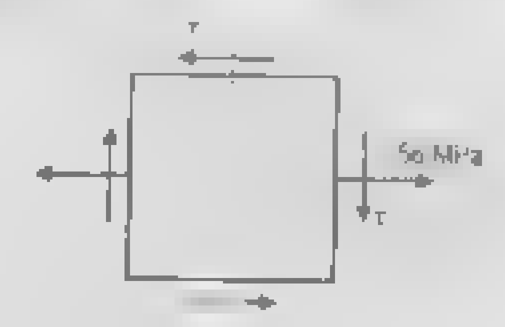
Del mismo resultado los esfuerzos de tensión son horizontales y ... presión verticales si se analiza la parte superior de la línea neutra, para la parte inferior es inverso.

947 El árbol de una turbina pequeña tiene un diámetro de 100 mm y ... una carga de 140π kN. Calcular la máxima potencia que puede transmitir a 4 rps sin exceder un esfuerzo cortante máximo de 70 MN/m² ni ... esfuerzo normal de 90 MN/m².

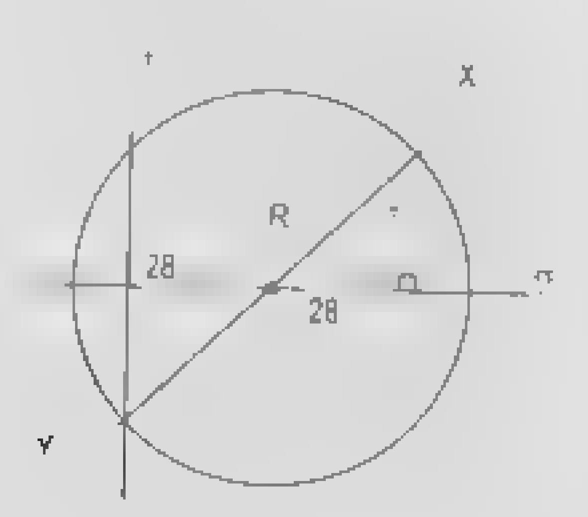
Resolución:

El esfuerzo normal es: $\sigma_N = \frac{P}{A} = \frac{140\pi \text{ kN}}{\pi r^2} = \frac{140\pi \text{ kN}}{\pi (0{,}05)^2 \text{ m}^2} \Rightarrow \sigma_N = 56 \text{ MPa}$

El diferencial tomando en cuenta el esfuerzo cortante producido por el torsor



En el círculo de Mohr



Para el esfuerzo máximo:

$$\sigma_{máx} = 28 + R \leq 90 \Rightarrow R \leq 62 \quad ...(1)$$

Para el esfuerzo cortante máximo

$$\tau_{máx} = R \leq 70 \quad ...(2)$$

De (1) y (2) escogemos el menor

$$R = 62$$

En el círculo de Mohr

$$R^2 = 28^2 + \tau_1^2$$

$$62^2 - 28^2 = \tau_1^2 \Rightarrow \tau_1 = 55{,}32 \text{ MPa}$$

Así para que cumpla las condiciones dadas, el esfuerzo cortante producido por un momento torsionante es

$$\tau = 55{,}32 \text{ MPa}$$

El momento torsionante que produce este esfuerzo cortante es

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{Tr}{\frac{\pi}{2} r^4} = \frac{2T}{\pi r^3}$$

$$T = \frac{\pi}{2} r^3 \tau \quad ...(\alpha)$$

La potencia generada por este momento torsionante es:

$$\wp = 2\pi f T \quad ...(\beta)$$

(α) en (β):

$$\wp = 2\pi f \left(\frac{\pi}{2} r^3 \tau\right) \Rightarrow \wp = \pi^2 f r^3 \tau$$

Así: $\wp = \pi^2 (4)(0{,}05)^3 (55{,}3 \times 10^6) \text{ W} = 272\,993 \text{ W}$

o $\wp = 272{,}993 \text{ kW} \Rightarrow \boxed{\wp = 273 \text{ kW}}$

948 Un eje macizo de 100 mm de diámetro está sujeto simultáneamente a una fuerza de compresión de 600 kN y a un par de torsión que lo deforma un ángulo de 1,5° en una longitud de 8 m. Si $G = 80 \times 10^9$ N/m², calcular los máximos esfuerzos normal y cortante a que está sometido el eje.

Resolución

La fuerza de compresión produce un esfuerzo normal

$$\sigma = \frac{600\ kN}{\pi(0{,}05)^2} = 76{,}39\ MPa$$

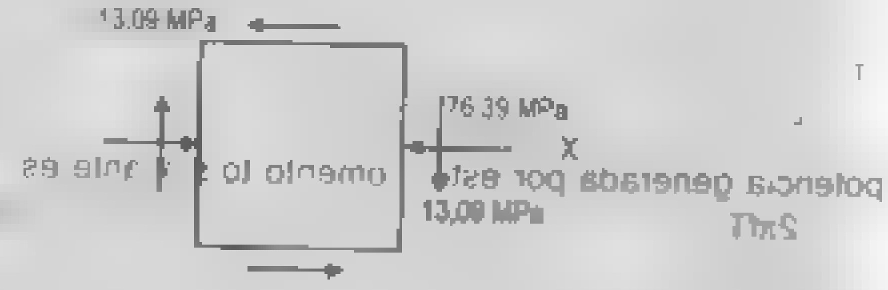
El par torsor necesario para deformar un ángulo 1,5° una longitud de ... está dado por $T = \frac{GJ}{L}\phi$ ... (α)

Que produce un esfuerzo cortante: $\tau_i = \frac{Tr}{J}$ ... (β)

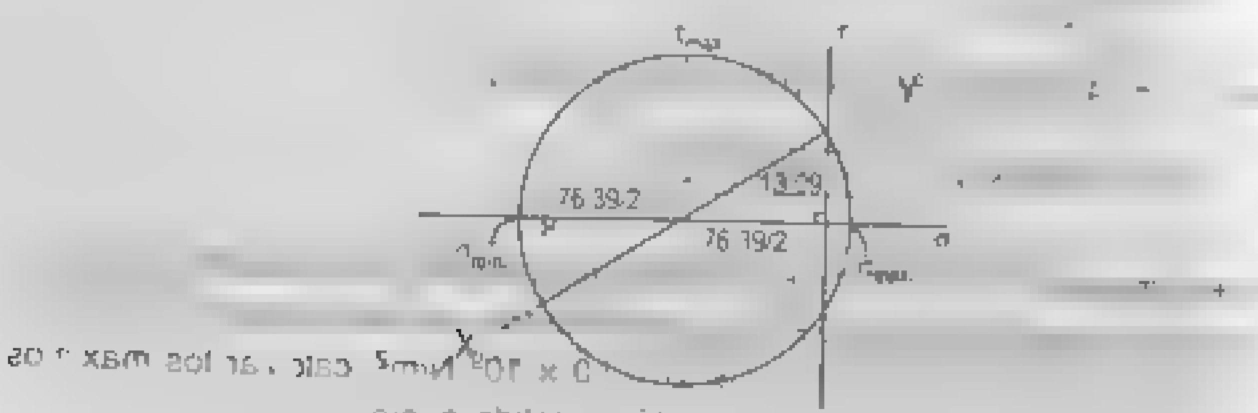
De (α) y (β): $\tau = \theta r \frac{G}{L}$ (θ en radianes)

$$\tau = \frac{1{,}5\pi}{180}\frac{(0{,}05)}{8}(80 \times 10^9)\ N/m^2 \Rightarrow \tau = 13{,}09\ MPa$$

Nos da el diferencial.



En el círculo de Mohr



$$\sigma_{min} = -\left(\frac{76{,}39}{2}\right) ...$$

... simultáneamente una carga axial de ... kN ... y ... de compresión

Resolución

Hay que hallar los esfuerzos producidos por cada carga o momento

Por la carga axial, el esfuerzo está: $\sigma_a = \frac{P}{A}$

Y como: $P = +50\pi\ kN \wedge r = 0{,}05\ m$

$$\sigma_a = \frac{50\pi\ kN}{\pi(0{,}05)^2} = +20\ MPa$$

Por el momento flexionante M = ... kN·m

$$\sigma = \frac{Mr}{I} = \frac{Mr}{\frac{\pi r^4}{4}} = \frac{4M}{\pi r^3} = ... = 64\ MPa$$

Así: $\sigma = +64$ MPa (por tensión)

$\sigma = -64$ MPa (por compresión)

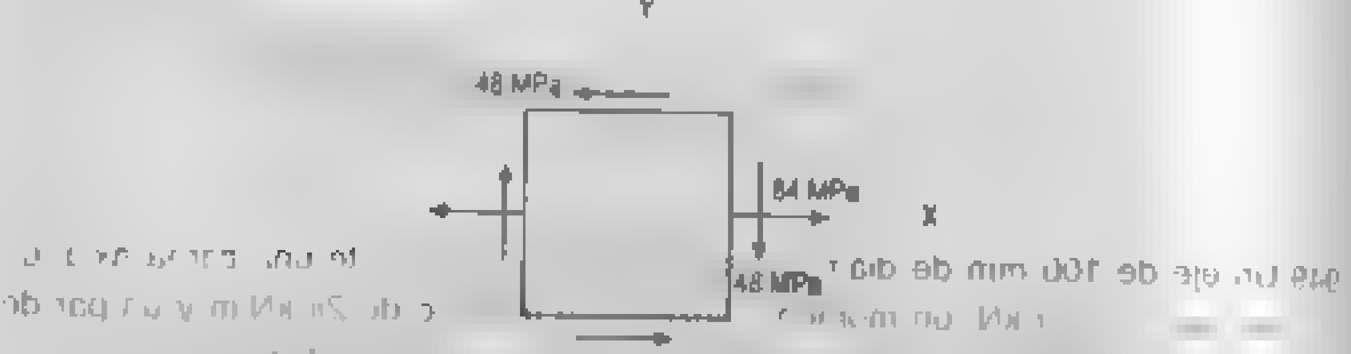
Por el par torsor T = ... kN·m

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{Tr}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2T}{\pi r^3} = ... = 48\ MPa$$

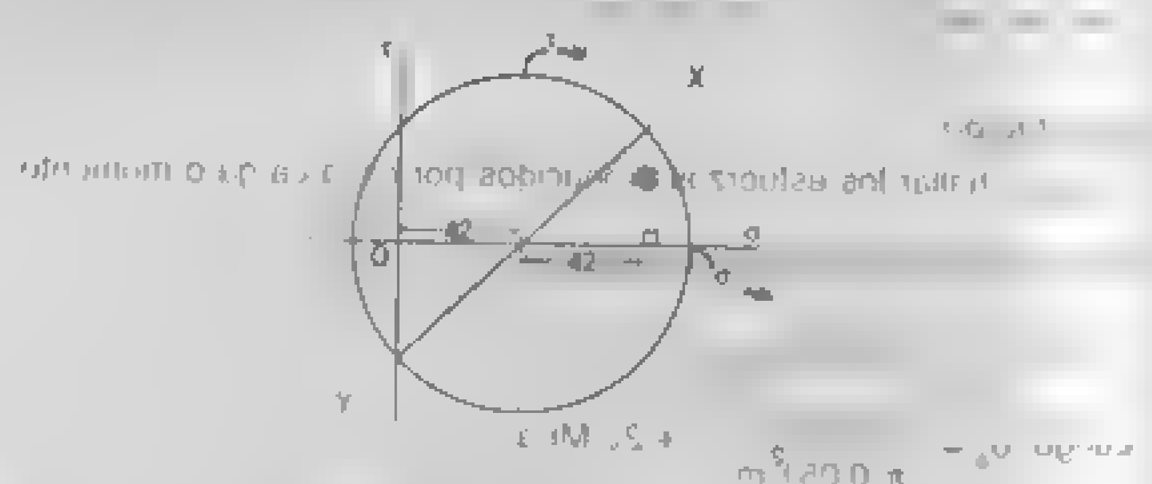
Tanto el esfuerzo axial como el de flexión los sumamos por estar en el mismo plano:

1. Para la tensión: $\sigma_N = +20\ \text{MPa} + 64\ \text{MPa} = 84\ \text{MPa}$
   $\tau = 48\ \text{MPa}$

   Nos da el diferencial



En el círculo de Mohr



Donde $\sigma_{T\,máx} = (42 + \sqrt{42^2 + 48^2})\ \text{MPa}$ → $\sigma_{T\,máx} = 106\ \text{MPa}$

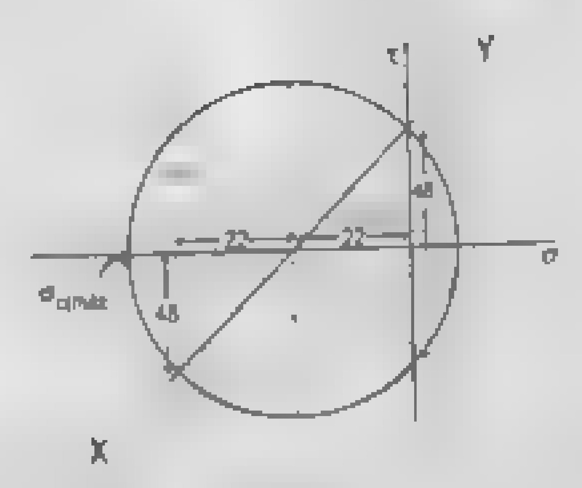
$\tau_{max} = \sqrt{42^2 + 48^2} = 63.8\ \text{MPa}$

2. Para la compresión

   $\sigma_N = +20\ \text{MPa} - 64\ \text{MPa} = -44\ \text{MPa}$; $\tau = 48\ \text{MPa}$

   En el diferencial.

En el círculo de Mohr



Donde $\sigma_{c\,máx} = (-22 - \sqrt{22^2 + 48^2})\ \text{MPa}$ → $\sigma_{máx} = -74.8\ \text{MPa}$

El signo menos sobreindica compresión

950 Repetir el problema 949, suponiendo que se invierte el sentido de la carga axial, al mismo tiempo que su magnitud se abate a 40π kN

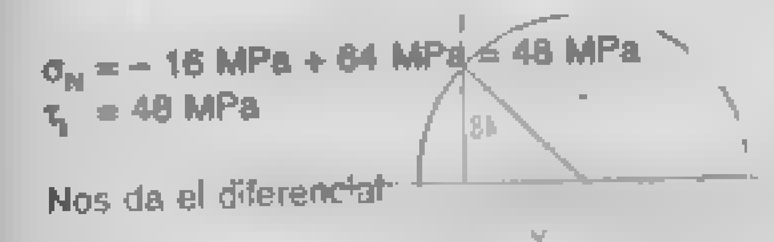
Resolución:

El procedimiento es el mismo que en el problema anterior, solo que.

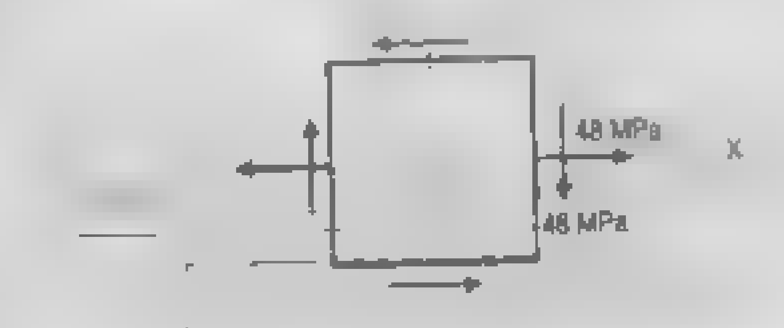
$\sigma_a = \dfrac{P}{A} = \dfrac{40\pi\ \text{kN}}{\pi(0{,}05)^2\ \text{m}^2}$ $\sigma_a = -16\ \text{MPa}$ los demás valores son lo mismo.

1 Para la tensión

$\sigma_N = -16\ \text{MPa} + 64\ \text{MPa} = 48\ \text{MPa}$
$\tau_1 = 48\ \text{MPa}$



Nos da el diferencial



En el círculo de Mohr

Donde: $\sigma_{T(máx)} = 24 + \sqrt{24^2 + 48^2} \Rightarrow \sigma_{T(máx)} = 77.67\ \text{MPa}$

$\sigma_N = -16\ \text{MPa} - 64\ \text{MPa} = -80\ \text{MPa}$

En el círculo de Mohr

$\sigma_{c(máx)} = (-40 - \sqrt{40^2 + 48^2})\ \text{MPa}$

$\sqrt{40^2 + 48^2} = 62.48\ \text{MPa}$

... de 80 mm de diámetro está sujeto a un momento flexionante máximo de 80π N·m y a una fuerza axial de tensión de 40π kN. Calcular el par de torsión máximo que pueda aplicarse si los valores máximos admisibles del esfuerzo son 100 MN/m² para el normal y 80 MN/m² para el cortante.

Resolución

Como el radio mide r = 0,04 m

Hallando los esfuerzos normales: $\sigma_A = \frac{P}{A} = \frac{40\pi\ \text{kN}}{\pi(0{,}04)^2\ \text{m}^2}$

$\Rightarrow \sigma_A = +25\ \text{MPa}$ (α)

Por el momento flexionante $\sigma_f = \frac{Mc}{I} = \frac{Mr}{\frac{\pi}{4}r^4} = \frac{4M}{\pi r^3}$

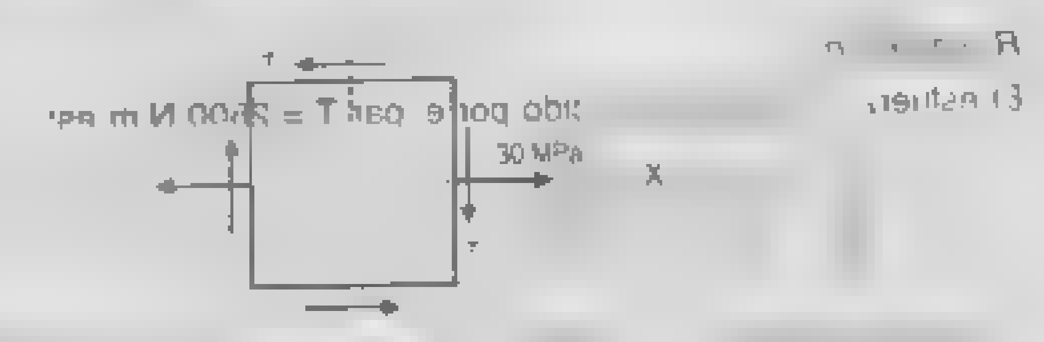
$\Rightarrow \sigma_f = \frac{4(80\pi)\ \text{Nm}}{\pi(0{,}04)^3\ \text{m}^3} = 5\ \text{MPa}$

Por superposición de esfuerzos (α) + (β): $\sigma_N = \sigma_A + \sigma_f = 25\ \text{MPa} + 5\ \text{MPa}$

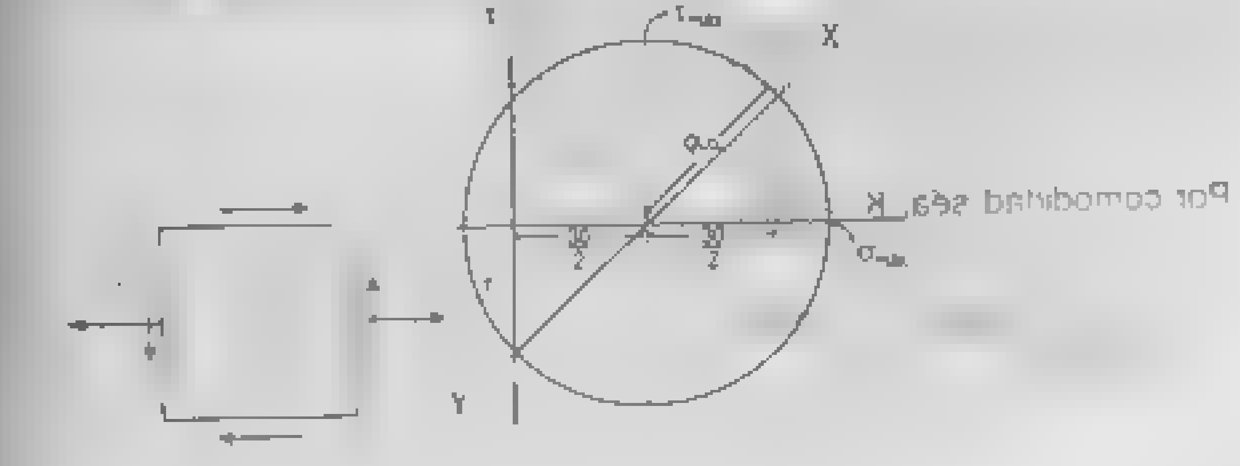
$\Rightarrow \sigma = 30\ \text{MPa}$

Por el par torsor T existe el esfuerzo cortante τ.

Tenemos el siguiente diferencial:



En el círculo de Mohr



Donde:

$\sigma_{max} = 15 + R_0 \ldots 1,0$

De (1) y (2), el R_0 óptimo es: $R_0 = 80$

En el círculo: $R_0^2 = \tau_1^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 \Rightarrow 80^2 = (15)^2 + \tau_1^2$

Así: $\tau_1 = 78.58$ MPa y como: $\tau_1 = \frac{Tc}{J} = \frac{T \times r}{\frac{\pi}{2} r^4} = \frac{2T}{\pi r^3}$

Entonces: $T = \frac{\pi}{2}(0,04\ m)^3 \left(78.58 \times 10^6 \frac{N}{m^2}\right) \Rightarrow$ **$T = 7899,84$ N m**

952 Un eje de sección circular se emplea para transmitir simultáneamente un par de 2600 N m y un momento flexionante máximo de 2000 N m. Calcular el radio mínimo que pueda tener la sección de eje si $\sigma_{max} \leq 80$ MPa y $\tau_{max} \leq 60$ MPa.

Resolución

El esfuerzo cortante producido por el par T = 2600 N m es

$$\tau_1 = \frac{2T}{\pi r^3} = \frac{5200}{\pi r^3} = 13\frac{400}{\pi r^3} \quad \ldots(\alpha)$$

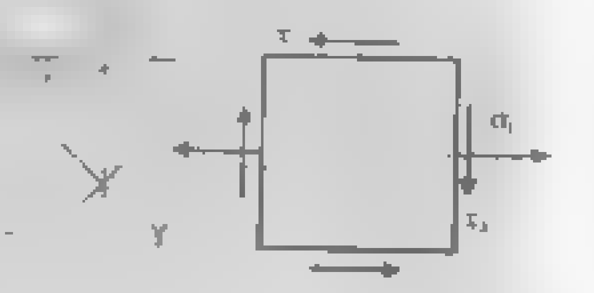
El esfuerzo normal por el momento flexionante es (M = 2000 N m)

$$\sigma_1 = \frac{4M}{\pi r^3} = \frac{8000}{\pi r^3} = 20\frac{400}{\pi r^3} \quad \ldots(\beta)$$

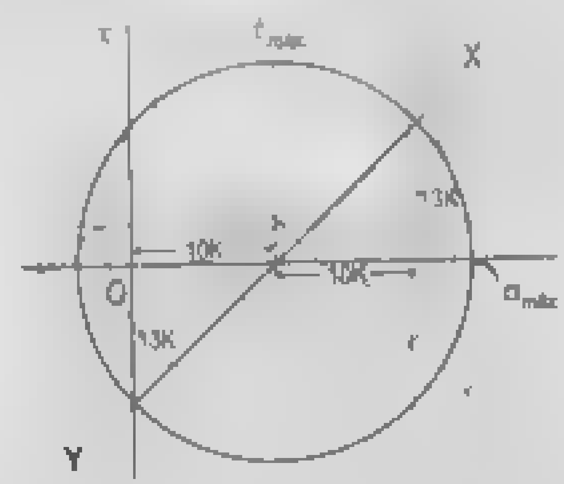
Por comodidad sea $K = \frac{400}{\pi r^3}$

Tenemos el diferencial donde

$\sigma = 20K$ y $\tau = 13K$



En el círculo de Mohr



Como: $\tau_{max} \leq 60 \times 10^6$ N m $\quad (1)$

$\sigma_{max} \leq 80 \times 10^6$ N m $\quad (2)$

Debemos buscar el "K" apropiado.

De (1): $\sqrt{10^2K^2 + 13^2K^2} = 60 \times 10^6$

Así $K_1 = 3658264.56$ ó $\frac{400}{\pi r_1^3} = 3658264.56$

donde $r_1 = 0.03265$ m ó $r_1 = 32.65$ mm $\quad (3)$

De (2) $10K + \sqrt{10^2 + 13^2}\,K = 80 \times 10^6$

Así $K_2 = 3030163.061$ ó $\frac{400}{\pi r_2^3} = 3030163.061$

donde $r_2 = 0.03477$ m ó $r_2 = 34.77$ mm $\quad (4)$

De (3) y (4) elegimos el mayor valor 34.77 mm $\Rightarrow$ **$r = 34.8$ mm**

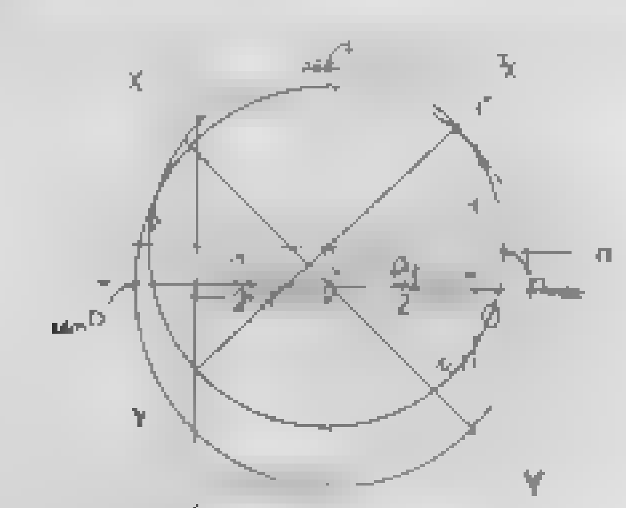
953 Un eje de 80 mm de diámetro soporta un momento flexionante máximo de 3 kN m. ¿Qué par se puede aplicar además, sin exceder un valor máximo del esfuerzo cortante de 80 MN/m^2 ni uno del esfuerzo normal de 120 MN/m^2?

Resolución

El momento flexionante M = 3 kN m produce el esfuerzo:

$$\sigma_1 = \frac{4M}{\pi r^3} = \frac{4(3\ kN\ m)}{\pi(0,04)^3\ m^3} \Rightarrow \sigma_1 = 59,68\ MPa$$

El punto [illegible] produce el esfuerzo [illegible]



Donde σ [illegible] 120 MPa

Así: $29{,}84 + \sqrt{(29{,}84)^2 + \tau_i^2} = 120$

$$\Rightarrow \sqrt{(29.84)^2 + \tau_i^2} = 90{,}16$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_i^2} \; [illegible]$$

De (α) y (β), escogemos el menor valor, que es lo coherente

Así $(29{,}84)^2 + \tau_i^2 = 80^2$

$\tau_i = 74{,}23$ MPa

Para este esfuerzo se requiere el par torsor [illegible]

954 Un recipiente de forma cilíndrica con sus extremos cerrados tiene un diámetro exterior de 400 mm y un espesor de 20 mm. Si soporta simultáneamente una presión interna de 4 MPa, un par de torsión de 80 kN·m y un momento flexionante de 20 kN·m, calcular el máximo esfuerzo de tensión sobre sus paredes descartando la posibilidad de pandeo.

Resolución

[illegible] 20 mm [illegible]

- Radio exterior = 0,2 m
- Radio interior = r_i = 0,18 m

La presión interna P_i = 4 MPa causa los esfuerzos

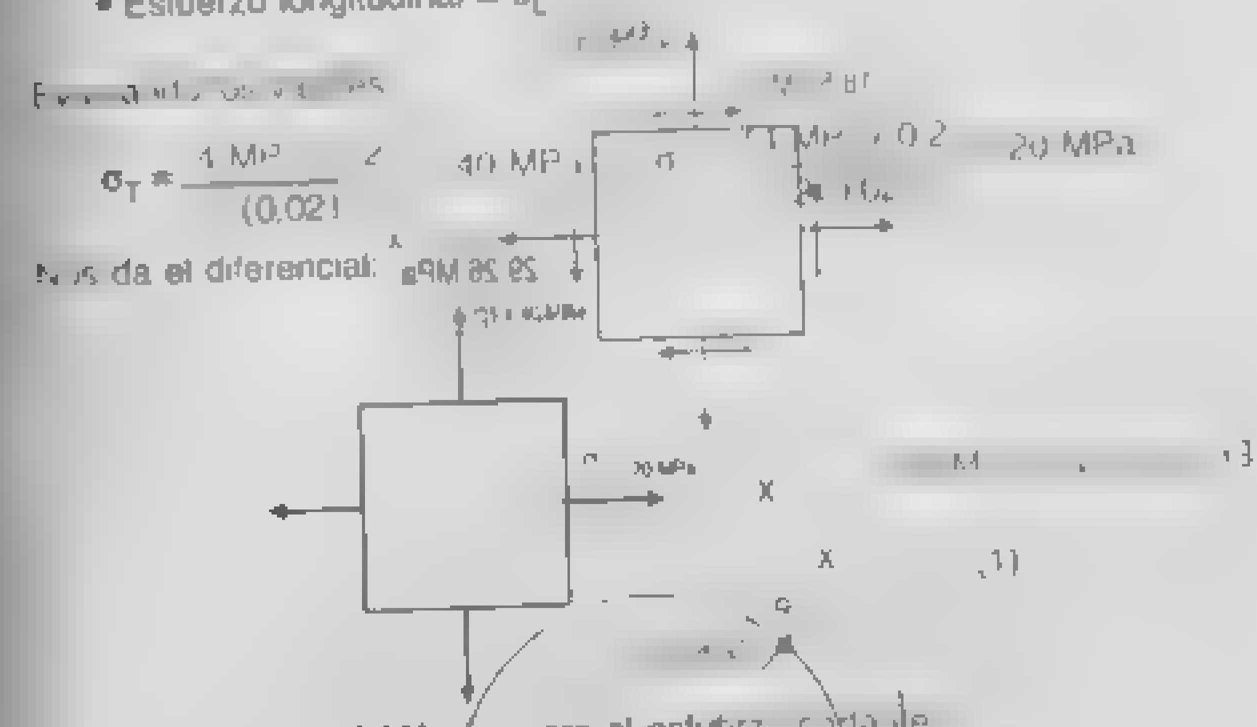
- Esfuerzo tangencial = $\sigma_T = \frac{P r_e}{[illegible]}$
- Esfuerzo longitudinal = σ_L [illegible]

[illegible]

$$\sigma_T = \frac{4 \text{ MPa} [illegible]}{(0.02)} = 40 \text{ MPa}$$

[illegible] 20 MPa

Nos da el diferencial:



El par torsor T = 80 kN·m genera el esfuerzo cortante

$$\tau = \frac{T r_e}{\frac{\pi}{2}(r_e^4 - r_i^4)} = \frac{(80)(0.2)}{\frac{\pi}{2}((0{,}2)^4 - (0{,}18)^4)} \text{ kPa}$$

$\tau = 18{,}51$ MPa

El momento flector M = 20 kN·m genera el esfuerzo normal

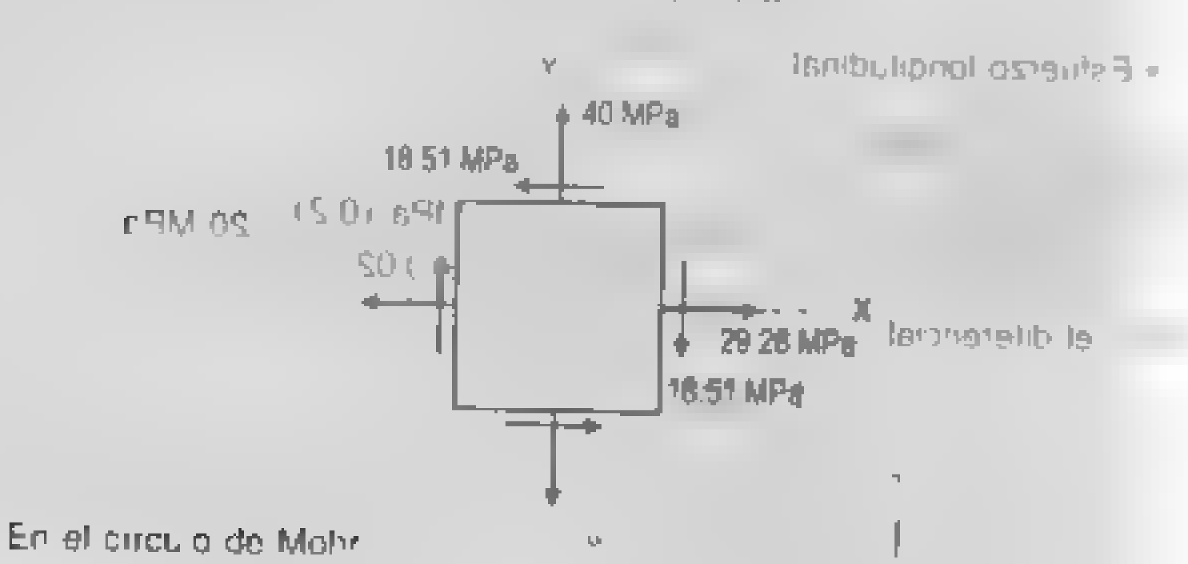
$$\sigma_N = \frac{Mr}{\frac{\pi}{4}(r_e^4 - r_i^4)} = \frac{(20)(0.2)}{\frac{\pi}{4}(0.2^4 - 0.18^4)} \text{ kPa}$$

$\sigma_N = 9{,}26$ MPa

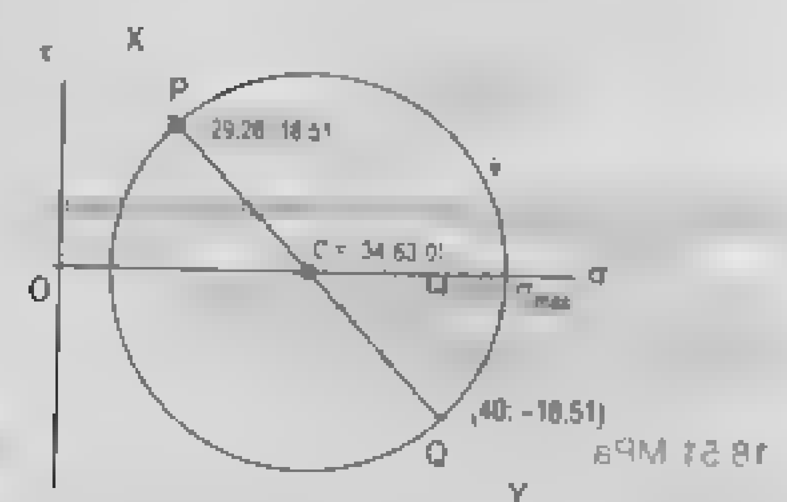
(α) y (β) generan el diferencial

(2)

Superponiendo ambos diferenciales: ((1) + (2))

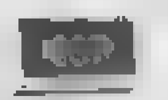


En el circulo de Mohr



Donde $\sigma_{máx}$ = 134.63 + √(40 − 34.63)² + (18.51)²] MPa

$\sigma_{máx}$ = 53.9 MPa



955 Un recipiente como el del problema anterior tiene un diametro exterior de 300 mm y está construido con una placa de acero de 10 mm de espesor. Si el tanque está sujeto a una presión interna de 6 MN/m², calcular el máximo par de torsión que pueda aplicársele si el esfuerzo normal en sus paredes está limitado a 100 MN/m². Descartar la posibilidad de pandeo.

Resolución:

Para diámetro d = 300 mm y espesor e = 10 mm = 0,01 m, hallamos:

- Radio exterior = r_e = 0,15 m
- Radio interior = r_i = 0,14 m

Hallando los esfuerzos tangencial y longitudinal que produce la presión interna P = 6 MPa

$$\sigma_T = \frac{P r_e}{e} = \frac{6\times 0{,}15}{0{,}01}\ \text{MPa} \quad \sigma_T = 90\ \text{MPa} \qquad (1)$$

$$\sigma_L = \frac{P r_e}{2e} = \frac{6\times 0{,}15}{2\times 0{,}01}\ \text{MPa} \quad \sigma_L = 45\ \text{MPa} \qquad (2)$$

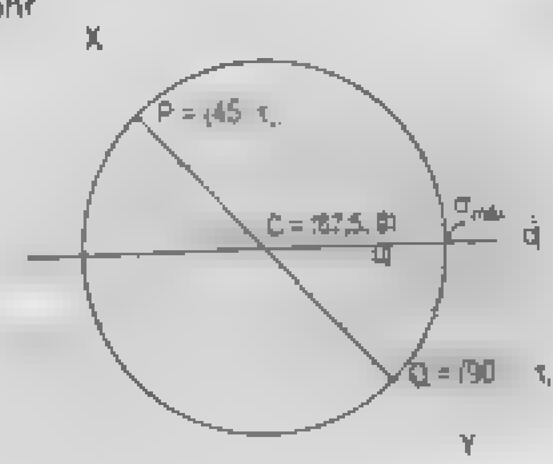
El par de torsión T genera el esfuerzo cortante τ, de (1) y (2) obtenemos el diferencial:

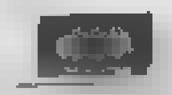
90 MPa

X

45 MPa

En el circulo de Mohr





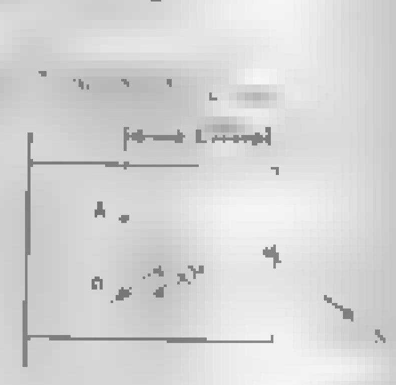
Y como el esfuerzo cortante está dado por: $\tau_t = \frac{T r_e}{J}$

Para diámetro d = 300 mm y espesor e = 10 mm = 0,01 m, hallamos

Así $23{,}45 \times 10^6$ N m = $\frac{T(0{,}15)}{\frac{\pi}{2}\left[(0{,}15)^4 - (0{,}14)^4\right]}$

p = 6 MPa

956. Calcular los esfuerzos principales y el máximo esfuerzo cortante en el punto A de la sección. La viga es de sección rectangular, teniendo 20 mm de ancho, 120 mm de altura y el punto A se encuentra 20 mm arriba de la línea neutra. Suponer que la carga de 50 kN actúa en el centro de la sección. Mostrar las respuestas en forma gráfica sobre elementos orientados adecuados. *Indicación:* asegurarse del esfuerzo cortante causado por la carga aplicada.



Resolución

La gráfica de la viga es

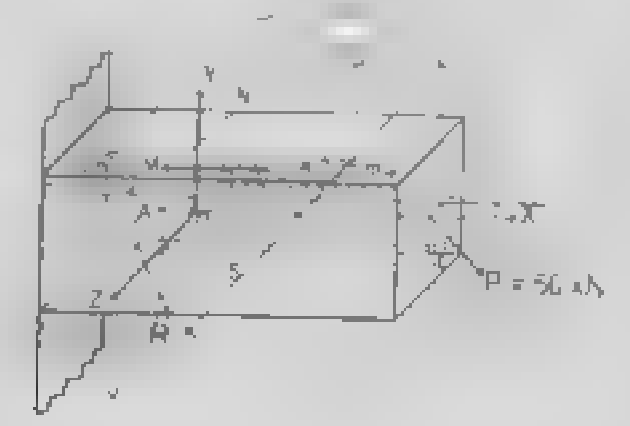
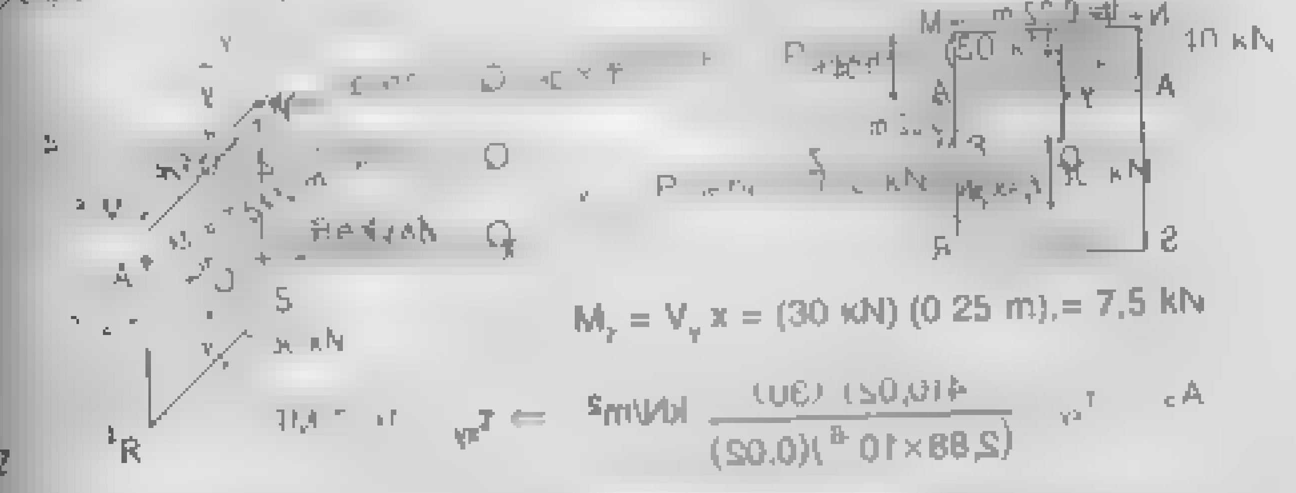


Diagrama de cuerpo libre en el centro de la sección MNSR



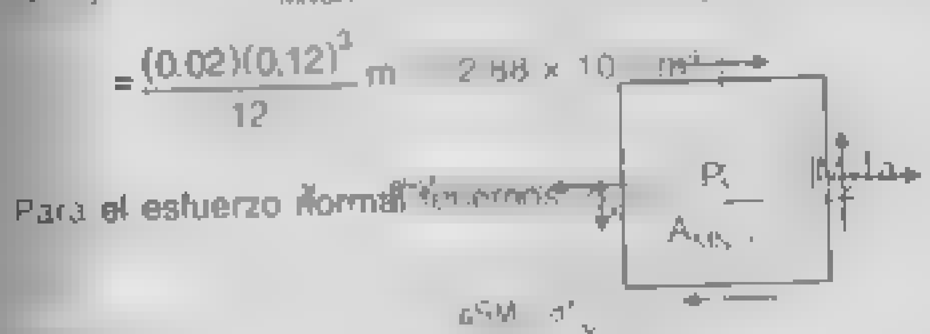
$M_y = V_y x = (30 \text{ kN})(0{,}25 \text{ m}) = 7{,}5$ kN

Tenemos las características de la sección MNSR

Área MNSR = $A_{MNSR} = (0{,}02)(0{,}12)$ m² ⇒ $A_{MNSR} = 2{,}4 \times 10^{-3}$ m²

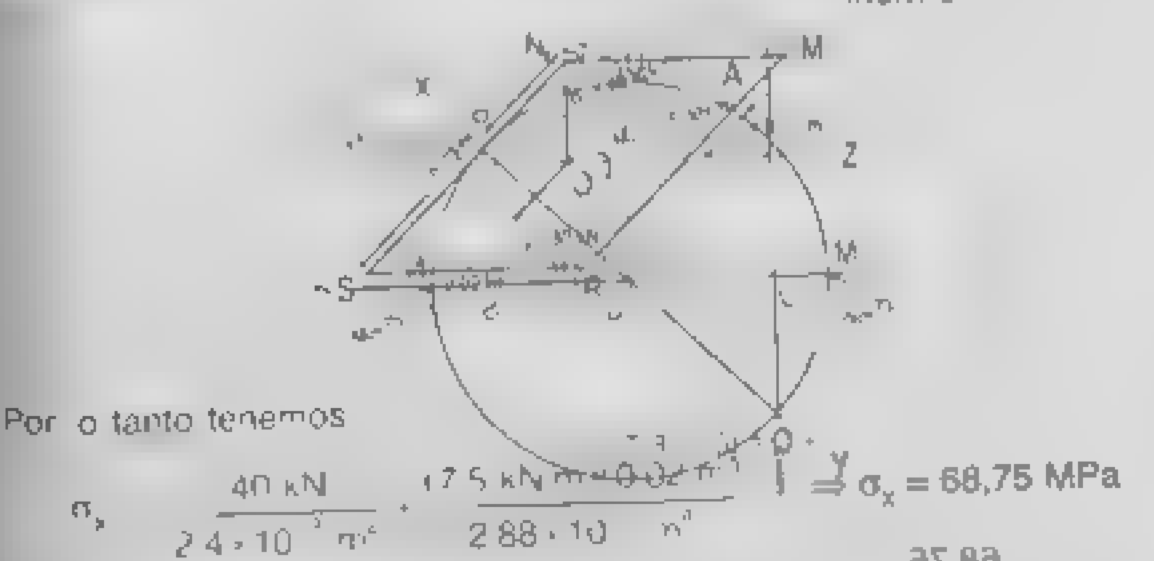
$= \frac{(0{,}02)(0{,}12)^3}{12}$ m⁴ = $2{,}88 \times 10^{-6}$ m⁴

Para el esfuerzo normal



Donde que

En el círculo de Mohr



Por lo tanto tenemos

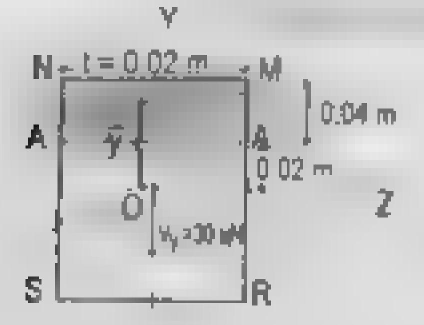
$\sigma_x = \frac{40 \text{ kN}}{2{,}4 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{7{,}5 \text{ kN m} \times 0{,}02 \text{ m}}{2{,}88 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \Rightarrow \sigma_x = 68{,}75$ MPa

La fuerza cortante V_y no genera esfuerzos normales, pero sí cortantes: donde

$\tau_{xy} = \frac{QV_y}{I_z t}$

donde OC = $\frac{68{,}75}{2} = 34{,}375$

Además, UC = CP = $\sqrt{(34{,}375)^2 + (16{,}7)^2}$ ⇒ UC = CP = 38,2



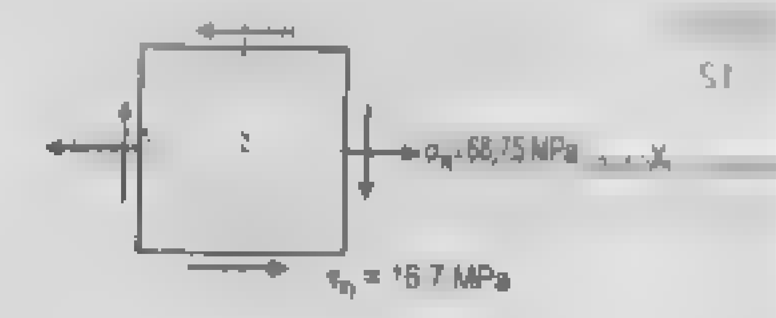
donde: $Q = (\text{área})_{ANMA} \cdot \bar{y}$

$$Q = (0{,}04)(0{,}02)\left(0{,}02 + \frac{0{,}04}{2}\right) m^3$$

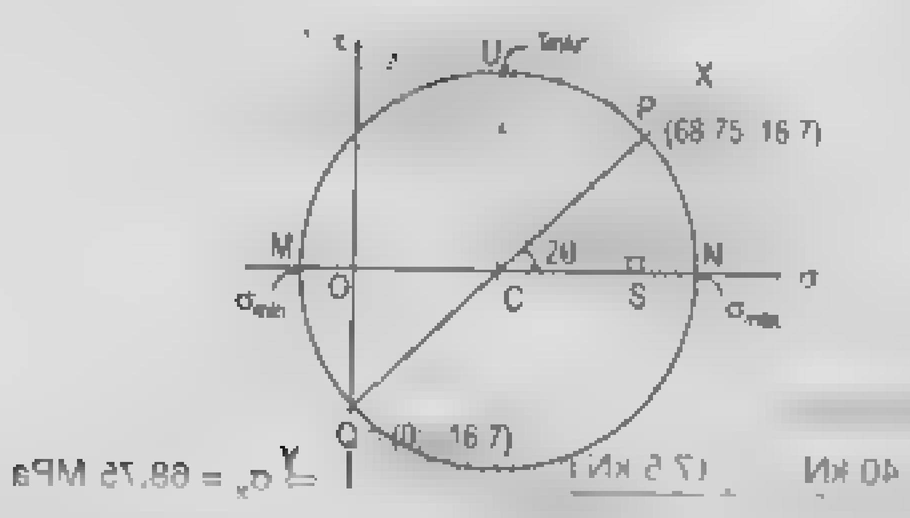
$$\Rightarrow \quad Q = 4(0{,}02)^3\ m^3$$

Así: $\tau_{xy} = \dfrac{4(0{,}02)^3(30)}{(2{,}88 \times 10^{-6})(0{,}02)}$ kN/m² $\Rightarrow \tau_{xy} = 16{,}7$ MPa

Tenemos el siguiente diferencial:



En el círculo de Mohr



donde: $OC = \dfrac{68{,}75}{2} = 34{,}375$

Además: $UC = CP = \sqrt{(34{,}375)^2 + (16{,}7)^2} \Rightarrow UC = CP = 38{,}22$

También $MC = CN = 38{,}22$

Así: $\sigma_{máx} = ON = OC + CN = (34{,}375 + 38{,}22)$ MPa $\Rightarrow \sigma_{máx} = 72{,}595$ MPa

$\boxed{\sigma_{máx} = 72{,}6 \text{ MPa}}$

$\sigma_{mín} = -MO = OC - MC = (34{,}375 - 38{,}22)$ MPa $\Rightarrow$ [illegible] MPa

$\tau_{máx} = UC \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 38{,}22 \text{ MPa}}$

Para hallar el ángulo de desviación para los esfuerzos principales

$$-\tan 2\theta = \frac{16{,}7}{34{,}375} \quad \text{donde} \quad [illegible]$$

4.57 Dada la viga descrita en el problema 9 [illegible] componentes de esfuerzo a lo largo del plano que forma [illegible] y que pasa por B. Suponer, para esto que x = 300 mm y que B está a 20 mm [illegible] del eje neutro. Mostrar sus resultados gráficamente sobre un elemento diferencial.

Resolución

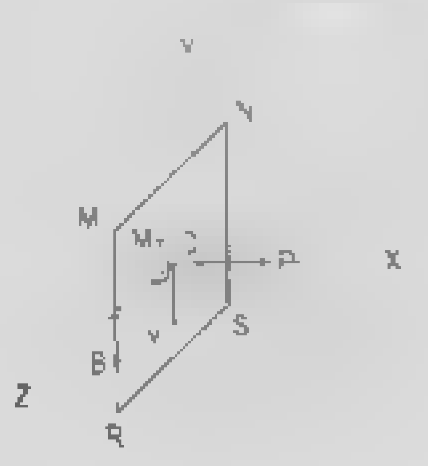
El problema es parecido, para ello: x = 300 mm = 0,3 m y el punto donde han de hallarse los esfuerzos está a 20 mm [illegible]

Así: $P_x = P \cdot \cos\alpha = (50 \text{ kN})\left(\frac{4}{5}\right) = 40$ kN

$$V_y = P \cdot \operatorname{sen}\alpha = (50 \text{ kN})\left(\frac{3}{5}\right) = 30 \text{ kN}$$

$$M_z = V_y \cdot x = (30 \text{ kN})(0{,}3 \text{ m}) = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

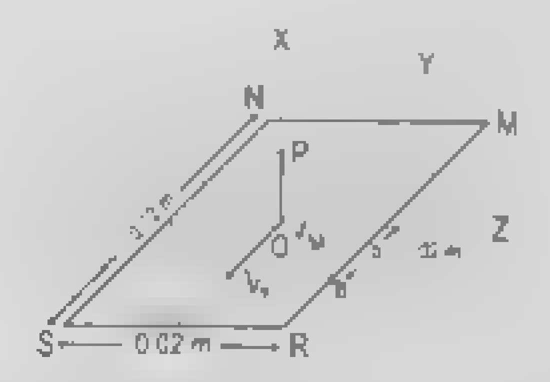
Diagrama de cuerpo libre de la sección MNSR



donde, $A_{MNSR} = 2,4 \times 10^{-3}\ m^2 \wedge I_z = 2,88 \times 10^{-6}\ m^4$

Para el esfuerzo normal tenemos: $\sigma_x = \dfrac{P_1}{A_{MNSR}} + \dfrac{|M_Z|b}{I_Z}$

donde

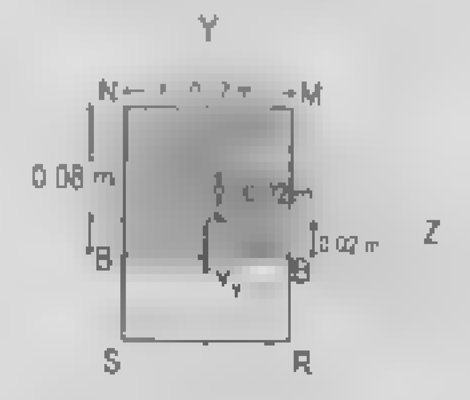


Así

$$\sigma_x = \frac{40\ kN}{2{,}4 \times 10^{-3}\ m^2} + \frac{(9\ kNm)(0{,}02\ m)}{2{,}88 \times 10^{-6}\ m^4} \Rightarrow \sigma_x = 79{,}17\ MPa \quad ...(1)$$

La fuerza cortante V_y genera el esfuerzo cortante: $\tau_{xy} = \dfrac{Q V_y}{I_z t}$

donde



Entonces:

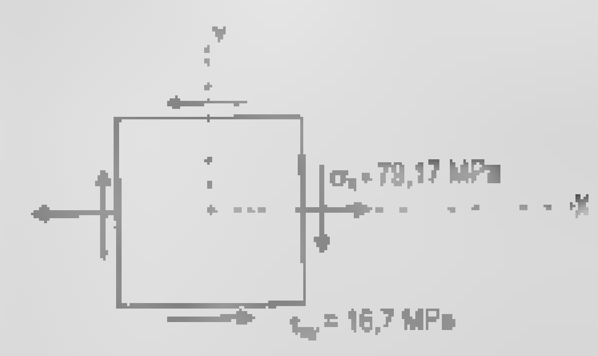
$$Q = (\text{área})_{BMNB}\ \bar{y} = (0{,}08)(0{,}02)\left(\frac{0{,}08}{2} - 0{,}02\right)\ m^3$$

$\Rightarrow Q = 4\,(0{,}02)^3\ m^3$ ...(2)

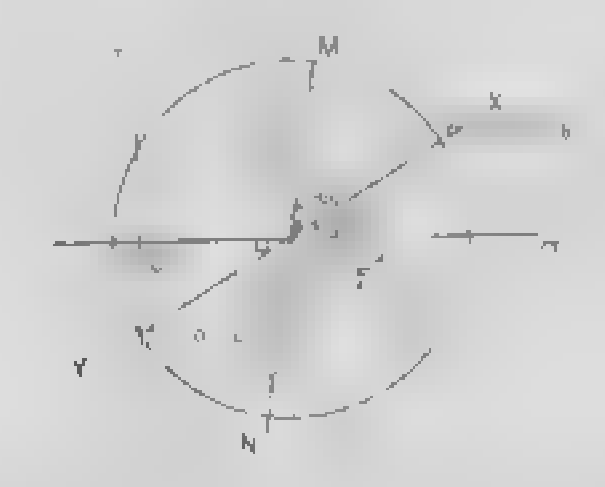
Así $\tau_{xy} = \dfrac{4 \times (0{,}02)^3\,(30)}{(2{,}88 \times 10^{-6})(0{,}02)}\ kN/m^2$

$\tau_{xy} = 16{,}7\ MPa$ ...(3)

El diferencial de esfuerzos es



En el círculo de Mohr, hallamos los esfuerzos a 60° del eje X



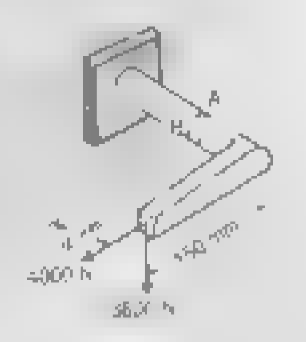
De [illegible] C [illegible] 79,17/2 [illegible] 16,7 [illegible] 22,87

Los esfuerzos a 60° del eje X: (Y como OC = 39,585 además

$$CM = CP = \sqrt{\left(\frac{79{,}17}{2}\right)^2 + 16{,}7^2} = 42{,}96$$

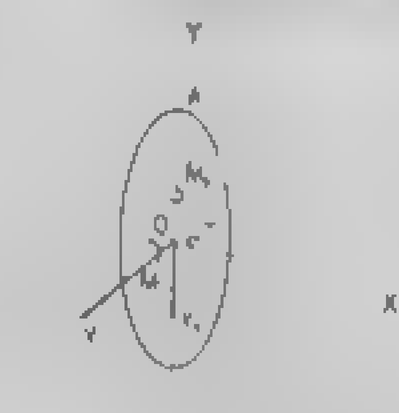
$\sigma = OC + CM\cos(2\theta + 60°)$ [illegible] 39,585 + (42,96 [illegible] 82,8[illegible] MPa

9.8 Un soporte de 50 mm de diámetro firmemente empotrado en un extremo, soporta en el otro unas cargas horizontal y vertical como en la figura. Calcular los esfuerzos resultantes máximos en el punto A de la fibra superior



Resolución:

El diagrama de cuerpo libre en la sección circular que contiene al punto A.



donde $V_y = 3600$ N y $V_z = 4000$ N son las fuerzas cortantes

T = (3600 N)(0.15 m) = 540 N·m (momento torsionante a lo largo del eje X)

M_y = (4000 N)(0.09 m) = 360 N·m (momento flector a lo largo del eje Y)

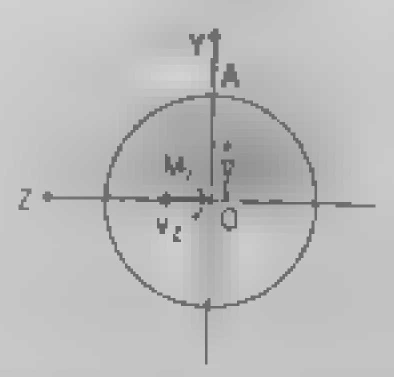
M_z = (3600 N)(0.09 m) = 324 N·m (momento flector a lo largo del eje Z)

El esfuerzo torsionante en toda la sección circular es: $\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{\frac{\pi}{2}c^4}$

donde c es el radio de la sección circular: $\tau = \frac{2(540\ N{\cdot}m)}{\pi(0.025\ m)^3} = 22$ MPa ...(1)

Para nuestro problema vemos que la cortante y el momento que afecta al punto A son V_z y M_z.

Del diagrama:



El esfuerzo normal en el punto A es causado por M_z: $\sigma_A = \frac{|M_z|c}{\frac{\pi}{4}c^4} = \frac{4|M_z|}{\pi c^3}$

Entonces $\sigma_A = \frac{4(324\ N{\cdot}m)}{\pi(0.025)^3\ m^3} = 26.4$ MPa ...(2)

La cortante V_z genera el esfuerzo torsor

$$\tau = \frac{QV_z}{It} \quad ...(\alpha)$$

donde $I = \frac{\pi}{4}c^4$; $t = 2c$

Además: Q = (área semicircunferencia)$\bar{y}$, es decir $Q = (\text{área}_{\triangle})\bar{y}$

También: $(\text{área}_{\triangle}) = \frac{\pi}{2}c^2$

$\bar{y} = \frac{4}{3\pi}c$ (centroide de semicircunferencia)

Entonces $Q = \frac{\pi}{2}c^2\left(\frac{4}{3\pi}c\right) = \frac{2}{3}c^3$ ...(β)

Por lo tanto el esfuerzo por torsión que genera la cortante V_z es

$$\tau = \frac{\left(\frac{2}{3}c^3\right)V_z}{\frac{\pi}{4}c^4(2c)} = \frac{4}{3\pi}\frac{V_z}{c^2} \quad ...(\gamma)$$

Para los valores dados: $\tau_1 = \frac{4(4000\ N)}{3\pi(0.025\ m)^2} = 2.72$ MPa ...(3)

En conclusión, en el punto A los esfuerzos son

$\sigma_A = 26.4$ MPa

$\tau_A = \tau + \tau_1 = (22 + 2.72)$ MPa $\rightarrow \tau_A = 24.72$ MPa

Hallando el esfuerzo máximo

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \frac{26.4}{2} + \sqrt{\left(\frac{26.4}{2}\right)^2 + (24.72)^2}\ \text{MPa}$$

$\boxed{\sigma_{max} = 41.2\ MN/m^2}$

959. Repetir el problema anterior para el punto B

Resolución:

Para el punto B, el esfuerzo τ es el mismo del problema anterior y solo es afectado por la cortante V_y y el momento flector M_y.

$$\sigma_B = \frac{|M_y|c}{\frac{\pi}{4}c^4} = \frac{4|M_y|}{\pi c^3} = \frac{4(360\ N\cdot m)}{\pi(0.025\ m)^3}$$

$$\Rightarrow \sigma_B = 29\ 34\ MPa \qquad \ldots(1)$$

P[illegible] e[illegible] fuerzo de t[illegible] [illegible] p[illegible] V[illegible] es e[illegible] m[illegible] que [illegible] anterior

$$\tau \ \frac{4V_y}{3\pi c^2} = \frac{4(3600\ N)}{3\pi(0{,}025\ m)^2} \Rightarrow \tau_2 = 2{,}44\ MPa \qquad \ldots(2)$$

Por lo tanto, en el punto B los esfuerzos son:

$\sigma_B = 29.34\ MPa$ y $\tau_B = \tau + \tau_2$

[illegible] MPa [illegible] 24.4 MPa

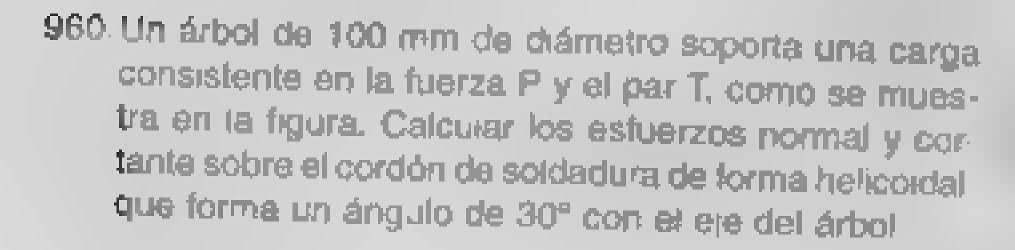
El esfuerzo máximo es

$$\sigma_{máx} \ \frac{\sigma_B}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_B}{2}\right)^2 [illegible]}$$

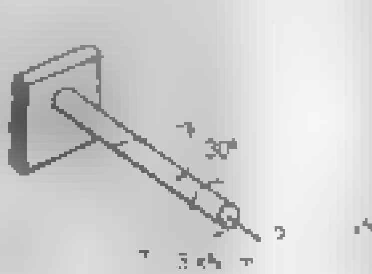
$\sigma_{máx}$ [illegible] $\frac{2[illegible]}{2}$ [illegible] $\frac{29\ 34}{2}$ [illegible] MPa [illegible]

Y τ [illegible] $\frac{29\ 44}{2}$ [illegible] 24 44 MPa [illegible] MPa [illegible]

Además. τ CM sen(60° + 2θ) = (42.96)sen(82,87°) MPa $\Rightarrow \boxed{\tau = 42\ 63\ MPa}$

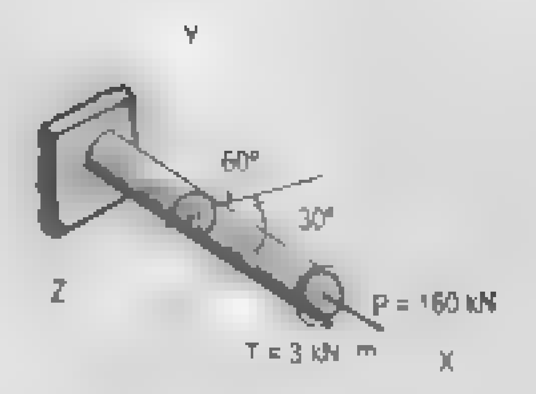


960. Un árbol de 100 mm de diámetro soporta una carga consistente en la fuerza P y el par T, como se muestra en la figura. Calcular los esfuerzos normal y cortante sobre el cordón de soldadura de forma helicoidal que forma un ángulo de 30° con el eje del árbol

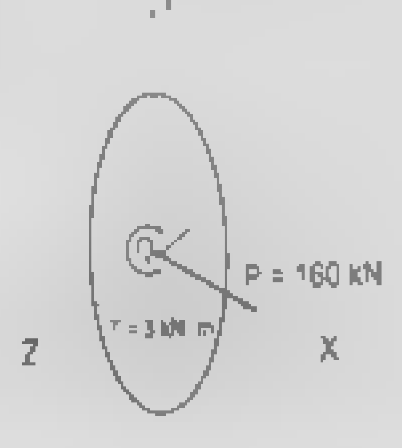


Resolución:

Del gráfico



Haciendo el diagrama de cuerpo libre en una sección paralela.



La sección circular tiene radio igual a r = 50 mm = 0 05 m y sus características geométricas.

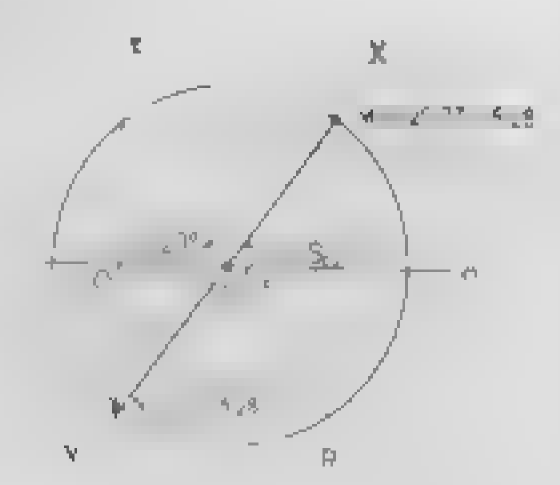
- Área = $A = \pi r^2 = \pi(0{,}05)^2\ m^2 \Rightarrow A = 7{,}85 \times 10^{-3}\ m^2$
- $J = \frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{2}(0.05)^4\ m^4 \Rightarrow J = 9{,}81 \times 10^{-6}\ m^4$

El esfuerzo normal es causado solo por la fuerza axial P

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{160\ kN}{7\ 85\times 10^{-3}\ m^2} \Rightarrow \sigma_x = 20{,}37\ MPa$$

El esfuerzo cortante es. $\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{(3\ kN m)(0{,}05\ m)}{9{,}81\times 10^{-6}\ m^4} \Rightarrow \tau_{xy} = 15{,}28\ MPa$

En el círculo de Mohr



Donde: OC = ... = 10,185

también: $CM = CR = \sqrt{\left(\frac{20,37}{2}\right)^2 + (15.28)^2}$

$\Rightarrow$ $CM = CR = 18.36$ y $\tan 2\theta = \frac{15,28}{10.185} \Rightarrow 2\theta = 56.31°$

Los esfuerzos a 60° (o 120° del eje Y) son

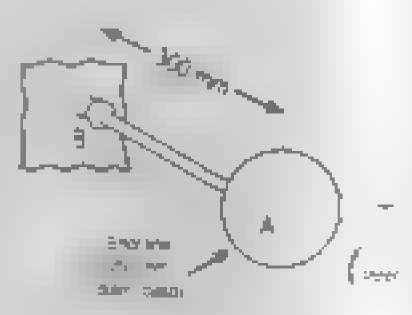
σ: $OS = OC + CS = OC + CR\cos\alpha = OC + CR\cos(120° - 2\theta)$

$\Rightarrow$ $\sigma = (10,185 + 18.36\cos(120° - 56.31°))$ MPa ∴ $\boxed{\sigma = 18.32 \text{ MPa}}$

τ: $SR = -CR\text{sen}(120° - 2\theta)$

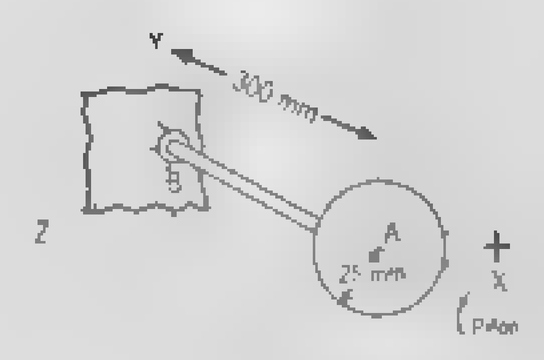
$\Rightarrow$ $\tau = -(18.36\text{sen}(120° - 56.31°))$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\tau = ... \text{ MPa}}$

961. Un reductor de velocidad transmite una potencia de 20 kW. En cierta parte de dicho reductor, un piñón hace girar el engrane A del árbol AB a 6 r/s. Determinar el diámetro mínimo del árbol AB si $\tau_{máx} \leq 60$ MN/m² y $\sigma_{máx} \leq 80$ MN/m². Considere sólo esfuerzos por torsión y por flexión en el eje.



Resolución.

Del diagrama.



De los datos.

- Potencia que transmite el piñón. $\wp$ = 20 kW = 20 kN m/s
- Frecuencia de barra AB. $f = 6\ \frac{rev}{s}$

Dicha potencia genera un par torsor T tal como:

$$T = \frac{\wp}{2\pi f} = \frac{20\text{ kN·m/s}}{(2\pi)(6\text{ rev/s})} = 0.53\text{ kN·m} \quad \text{.. (1)}$$

La fuerza F aplicada en A necesaria por la potencia transmitida por el piñón es

$F \cdot d \cdot f$ ... donde "d" es el radio del engranaje

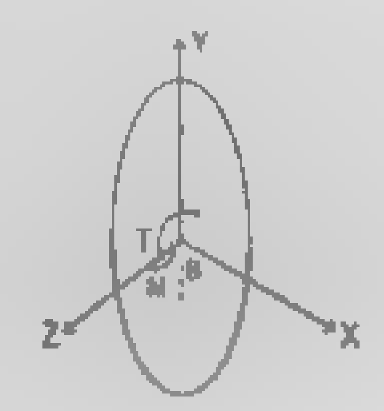
Entonces: $F(0.125\text{ m})\left(6\ \frac{rev}{s}\right) = 20\text{ kN m/s} \Rightarrow F = 26.67\text{ kN}$

Esta fuerza flectora genera momento flector a lo largo de la barra AB y alcanza un valor máximo en B

$M = F(0,30\text{ m}) = (26.67)(0,30)$ kN·m

$M = 8$ kN·m .. (2)

Diagrama de una sección de la barra AB



Los momentos equivalentes a torsión y a flexión en el punto B son

$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{8^2 + (0,53)^2}$ kN·m $\Rightarrow T_e = 8{,}02$ kN·m

Y: $M_e = \frac{1}{2}(M + T_e) = \frac{1}{2}(8 + 8{,}02)$ kN·m $\Rightarrow M_e = 8{,}01$ kN·m

El esfuerzo normal es: $\sigma = \frac{4M_e}{\pi r^3} = \frac{4(8{,}01)\ \text{kN·m}}{\pi r^3}$

Y por condición del problema: $\sigma = 80$ MPa $= 80\,000\ \frac{kN}{m^2} = \frac{4(8{,}01)\ \text{kN·m}}{\pi r^3}$

$\Rightarrow r = 0{,}05032$ m $= 50{,}32$ mm (3)

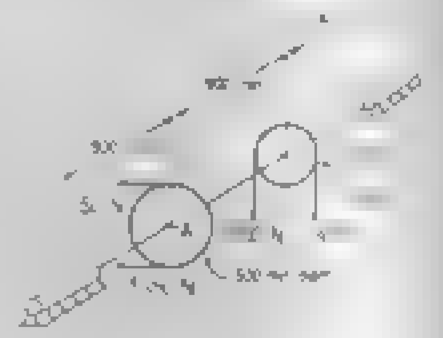
El esfuerzo cortante es $\tau = \frac{2T_e}{\pi r^3} = \frac{2(8{,}02)}{\pi r^3}$ kN·m

Y por condición del problema: $\tau = 60$ MPa $= 60\,000\ \frac{kN}{m^2} = \frac{2(8{,}02)\ \text{kN·m}}{\pi r^3}$

$\Rightarrow r = 0{,}04398 = 43{,}98$ mm (4)

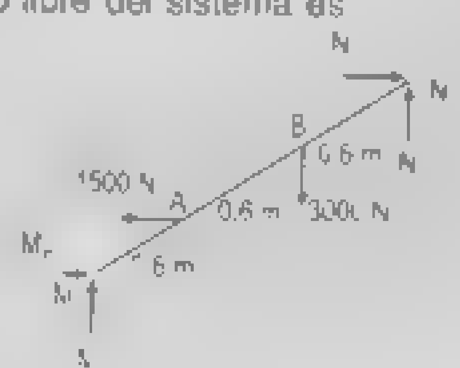
Eligiendo el mayor de los valores para el radio: r = 50,32 mm [illegible]

962. Un eje de transmisión por correas de 50 mm de diámetro está sometido a las fuerzas indicadas en la figura. Las fuerzas sobre la polea A son horizontales y las de B son verticales. Calcular los esfuerzos resultantes normal y cortante máximos en el árbol



Resolución

El diagrama de cuerpo libre del sistema es



Para las fuerzas horizontales

$\Sigma M_N = 0 = 3(0{,}6)M_H - 2(0{,}6)(1500\ N) \Rightarrow M_H = 1000$ N

y como: $M_H + N_H = 1500$ N $\Rightarrow N_H = 500$ N

Para las fuerzas verticales

$\Sigma M_N = 0 = 3(0{,}6)M_V - (0{,}6)(3000\ N) \Rightarrow M_V = 1000$ N

y como $= M_V + N_V = 3000$ N $\Rightarrow N_V = 2000$ N

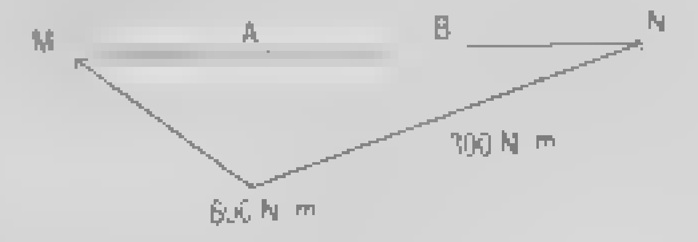
Las cargas aplicadas a cada disco producen tanta torsión como flexión, siendo la torsión constante a lo largo de la sección AB del eje que tiene un diámetro de 50 mm. Así

T = (1350 − 150) × ([illegible]) N·m = 300 N·m

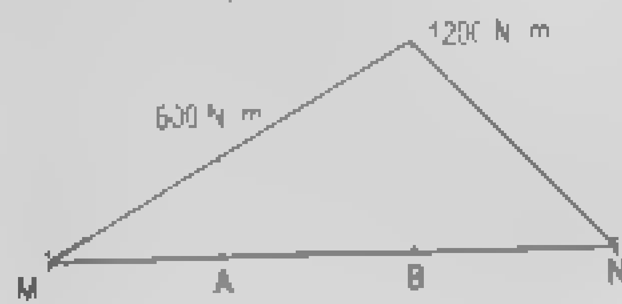
que es igual a. $T = (2700 - 300)\left(\frac{0{,}25}{2}\right)$ N·m = 300 N·m

Graficando los momentos flectores tanto del plano horizontal como vertical en el diagrama de área de momentos

- Momentos flexionantes en el plan horizontal



- Momento flexionantes en el plano vertical



- Momentos torsionantes

Observamos que los momentos máximos se encuentran en el punto B donde el momento máximo resultante es

$$M_{máx} = \sqrt{M_H^2 + M_V^2} \Rightarrow M_{máx} = \sqrt{300^2 + 1200^2} = 1237 \text{ N·m}$$

donde T = 300 N·m

Hallando los momentos equivalentes de torsión y flexión:

$$T_e = \sqrt{M_{máx}^2 + T^2} = \sqrt{1237^2 + 300^2} \text{ N·m} \rightarrow T_e = 1272,86 \text{ N·m}$$

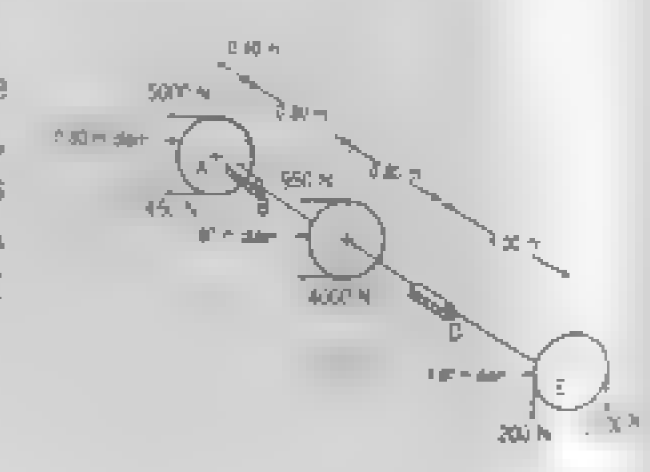
$$\text{Y como } M_e = \frac{1}{2}(M_{máx} + T_e) = \frac{1}{2}(1237 + 1272,86) \text{ N m} \Rightarrow M_e = 1254,93 \text{ N m}$$

Así los esfuerzos máximos son

$$\sigma = \frac{4M_e}{\pi r^3} = \frac{4 \times (1254,93)}{\pi (0.025)^3 m^3} \text{ N·m} \Rightarrow \boxed{\sigma = 102,26 \text{ MPa}}$$

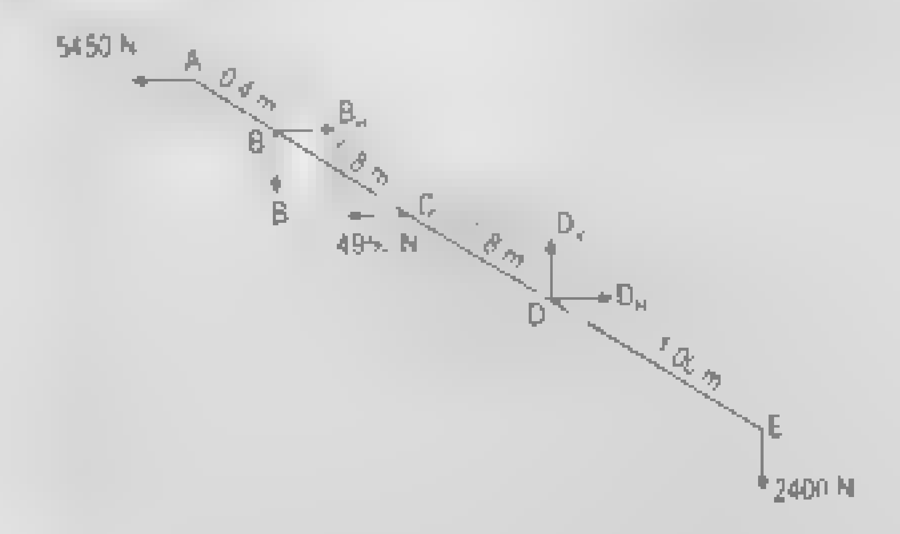
$$\tau = \frac{2T_e}{\pi r^3} = \frac{2(1272,86)}{\pi (0.025)^3 m^3} \text{ N·m} \rightarrow \boxed{\tau = 51,86 \text{ MPa}}$$

963 Diseñar un árbol circular macizo para que soporte las cargas indicadas en la figura, si $\tau_{máx} \leq 60$ MPa y $\sigma_{máx} \leq 80$ MPa. Las correas de transmisión de las poleas A y C son horizontales y las de la polea E son verticales.



Resolución

El diagrama de cuerpo libre del sistema es



Plano horizontal

$$\Sigma M_B = 0 = 2(0.8)\, D_H - (0,8)(4950) + (0,4)(5450) \Rightarrow D_H = 1112,5 \text{ N}$$

y como: $B_H + D_H = 5450 \text{ N} + 4950 \text{ N} \Rightarrow B_H = 9287,5$ N

Plano vertical

$$\Sigma M_B = 0 = 2(0,8)\, D_V - (2,6)(2400 \text{ N}) \Rightarrow D_V = 3900 \text{ N}$$

y como $D_V = B_V + 2400$ N ⇒ $B_V = 1500$ N

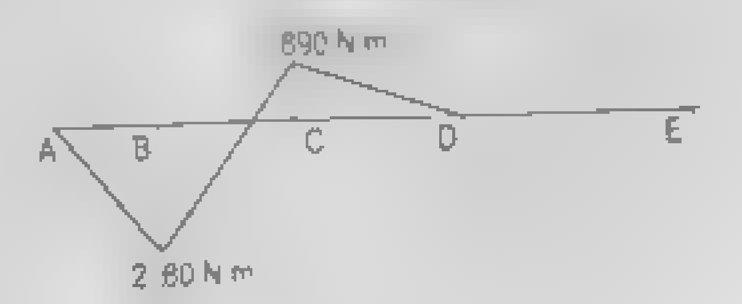
El momento torsor es

$$\text{Tramo ABC: } T_1 = (5000 - 450)\frac{0,80}{2} \text{ N·m} \Rightarrow T_1 = 1820 \text{ N·m}$$

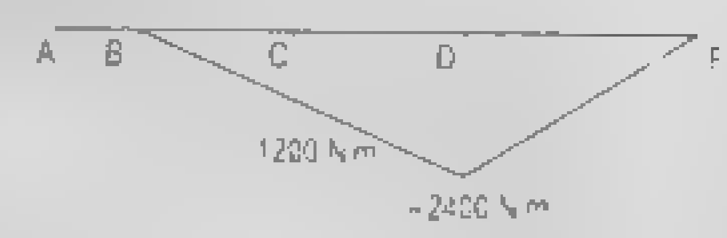
$$\text{Tramo CDE: } T_2 = 1820 \text{ N·m} - (4000 - 950)\frac{0,80}{2} \text{ N·m} \Rightarrow T_2 = 600 \text{ N·m}$$

Graficando el área de momentos

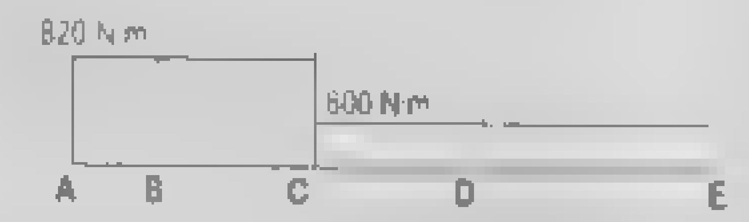
Momentos flexionantes en el plano horizontal



Momentos flexonantes en el plano vertical



Momentos torsores



Los momentos máximos se encuentran en el punto B, así
M = 2180 N·m y T = 1820 N m

Los momentos equivalentes son

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{2180^2 + 1820^2}\ N{\cdot}m \Rightarrow T_e = 2840\ N{\cdot}m$$

$$M_e = \frac{1}{2}(M + T_e) = \frac{1}{2}(2180 + 2840)\ N\ m \Rightarrow M_e = 2510\ N\ m$$

Por los datos del problema: $\sigma \leq 80$ MPa y $\tau \leq 60$ MPa

Sea "r" el radio del eje

$$\sigma = \frac{4M_e}{\pi r^3} = \frac{4(2510\ N{\cdot}m)}{\pi r^3}\ N\ m = 80\ 000\ 000\ N/m^2$$

$\Rightarrow$ r = 0,0342 m = 34,2 mm ... (1)

$$\tau = \frac{2T_e}{\pi r^3} = \frac{2(2840\ N\ m)}{\pi r^3} = 60\ 000\ 000\ N/m^2$$

$\Rightarrow$ r = 0,0311 m = 31,1 mm (2)

Eligiendo el mayor valor para el radio: r = 34 2 mm o $\boxed{d = 68.4\ mm}$

964. Problema ilustrativo.

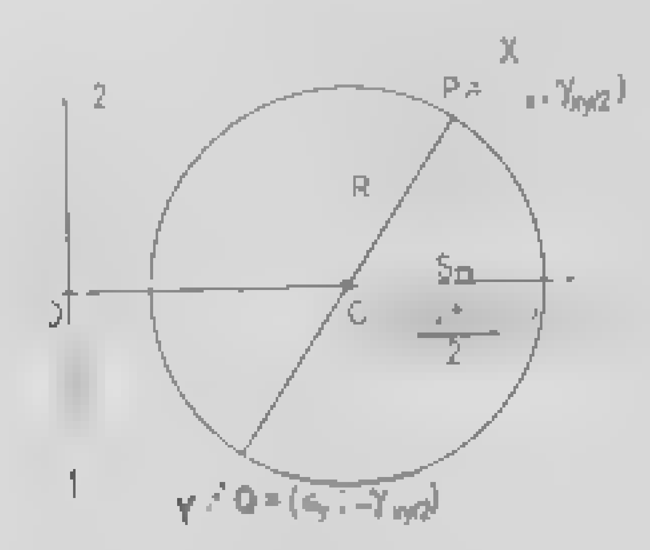
Demostrar que las ecuaciones: $R_\sigma = R_\epsilon \dfrac{E}{1+\upsilon}$ ... (9-17)

$$(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon \frac{E}{1-\upsilon} \qquad (9\text{-}18)$$

transforman un círculo de deformaciones en uno de esfuerzos.

Resolución:

El círculo de Mohr para las deformaciones biaxiales ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}



Donde: $CS = \dfrac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \wedge PS = \dfrac{1}{2}\gamma_{xy}$ y como: $R_\epsilon^2 = CS^2 + PS^2$

El radio del círculo de deformaciones es

$$R_\epsilon^2 = \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 \qquad ...(\alpha)$$

La distancia del origen de coordenadas al centro del círculo de deformaciones

es, $(OC)_\epsilon = \dfrac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$ ...(β)

De acuerdo a la ley de Hooke para el esfuerzo biaxial es

$$\sigma_x = E\frac{(\epsilon_x + \upsilon\epsilon_y)}{1-\upsilon^2} \qquad ...(1)$$

$$\sigma_y = E\frac{(\upsilon\epsilon_x + \epsilon_y)}{(1-\upsilon^2)} \qquad ...(2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy} \qquad ...(3)$$

(Donde E: módulo de elasticidad, υ: coeficiente de Poisson)

Resolviendo (1), (2) y (3) se tiene

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \upsilon\sigma_y}{E} \qquad ...(1)'$$

$$\epsilon_y = \frac{-\upsilon\sigma_x + \sigma_y}{E} \qquad ...(2)'$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{(1+\upsilon)}{E}\tau_{xy} \qquad ...(3)'$$

De acuerdo a las transformaciones

$$R_\sigma = R_\epsilon \frac{E}{1+\upsilon} \qquad ...(9\text{-}17)$$

$$(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon \frac{E}{1-\upsilon} \qquad ...(9\text{-}18)$$

En (9-17)

$$R_\sigma^2 = R_\epsilon^2 \frac{E^2}{(1+\upsilon)^2}, \text{ por } (\alpha)\text{: } R_\sigma^2 = \left[\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{E^2}{(1+\upsilon)^2}$$

De (1)', (2)' y (3)':

$$R_\sigma^2 = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \frac{1}{E^2}(1+\upsilon)^2 + \frac{1}{E^2}(1+\upsilon)^2\tau_{xy}^2\right]\frac{E^2}{(1+\upsilon)^2}\ 0$$

$$R_\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad ...(I)$$

En (9-18) (por (β)) (1)' (2)'

$$(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon \frac{E}{(1-\upsilon)} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \times \frac{E}{1-\upsilon}$$

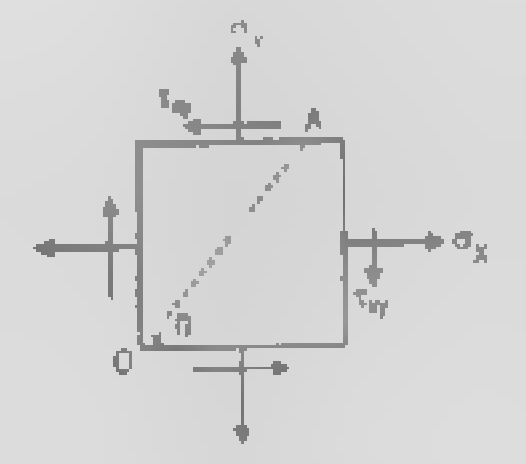
$$(OC)_\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\left(\frac{1-\upsilon}{E}\right) \times \frac{E}{(1-\upsilon)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad ...(II)$$

De (I) y (II) R_σ y OC_σ son respectivamente el radio y la distancia de centro de coordenadas al del círculo de esfuerzos de Mohr

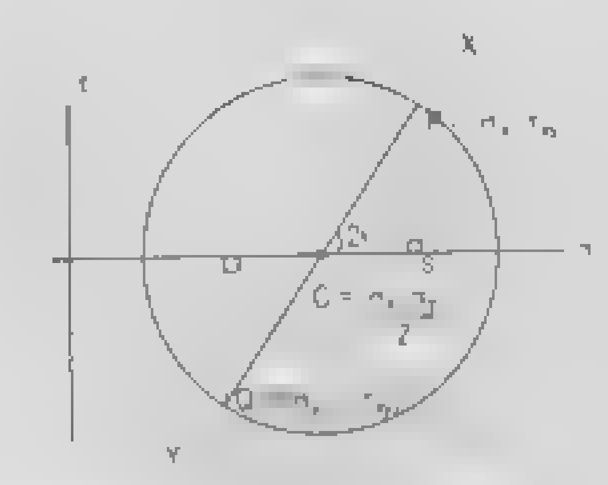
906 Partiendo de un elemento sometido únicamente a esfuerzos principales, comprobar que la desviación angular de un elemento lineal, tal como OA de la figura, es igual a la mitad de la distorsión γ_{ab}

Resolución

Para el diferencial de esfuerzos.



En el círculo de Mohr



Por la ley de Hooke para los esfuerzos biaxiales

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_x + \upsilon\epsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_x + \epsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\upsilon}\frac{\gamma_{xy}}{2} \qquad ...(1)$$

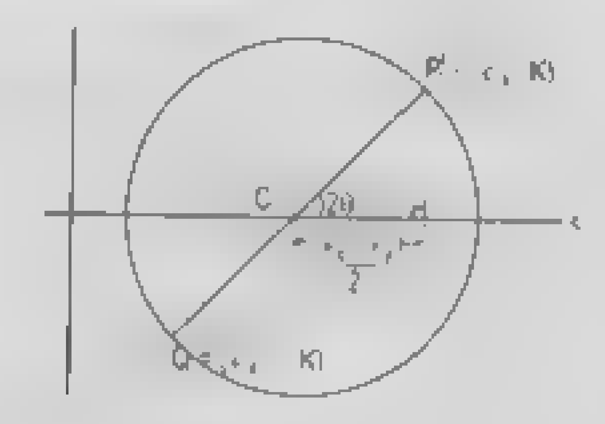
Donde

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=\frac{E}{1-\nu}\,\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}=\frac{E}{1+\nu}\,\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2} \qquad (3)$$

Además $\tan 2\theta=\dfrac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}$ (4)

En el círculo de deformaciones



Siendo K la desviación angular, es

$$\tan 2\theta=\frac{K}{\dfrac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}} \qquad (5)$$

Igualando (4) y (5) $\dfrac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}=\dfrac{K}{\dfrac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}}$

De (1), (2) y (3) $\dfrac{\dfrac{E}{1+\nu}\,\dfrac{\gamma_{xy}}{2}}{\dfrac{E}{1+\nu}\,\dfrac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}}=\dfrac{K}{\dfrac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}}$

Simplificando $K=\dfrac{\gamma_{xy}}{2}$ como las variables son mudas $\boxed{K=\dfrac{\gamma_{xy}}{2}}$

Un estado de deformación está determinado por $\epsilon_x=-400\times10^{-6}$, $\epsilon_y=200\times10^{-6}$, $\gamma_{xy}=800\times10^{-6}$. Si E = 200 GPa y ν = 0.30; calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, así como las componentes del esfuerzo en un elemento a + 40° del eje X

Resolución

Por la ley de Hooke

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x+\nu\epsilon_y)$$

$$\sigma_x=\frac{200\text{ GPa}}{(1-0.30^2)}\left(-400\times10^{-6}+(0{,}30)(200\times10^{-6})\right)$$

Así $\sigma_x=-74.725$ MPa, también: $\sigma_y=\dfrac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_x+\epsilon_y)$

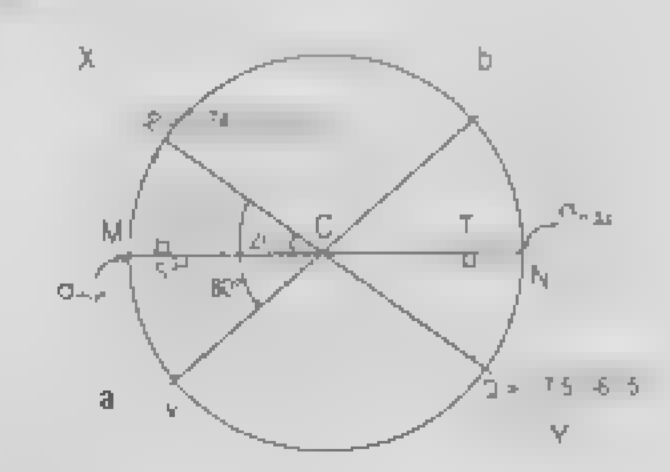
o $\sigma_y=\dfrac{200\text{ GPa}}{(1-0.3^2)}(0{,}3\times(-400\times10^{-6})+200\times10^{-6})\Rightarrow\sigma_y=17.582$ MPa

Además

$$\tau_{xy}=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)\Rightarrow\tau_{xy}=\frac{200\text{ GPa}}{(1+0.3)}\left(\frac{800}{2}\times10^{-6}\right)$$

$\tau_{xy}=61.538$ MPa

En el círculo de Mohr



donde $C=\left(\dfrac{17.5-74.725}{2},0\right)\Rightarrow C=(-28.61,0)$

Además $PC = CQ = \sqrt{17{,}5 + 28{,}61^2 + 61{,}51^2}$

$PC = CQ = MC = CN = 76{,}945$

Del gráfico

$\sigma_{máx} = (-28{,}61 + 76{,}945)$ MPa $\quad \sigma_{máx} = 48{,}335$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx} = 48{,}3 \text{ MPa}}$

y

$\sigma_{mín} = (-28{,}61 - 76{,}945)$ MPa, $\sigma_{mín} = -105{,}555$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{mín} = -105{,}6 \text{ MPa}}$

$\boxed{\tau_{máx} = 76{,}945 \text{ MPa}}$

Los esfuerzos a 40° del eje X son

Como $SC = CV\cos(80° - 2\theta)$, pero $\tan 2\theta = \dfrac{61{,}538}{46{,}112} \Rightarrow 2\theta = 53{,}15°$

Luego: $SC = (76{,}945)\cos(80° - 53{,}15°) \Rightarrow SC = 68{,}652$

Así $\quad \sigma = -28{,}61 - SC = -28{,}61 - 68{,}652$

$\Rightarrow \sigma = -97{,}26$ MPa $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma = -97{,}3 \text{ MPa}}$

Para el esfuerzo cortante

$\tau = -SV = -CV\text{sen}(80° - 2\theta) \Rightarrow \tau = -(76{,}945)\text{sen}(80° - 53{,}15°)$

$\boxed{\tau = -34{,}8 \text{ MPa}}$

968. Un estado de deformación está determinado por $\epsilon_x = -400 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = -600 \times 10^{-6}$. Si $E = 200 \times 10^9$ N/m² y $\nu = 0{,}30$; determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo.

Resolución:

Por la ley de Hooke: $\sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$

Así $\sigma_x = \dfrac{200 \times 10^9}{(1-0{,}30^2)}$ N/m² $(-400 \times 10^{-6} + 0{,}30(200 \times 10^{-6}))$

$\Rightarrow \sigma_x = -74{,}725$ MPa

Así $\sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$

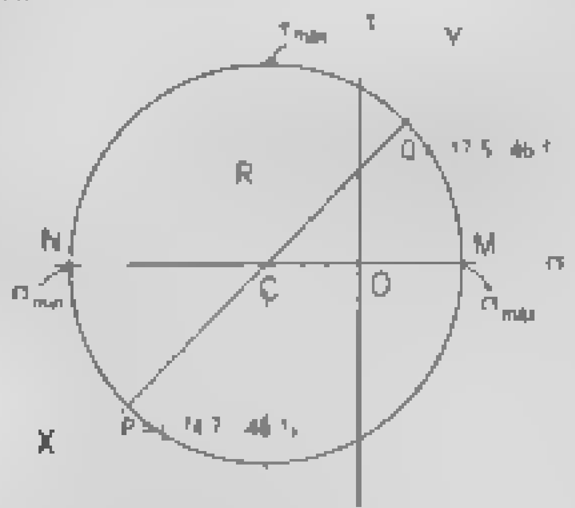
$\sigma_y = \dfrac{200 \times 10^9}{(1-0{,}30^2)}$ N/m² $(0{,}30(-400 \times 10^{-6}) + 200 \times 10^{-6})$

$\Rightarrow \sigma_y = 17{,}582$ MPa

$\tau_{xy} = \dfrac{E}{1+\nu}\dfrac{\gamma_{xy}}{2}$

$\tau_{xy} = \dfrac{200 \times 10^9}{(1+0{,}3)}$ N/m² $\dfrac{-600 \times 10^{-6}}{2} \Rightarrow \tau_{xy} = -46{,}154$ MPa

En el círculo de Mohr



Donde $C = \dfrac{1}{2}(P + Q)$, así $C = (-28{,}571;\ 0)$

El radio del círculo es: $R = NC = CM = PC = CQ$

$R = \sqrt{(17{,}5 + 28{,}57)^2 + (46{,}1)^2} \Rightarrow R = 65{,}271$

Así $\sigma_{máx} = M = -28{,}571 + R = (-28{,}571 + 65{,}271)$ MPa

$\boxed{\sigma_{máx} = 36{,}7 \text{ MPa}}$

Además

$\sigma_{mín} = N = -28{,}571 - R = (-28{,}571 - 65{,}271)$ MPa

$\boxed{\sigma_{mín} = -93{,}842 \text{ MPa}}$

y $\quad \tau_{máx} = R \Rightarrow$ $\boxed{\tau_{máx} = 65{,}271 \text{ MPa}}$

969 [illegible] deformación en un punto son ϵ_x [illegible] 800 × 10 [illegible] 5 E [illegible] 200 GN/m [illegible] y ν = 0,3 [illegible] las componentes de esfuerzo [illegible] forma un ángulo de +20° con el eje X.

Resolución

Por la ley de Hooke

- σ_x [illegible] $\frac{200\ GN/m^2}{1 - 0,3}$ $(-800\times10^{-6} + (0,3)(200\times10^{-6}))$

  ⇒ σ_x [illegible] MPa

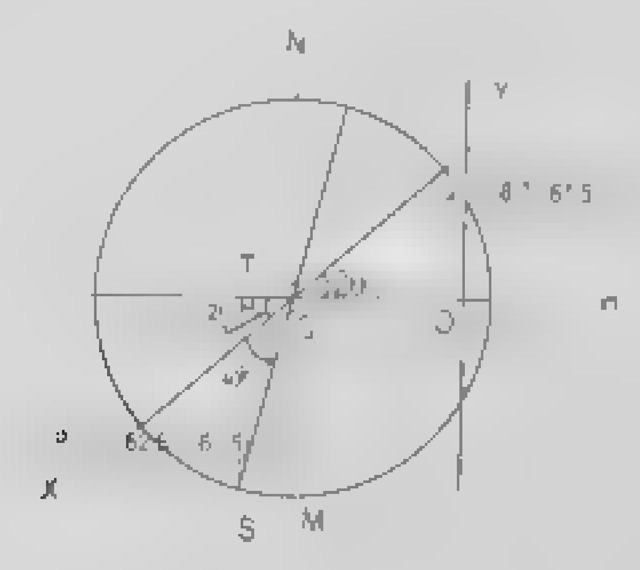
- σ_y [illegible] $(0,3 \times (-800\times10^{-6}) + 200\times10^{-6})$

  $\Rightarrow \sigma_y = -8,79\ MPa$

- $\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{200\ GN/m^2}{(1+0,3)}\left(\frac{-800\times10^{-6}}{2}\right)$

  $\Rightarrow \tau_{xy} = -61,54\ MPa$

En el círculo de Mohr



Donde $C = \frac{1}{2}(P + Q) \Rightarrow C = \frac{1}{2}(-162,64 - 8,79;\ 61,54 - 61,54)$

$\Rightarrow C = (-85,715,\ 0)$ ...(α)

Luego $\tan 2\theta = \frac{61,54}{8,79 - 85,715} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{61,54}{76,925}$

$\Rightarrow 2\theta = 38,66°$ ...(β)

El radio de la circunferencia es

$CQ = PC = \sqrt{(8,79 - 85,715)^2 + (61,54)^2}$

$\Rightarrow CQ = PC = 98,51$ ...(γ)

Los esfuerzos a + 20° del eje X es: (40° en el círculo de Mohr)

En el triángulo STC:

$\sigma = -85,715 - TC \Rightarrow \sigma = (-85,715 - SC\cos(2\theta + 40°))$

$\sigma = (-85,715 - (98,51)\cos(38,66° + 40°))\ MPa$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sigma = -105\ MPa}$

Además: $\tau = -SC\text{sen}(38,66° + 40°) = -(98,51)\text{sen}(78,66°)\ MPa$

$\boxed{\tau = -96,6\ MPa}$

970 Comprobar que para la roseta a 60°, son correctas las expresiones.

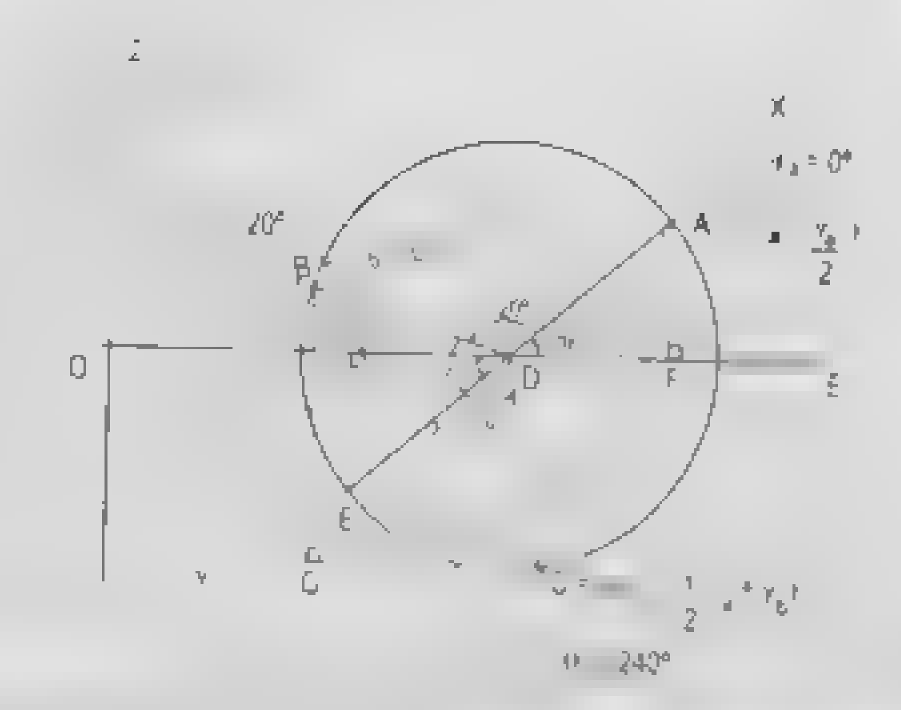
$\epsilon_x = \epsilon_a$

$\epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a)$

$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_c - \epsilon_b)$

Resolución:

Al medir las tres deformaciones ϵ_a, ϵ_b y ϵ_c donde $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 120°$ y $\theta_c = 240°$ en el círculo de Mohr tenemos la roseta de deformación



A... A B y C se form... equilátero. S... el ra... a circunferencia vale R el lado del triángulo equilátero vale $\sqrt{3}R$

El centro de la circunferencia es:

$$D = \frac{1}{3}(A + B + C) \Rightarrow D = \left(\frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c);\ 0\right)$$

Es decir: $D = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon ...)$ ...(1)

Por p... geométricas

DC ... 90 ...(2)

Si $\measuredangle ADF = 2\theta \Rightarrow \measuredangle HDE = \measuredangle CBG = 2\theta$ ...(3)

Así Δ DHE es semejante al Δ BGC, por lo tanto: $\frac{HE}{GC} = \frac{DE}{BC}$ ...(4)

y como $GC = \epsilon_c - \epsilon_b$ ...(5)

$DE = R$ ...(6)

$BC = \sqrt{3}R$ ...(7)

(5), (6), (7) en (4): $\overline{HE} = \frac{...}{\sqrt{3}}$ ...(8)

Pero como: $\Delta DHE = \Delta ADF \Rightarrow HE = AF$, siendo $AF = \frac{1}{2}(\gamma_s) = \frac{1}{2}(\gamma_{xy})$

Por lo tanto $\boxed{\frac{1}{2} ... \frac{1}{\sqrt{3}} ...}$

Además tenemos

$OF = OD + DF$ (α)

y $OH = OD - HD$ (β)

Por la igualdad de triángulos: $HD = DF$ (θ)

Sumando (α) con (β) y por (θ)

$OH + OF = 2OD$ (φ)

Así: $OH + \epsilon_a = \frac{2}{3}(...)$ o $OH = \frac{1}{3}(... \epsilon_a + 2\epsilon_b + 2\epsilon_c)$

Siendo $OH = \epsilon_y$, tenemos $\boxed{\epsilon_y = \frac{1}{3}(-\epsilon_a + 2\epsilon_b + 2\epsilon_c)}$

Por simple inspección: $\boxed{\epsilon_x = \epsilon_a}$

...1 Demostrar que, para la roseta a 60°, las deformaciones principales son.

$\epsilon_{máx/mín} = \frac{...}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{...}$

y la dirección de la deformación principal máxima queda definida por

$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(...)}{2...}$ en donde los valores positivos de θ se miden en sentido contrario al del reloj a partir de ϵ_a

Resolución:

El valor del radio del círculo de Mohr en el problema anterior es

$R^2 = DF^2 + AF^2$ (1)

Pero $DF = OF - OD \Rightarrow DF = \epsilon_a - \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c)$

$\therefore DF = \frac{1}{3}(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)$ (2)

y como $AF = \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_c - \epsilon_b)$ ...(3)

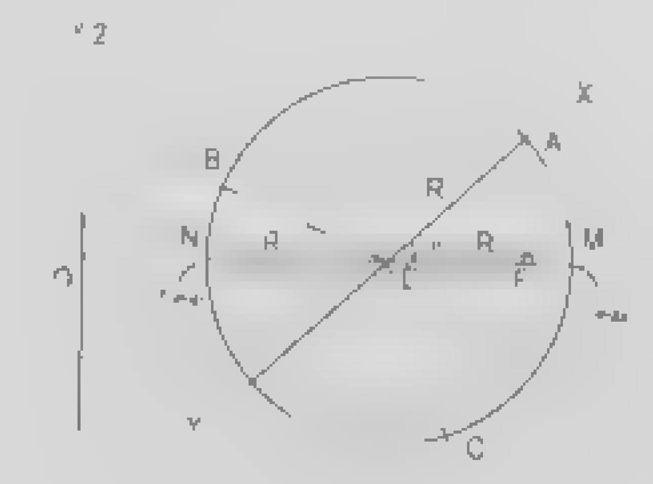
(2) y (3) en (1): $R^2 = \frac{1}{3^2}(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}^2}$ [illegible]

Operando y factorizando

$R^2 = \frac{4}{9}$ [illegible]

o $R = \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$ ...(4)

Vemos en el círculo de Mohr



Donde: $\epsilon_{máx} = OM = OD + DM \Rightarrow \epsilon_{máx} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) + R$

$\Rightarrow \epsilon_{máx} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) + \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\ldots}$

Además, $\epsilon_{mín} = ON = OD - ND \Rightarrow \epsilon_{mín} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) - R$

$\epsilon_{mín} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) - \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

El valor de la dirección medido hacia abajo es

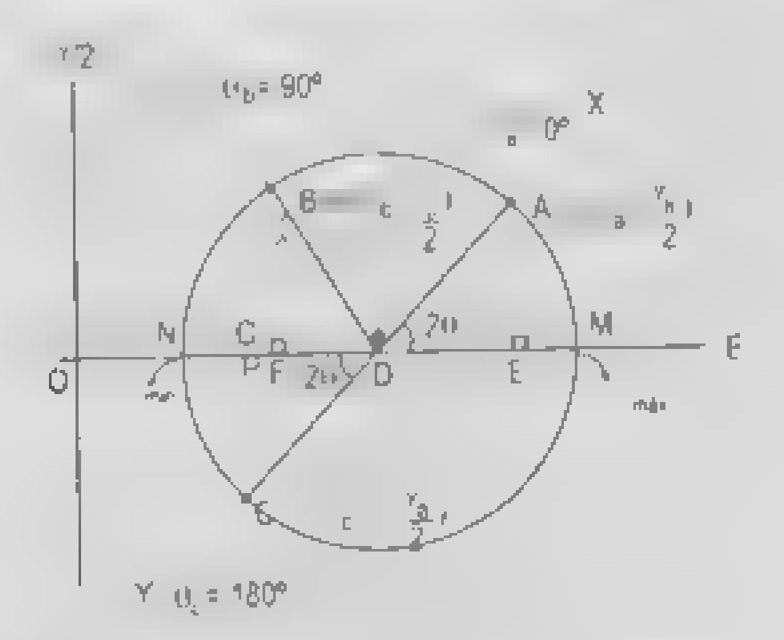
$\tan 2\theta = \frac{AF}{DF} \Rightarrow \tan 2\theta =$ [illegible]

Simplificando $\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}\ldots}{2\ldots}$ [illegible]

Demostrar que en la roseta a 45° las deformaciones principales vienen dadas por [illegible] y la dirección de la deformación principal máxima por $\tan 2\theta =$ [illegible]

Resolución

La roseta de deformaciones de 45° en el círculo de Mohr es



El valor del radio es del triángulo DAE: $R^2 = DE^2 + AE^2$

Y como $DE =$ [illegible] $AE =$ [illegible]

Así $R =$ [illegible]

Operando y agrupando convenientemente:

$R^2 = \frac{1}{2}((\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2) \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a \ldots)^2 \ldots)^2}$

En el círculo de Mohr

$\epsilon_{máx} = OM = OD + R$

$\epsilon_{máx} = \frac{[illegible]}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

También $\epsilon_{mín} = ON = OD - R$

$\epsilon_{mín} = \frac{[illegible]}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[illegible]}$

Vemos también que [illegible] del eje X al eje de la deformación principal: $\tan 2\theta = \frac{AE}{DE}$

Así $\tan 2\theta = \frac{[illegible]}{2}$ [illegible]

Nota: se toma [illegible] positivo es en sentido de las agujas de reloj

973 Las tres lecturas [illegible] en una roseta de deformación a 45° han sido $\epsilon_a = 400$, $\epsilon_b = -200$ y $\epsilon_c = -100$. Si E = 200 GPa y $\upsilon = 0{,}30$; determinar los esfuerzos principales

Resolución:

Hallando las deformaciones principales de la roseta a 45°

- $\epsilon_{máx} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - [illegible]}$

$\epsilon_{máx} = \frac{400 - 100}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(400-(-200))^2 + (-200-(-100))^2}$

$\epsilon_{máx} = 580 \times 10^{-6}$ ...(1)

- $\epsilon_{mín} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$\epsilon_{mín} = \frac{400 - 100}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(400 - (-200))^2 + (-200 - (-100))^2}$

$\epsilon_{mín} = -280 \times 10^{-6}$ ...(2)

- $\frac{1}{2}\gamma_{máx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[illegible]}$

$\frac{1}{2}\gamma_{máx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(400-(-200))^2 + (-200-(-100))^2}$

$\frac{1}{2}\gamma_{máx} = 430 \times 10^{-6}$ (3)

Hallando los esfuerzos principales.

- $\sigma_{máx} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_{máx} + \upsilon\epsilon_{mín})$

$\sigma_{máx} = \frac{(200)GPa}{1-(0,3)^2}(580 + (0,3)(-280)) \times 10^{-6} \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx} = 109\ MPa}$

- $\sigma_{mín} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_{máx} + \epsilon_{mín})$

$\sigma_{mín} = \frac{(200)GPa}{1-(0,3)^2}((0.3)(580) - 280) \times 10^{-6} \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{mín} = [illegible]3\ MPa}$

- $\tau_{máx} = \frac{E}{1+\upsilon} \times \frac{\gamma_{máx}}{2}$

$\tau_{máx} = \frac{200\ GPa}{1+0,3} \times 430 \times 10^{-6} \Rightarrow$ $\boxed{\tau_{máx} = 66,15\ MPa}$

El ángulo de desviación es: $\tan 2\theta = \frac{2[illegible]}{[illegible]}$

$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2(-200) - 400 - 100}{400 - 100} \Rightarrow \tan 2\theta = [illegible]$

$\Rightarrow 2\theta = -54,46° \Rightarrow \theta = -27,23° \Rightarrow$ $\boxed{\theta = -27,2°}$

974 Repetir el problema anterior, si $\epsilon_a = 300$, $\epsilon_b = 600$ y $\epsilon_c = 100$.

Resolución:

Hallando las deformaciones principales en la roseta a 45°

- $\epsilon_{máx} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$\epsilon_{máx} = \frac{300+100}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(300-600)^2 + (600-100)^2}$

$\epsilon_{máx} = 612 \times 10^{-6}$

- $\epsilon_{mín.} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$\epsilon_{mín.} = \frac{300+100}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(300-600)^2 + (600-100)^2}$

$\epsilon_{mín.} = -212 \times 10^{-6}$

- $\frac{1}{2}\gamma_{máx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$

$\frac{1}{2}\gamma_{máx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(300-600)^2 + (600-100)^2}$

$\frac{1}{2}\gamma_{máx} = 412 \times 10^{-6}$

Hallando los esfuerzos principales

- $\sigma_{máx} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_{máx} + \upsilon\epsilon_{mín})$

$\sigma_{máx} = \frac{200\ GPa}{1-0.3^2}(612 + (0.3)(-212)) \times 10^{-6}$

$\boxed{\sigma_{máx} = 120.5\ MPa}$ (1)

- $\sigma_{mín} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_{máx} + \epsilon_{mín})$

$\sigma_{mín} = \frac{200\ GPa}{1-0.3^2}((0.3)(612) - 212) \times 10^{-6}$

$\boxed{\sigma_{mín} = -6.2\ MPa}$ (2)

$\tau_{máx} = \frac{E}{1+\upsilon}\left(\frac{\gamma_{máx}}{2}\right) \Rightarrow \tau_{máx} = \frac{200\ GPa}{1+0.3}(412 \times 10^{-6})$

$\boxed{\tau_{máx} = 63.4\ MPa}$ (3)

La desviación angular del eje X al eje de la deformación principal

$\tan 2\theta = \frac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_a - \epsilon_c} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2(600) - 300 - 100}{300 - 100}$

Luego: $\tan 2\theta = 4 \Rightarrow 2\theta = 75.96° \Rightarrow \boxed{\theta = +37.98°}$

975 Las deformaciones en [illegible] registradas en una roseta a 60° han sido $\epsilon_a = 300$, $\epsilon_b = -400$ y $\epsilon_c = -100$. Con $E = 200\ GN/m^2$ y $v = 0.30$; calcular el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos principales.

Nota: para que salga la respuesta [illegible] 400×10^{-6}

Resolución

En la roseta a 60° las deformaciones máximas son: (Ver problema 971)

- $\epsilon_{máx} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) + \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$\epsilon_{máx} = \frac{1}{3}(300 - 400 + 100) + \frac{2}{3}\sqrt{300(300+400) - 400(-400-100) + 100(100-300)} \times 10^{-6}$

$\epsilon_{máx} = 416.3 \times 10^{-6}$

- $\epsilon_{mín} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) - \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$\epsilon_{mín} = \frac{1}{3}(300 - 400 + 100) - \frac{2}{3}\sqrt{300(300+400) - 400(-400-100) + 100(100-300)} \times 10^{-6}$

$\epsilon_{mín} = -416.3 \times 10^{-6}$

- $\frac{\gamma_{máx}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$\frac{\gamma_{máx}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{300(300+400) - 400(-400-100) + 100(100-300)} \times 10^{-6}$

$\frac{\gamma_{máx}}{2} = 416.3 \times 10^{-6}$

Hallando los esfuerzos principales.

- $\sigma_{máx.} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_{máx.} + \upsilon\epsilon_{mín.})$

$\sigma_{máx.} = \frac{200\ GPa}{1-0.3^2}(416,3 + 0,3(-416,3)) \times 10^{-6} \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx.} = 64,1\ MPa}$

- $\sigma_{mín} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_{máx.} + \epsilon_{mín.}) \Rightarrow \sigma_{mín.} = \frac{200\ GPa}{1-0.3^2}(0,3(416,3) - (416,3)) \times 10^{-6}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_{mín.} = -64,1\ MPa}$

- $\tau_{máx} = \frac{E}{1+\upsilon}\frac{\gamma_{máx}}{2}$

$\tau_{máx.} = \frac{200\ MPa}{1+0,3}(416,3 \times 10^{-6}) \Rightarrow$ $\boxed{\tau_{máx.} = 64,1\ MPa}$

La desviación angular al eje principal es

$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\epsilon_c - \epsilon_b)}{(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(-400-100)}{(2(300)-(-400)-100)}$

$\tan 2\theta = -0,962 \Rightarrow 2\theta = -43,898° \Rightarrow \theta = -21,95° \Rightarrow$ $\boxed{\theta = [illegible]}$

976 Una roseta a 60° aplicada en un punto de la envolvente de aluminio del [illegible] de un avión mide las siguientes deformaciones, en millonésimas

$\epsilon_a = 200$, $\epsilon_b = 200$ y $\epsilon_c = 400$. Si $E = 70\ GPa$ y $\upsilon = \frac{1}{3}$, calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo

Resolución:

Calculando las deformaciones principales:

- $\epsilon_{max} = \frac{1}{3}(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c) + \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

$\epsilon_{max} = \frac{200+200+400}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{200(200-200) + 200(200-400) + 400(400-200)} \times 10^{-6}$

$\epsilon_{máx} = 400 \times 10^{-6}$

- $\epsilon_{mín} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{[illegible]}$

$\epsilon_{mín} = [illegible]$

$\epsilon_{mín} = 133,3 \times 10^{-6}$

- $\frac{\gamma_{máx}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{[illegible]}$

$\frac{\gamma_{máx}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{200(200-200) + 200(200-400) + 400(400-200)} \times 10^{-6}$

$\frac{\gamma_{máx}}{2} = 133,3 \times 10^{-6}$

Hallando los esfuerzos principales

- $\sigma_{máx} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\epsilon_{máx} + \upsilon\epsilon_{mín.}) \Rightarrow \sigma_{máx} = \frac{70\ GPa}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}(400 + \frac{1}{3}(133,3)) \times 10^{-6}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_{máx} = 35\ MPa}$

$\sigma_{mín} = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\upsilon\epsilon_{máx.} + \epsilon_{mín}) \Rightarrow \sigma_{mín} = \frac{70\ GPa}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(\frac{1}{3}(400) + 133,3\right) \times 10^{-6}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_{mín} = 7\ MPa}$ [illegible]

- $\tau_{máx} = \frac{E}{1+\upsilon}\frac{\gamma_{máx}}{2} \Rightarrow \tau_{máx} = \frac{70\ GPa}{1+\frac{1}{3}}(133,3 \times 10^{-6})$

$\Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 7\ MPa}$

977 Repetir el problema anterior con $\epsilon_a = 100$, $\epsilon_b = 200 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_c = 400$ [illegible]

Resolución

Hallando las deformaciones principales

$\epsilon_{máx} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$

- $\epsilon_{máx} = \frac{100+200+400}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{100(100-200)+200(200-(-400))-400(-400-(-100)} \times 10^{-6}$

$\epsilon_{máx} = 246{,}4 \times 10^{-6}$

- $\epsilon_{min} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\ldots}$ [illegible]

$\epsilon_{min} = \frac{100+200-400}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\ldots}$ [illegible]

$\epsilon_{min} = -446{,}4 \times 10^{-6}$

- $\frac{\gamma_{máx}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{\ldots}$ [illegible]

$\frac{\gamma_{máx}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{100(100-200)+200(200-(-400))-400(-400-100)} \times 10^{-6}$

$\frac{\gamma_{máx}}{2} = 346{,}4 \times 10^{-6}$

Hallando los esfuerzos principales

- $\sigma_{máx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{máx} + \nu\,\epsilon_{min})$

$\sigma_{máx} = \frac{70\text{ GPa}}{1-\frac{1}{3^2}}\left(246{,}4 + \frac{1}{3}(-446{,}4)\right) \times 10^{-6} \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx} = 7{,}7\text{ MPa}}$

- $\sigma_{min} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\,\epsilon_{máx} + \epsilon_{min})$

$\sigma_{min} = \frac{70\text{ GPa}}{1-\frac{1}{3^2}}\left(\frac{1}{3} \times 246{,}4 - 446{,}4\right) \times 10^{-6}$

$\sigma_{min} = -28{,}69\text{ MPa} \Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{min} = -28{,}7\text{ MPa}}$

- $\tau_{máx} = \frac{E}{1+\nu}\,\frac{\gamma_{máx}}{2}$

$\tau_{máx} = \frac{70\text{ GPa}}{1+\frac{1}{3}} \times 346{,}4 \times 10^{-6} \Rightarrow$ $\boxed{\tau_{máx} = 18{,}19\text{ MPa}}$

La desviación angular al eje principal

$\tan 2\theta = \sqrt{3}\,\frac{(\epsilon_b - \epsilon_c)}{2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c}$

$\tan 2\theta = \sqrt{3}\,\frac{(200-(-400))}{2(100)-200-(-400)}$

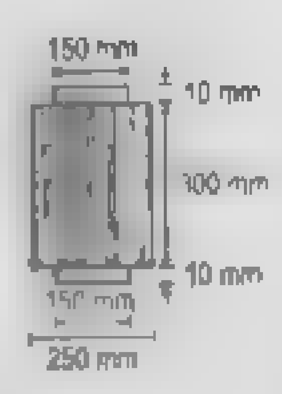
$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(600)}{0} \Rightarrow 2\theta = 90°$ $\boxed{\theta = 45°}$

CAPÍTULO 10

VIGAS REFORZADAS

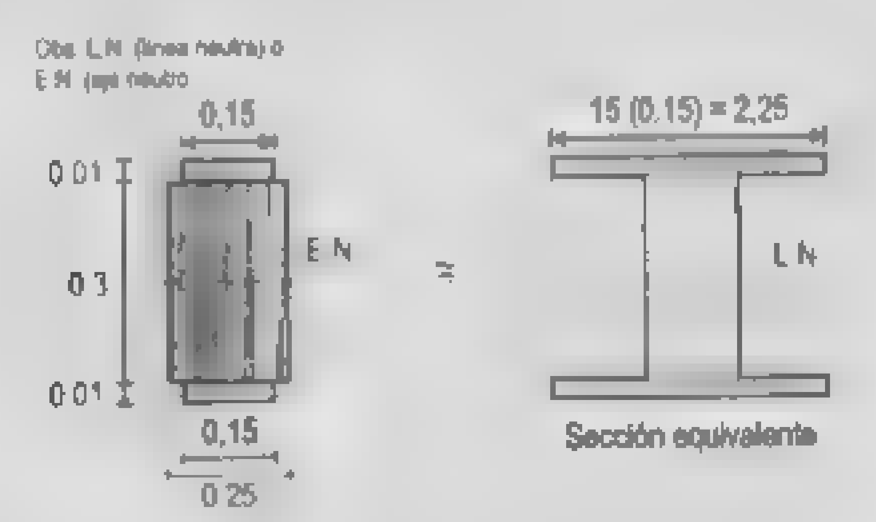
10.1. Problema ilustrativo.

1002 Una viga de madera se refuerza con dos placas de acero firmemente sujetas a las caras superior e inferior como se observa en la figura. Calcular el aumento de momento flexionante que puede resistir la viga, si $n = 15$ y los esfuerzos admisibles en el acero y en la madera son de 120 y 8 MPa, respectivamente.



Resolución:

Tenemos la sección transversal y su equivalente



El eje neutro pasa por la mitad de la sección.

$\bar{y} = 0.32/2 = 0{,}16$ m ; $y' = 0{,}3/2 = 0{,}15$ m (sólo madera)

El momento de inercia de la sección equivalente y de la sección considerando sólo la madera

$$I = \frac{1}{12}(2{,}25)(0.32)^3 - \frac{1}{12}(2{,}0)(0{,}3)^3 = 1644 \times 10^{-6}$$

$$I' = \frac{1}{12}(0{,}25)(0{,}3)^3 = 562{,}5 \times 10^{-6}$$

El momento que puede soportar la sección en función del esfuerzo admisible de la madera

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(8\times10^6)(1644\times10^{-6})}{0{,}16} = 82{,}2 \text{ kN m}$$

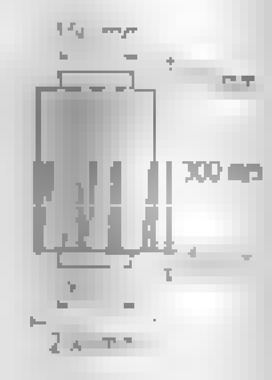
$$M' = \frac{\sigma I'}{y'} = \frac{(8\times10^6)(562{,}5\times10^{-6})}{0{,}15} = 30 \text{ kN m}$$

Incremento = M − M' = 82,2 − 30 ⇒ $M - M'$ [illegible] kN m

En la madera equivalente al acero, el esfuerzo máximo es

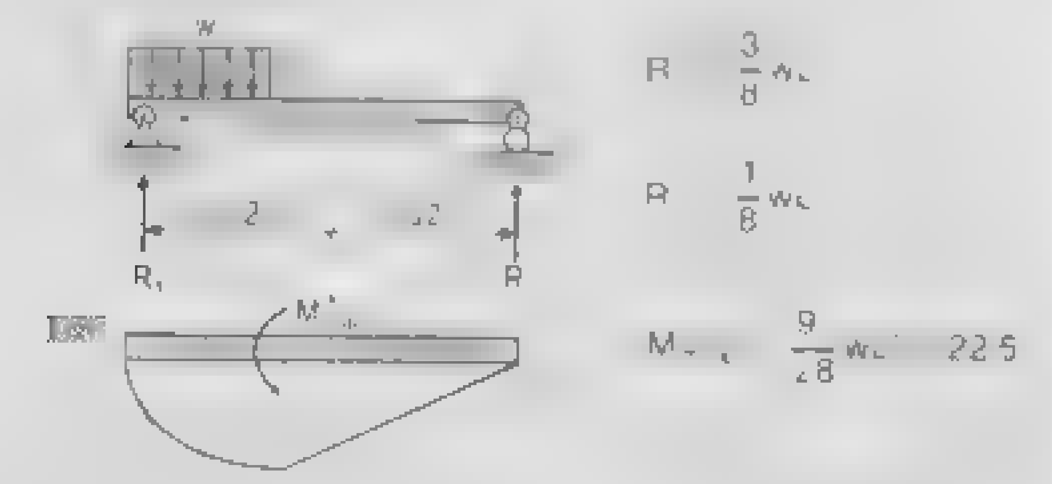
$$\sigma_m = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{120}{15} = 8 \text{ MPa}$$

1003 [illegible] de 4 m [illegible] sección recta representada en la figura. Soporta una carga uniformemente repartida de 20 kN/m sobre la mitad central del tramo. Si n = 15, calcular los esfuerzos máximos en la madera y el acero



Resolución

Del equilibrio tenemos



$R = \frac{3}{8} wL$

$R = \frac{1}{8} wL$

$M = \frac{9}{128} wL^2 = 22{,}5$

Calculamos el esfuerzo para la sección equivalente, además:

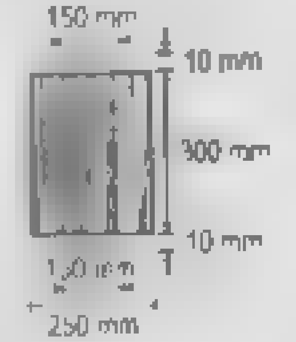
$I = 1644 \times 10^{-6}$; $y = 0{,}16$ m

$$\sigma_m = \frac{My}{I} = \frac{(22{,}5\times10^3)(0{,}16)}{1644\times10^{-6}} = 2{,}2 \text{ MPa}$$

El esfuerzo máximo en el acero

$\sigma_a = n\sigma_m = 15\,(2{,}2) = 33$ MPa ∴ $\boxed{\sigma_m = 2{,}2 \text{ MPa y } \sigma_a = 33 \text{ MPa}}$

1004 Repetir el problema 1002 si los refuerzos son de aluminio, con un esfuerzo admisible de 80 MN/m² y n = 5.



Resolución:

Tenemos la sección equivalente

$\sigma_m = 8$ MPa , $\sigma_a = 80$ MPa , n = 5

Calculamos el momento de inercia de la sección equivalente

$$I = \frac{1}{12}(0{,}75)(0{,}32)^3 - \frac{1}{12}(0{,}25)(0{,}3)^3 = 1485{,}5\times10^{-6}$$

$I' = 562{,}5\times10^{-6}$ (ver P-1002)

El momento que puede soportar la sección en función del esfuerzo admisible de la madera

$$M_m = \frac{\sigma_m I}{y} = \frac{(8\times10^6)(1485{,}5\times10^{-6})}{0{,}16} = 74{,}3 \text{ kN m}$$

$$M'_m = \frac{\sigma_m I'}{y'} = \frac{(8\times10^6)(562{,}5\times10^{-6})}{0{,}15} = 30 \text{ kN.m}$$

En la madera equivalente al aluminio, el esfuerzo máximo es.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{80}{5} = 16 \text{ MPa}$$

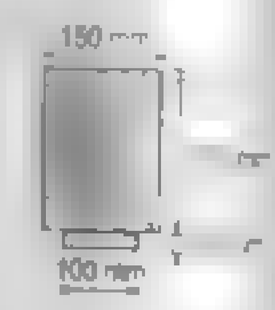
El momento correspondiente al esfuerzo admisible en el acero es

$$M_a = \frac{(16\times10^{6})(1485{,}5\times10^{-6})}{16} = 148.6$$

El menor valor de los dos obtenidos. $M_m = 74{,}3$ kN m

Luego el incremento es inc. $= M_m - M = 74{,}3 - 30 =$ $\boxed{44\ 3\ \text{MPa}}$

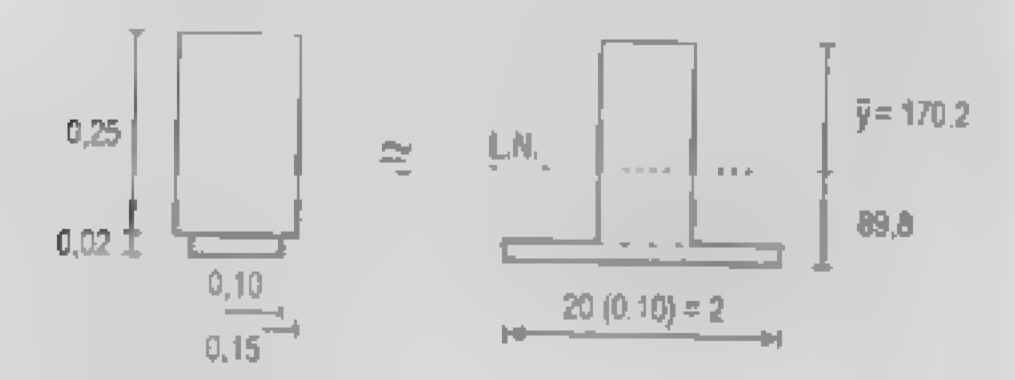
1005. Una viga de madera simplemente apoyada, de 150 × 250 mm de sección, se refuerza solamente en su parte inferior con [illegible] a carga concentrada que puede aplicarse en el centro de un tramo de 6 m si $n = 20$. $\sigma_a \leq 120$ MPa y $\sigma_m \leq 8$ MPa. Comprobar que la línea neutra queda a 170,2 mm por debajo del borde superior de la viga y que $I_{LN} = 416 \times 10^{6}$ mm⁴



Resolución:

Para un tramo simplemente apoyado con una carga al centro es
$M = PL/4 = 1{,}5P$; $(L = 6$ m$)$

Además tenemos la sección equivalente y $n = 20$; $\sigma_a \leq 120$; MPa $\sigma_m \leq 8$ MPa



Calculamos la ubicación de la línea neutra

$$\bar{y} = \frac{2(0.26)(0{,}13) - 1{,}85(0.25)(0.125)}{2(0.26) - 1.85(0.25)}$$

$\bar{y} = 0{,}1702$ m $= 170{,}2$ mm

$I = \frac{1}{3}(0{,}26)... - \frac{1}{3}(1{,}85)(0{,}25)... + 2\times0{,}26 ... 85\times0{,}2 ... 02 ... = 416\times10^{-6}$

En la madera equivalente al acero, el esfuerzo máximo es

$$\sigma = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{120}{20} = 6\ \text{MPa}$$

El esfuerzo admisible en la madera.

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{1{,}5P(0{,}1702)}{416\times10^{-6}} \leq 8\times10^{6} \quad \therefore\ P \leq 13\ \text{kN}$$

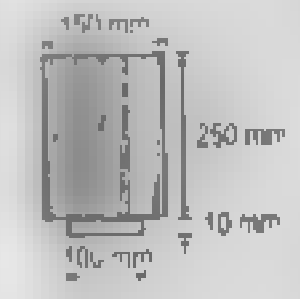
El esfuerzo correspondiente al esfuerzo admisible en el acero

$$\sigma = \frac{My'}{I} = \frac{1{,}5P(0{,}0898)}{416\times10^{-6}} \leq 6\times10^{6}$$

$P \leq 18{,}5$ kN

$\Rightarrow$ $\boxed{P = 13\ \text{kN}}$

1006. Determinar el ancho b de la placa de acero de 10 mm con que ha de reforzarse por su parte inferior la viga de la figura para que se alcancen, al mismo tiempo, en la madera y en el acero los esfuerzos admisibles de 8 y 120 MN/m², respectivamente.



Resolución:

Tenemos

$$\sigma_m = 8\ \text{MPa} \ ; \ \sigma_{m'} = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{120}{20} = 6\ \text{MPa}$$

Además sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_m = \dfrac{My}{I} = 8 \\ \sigma_{m'} = \dfrac{My'}{I} = 6 \end{array}\right\} \ y' = \frac{3}{4}y \quad \text{(I)} \qquad \text{También sabemos } y' + y = 0{,}26 \quad \text{...(II)}$$

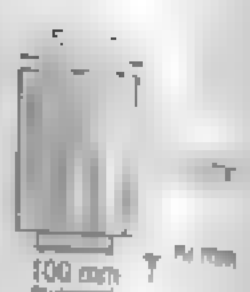
De (I) y (II): $y = 0{,}1486$ m ; $y' = 0{,}1114$ m

Calculamos b: de la geometría.

$$y = \frac{20b(0{,}26)(0{,}13) - 20b(0{,}15)(0{,}25)(0{,}125)}{(20b)(0{,}26) - 20b(0{,}15)(0{,}25)} = \frac{0{,}05b + 0{,}0046875}{0{,}2b + 0{,}0375} = 0{,}1486$$

$b = 0{,}0416$ m $\qquad \boxed{b = 41{,}6\ \text{mm}}$

1007 Una viga simplemente apoyada sobre un tramo de 6 m soporta una carga uniformemente repartida de ... kN/m. La sección recta es la representada en la figura (n = 20), calcular los esfuerzos máximos en la madera y en el acero. La carga incluye su peso propio.



Resolución:

El momento máximo para una viga simplemente apoyada con carga uniforme

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{4 \quad L}{8} = 18 \text{ kN.m}$$

Para la sección tenemos: y = 170,2 mm = 0,1702 m , I = 416 × 10⁻⁶ mm⁴

Calculamos el esfuerzo máximo en la madera

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{18 \times 10^3 \ldots}{416 \times 10^{-6}} = 7{,}4 \text{ MPa}$$

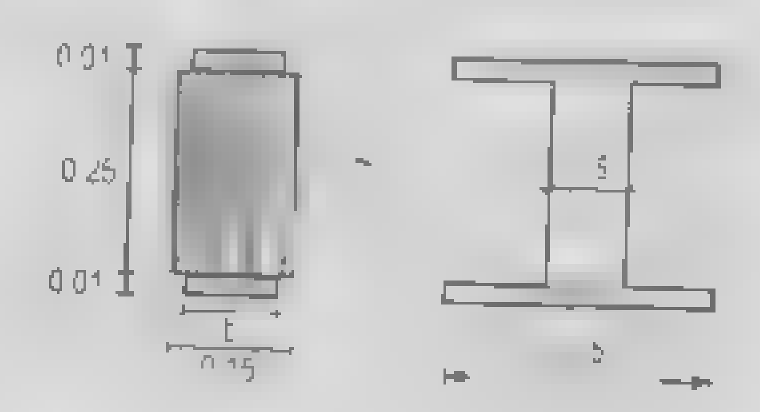
$$\sigma_m' = \frac{My'}{I} = \frac{(18 \times 10^3)(0.0898)}{416 \times 10^{-6}}$$ [illegible]

Esfuerzo máximo en el acero

$$\sigma_a = n\sigma_m = 20(3.9) \Rightarrow \boxed{\sigma_a = 78 \text{ MPa}}$$

1008 Una viga de madera de 150 × 250 mm se refuerza con placas de acero de 10 mm de espesor en las caras superior e inferior. Calcular la anchura que deban tener los refuerzos si la viga soporta un momento máximo de 50 kN.m y los esfuerzos admisibles son de 8 y ... MPa en la madera y el acero respectivamente. ... n = 15

Resolución:



Calculamos el momento de inercia

$$I = \frac{1}{12}(15b)(0{,}27)^3 - \frac{1}{12}(15b - 0{,}15)(0{,}25)^3 = (5072{,}5\,b + 195{,}3125) \times 10^{-6}$$

El esfuerzo en la madera correspondiente al esfuerzo admisible del acero

$$\sigma_m' = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{110}{15}$$

El esfuerzo en la sección equivalente

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(50 \times 10^3)(0{,}27/2)}{(5072{,}5b + 195{,}3125) \times 10^{-6}} = \frac{110}{15} \times 10^6$$

$$\boxed{b = 0{,}143 \text{ m} = 143 \text{ mm}}$$

1009 Una viga de madera de 150 × 200 mm se refuerza en sus caras superior e inferior con placas de aluminio de 6 mm de espesor. Calcular su anchura si la viga ha de soportar un momento flexionante de 16 kN.m. Se considerará n = 5 y los esfuerzos admisibles 8 y 70 MN/m² en la madera y el aluminio, respectivamente.

Resolución:

Siguiendo el procedimiento del problema anterior

Calculamos el momento de inercia.

$$I = \frac{1}{12}(5b)(0{,}212)^3 - \frac{1}{12}(5b - 0.15)(0{,}2)^3 = (636.72b + 100) \times 10^{-6}$$

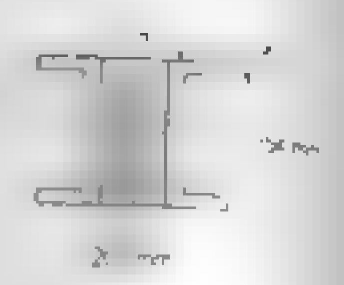
El esfuerzo máximo en la madera correspondiente al esfuerzo admisible del aluminio

$$\sigma_m' = \frac{\sigma_{Al}}{n} = \frac{70}{5} = 14 \text{ MPa}$$

El esfuerzo en la sección equivalente

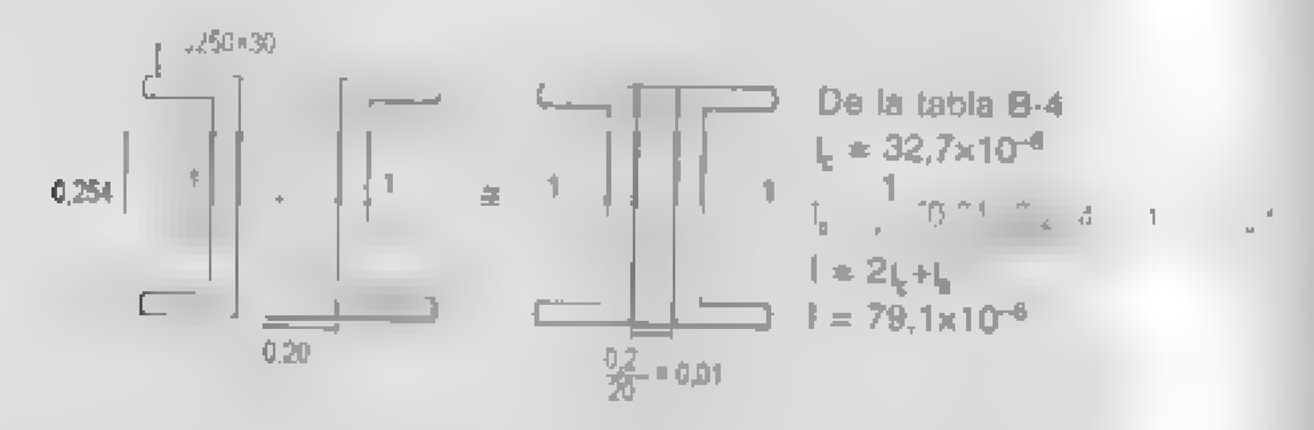
$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(16 \times 10^3)(0{,}20/2)}{(636.72b + 100) \times 10^{-6}} = 8 \times 10^6 = 0{,}157 \Rightarrow \boxed{b = 157 \text{ mm}}$$

1010. Un par de perfiles C250 × 30 están firmemente atornillados a una viga de madera de 220 × 254 mm, com... la flexión tiene lugar respecto del eje 1 ... determinar el momento máximo que puede soportar si los esfuerzos admisibles son σ_a = 120 MPa y σ_m = 8 MPa. Se considerará n = 20. (El peralte de los canales es también de 254 mm).



Resolución:

Para este caso, por facilidad, transformamos la madera en acero. Además n = 20



De la tabla B-4

I_c = 32,7×10^{-6}

$I_b = \frac{1}{12}(0,01)(0,254)^3$ ...

I = 2I_c+I_b

I = 79,1×10^{-6}

Calculamos el esfuerzo del acero para el esfuerzo máximo admisible de la madera

σ_a = nσ_m = 20 × 8 = 160 MPa > σ_a ¡no!

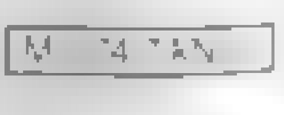
Además σ_a = 120 MPa (controla)

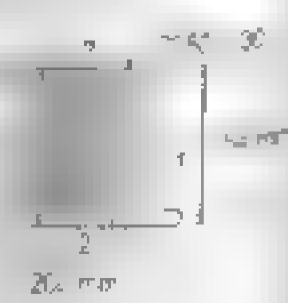
El momento que puede soportar la sección equivalente de acero en función del esfuerzo admisible del acero

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(120\times10^6)(79{,}1\times10^{-6})}{(0.254/2)} = 74{,}7\ \text{kN.m}$$

M = 74,7 kN.m

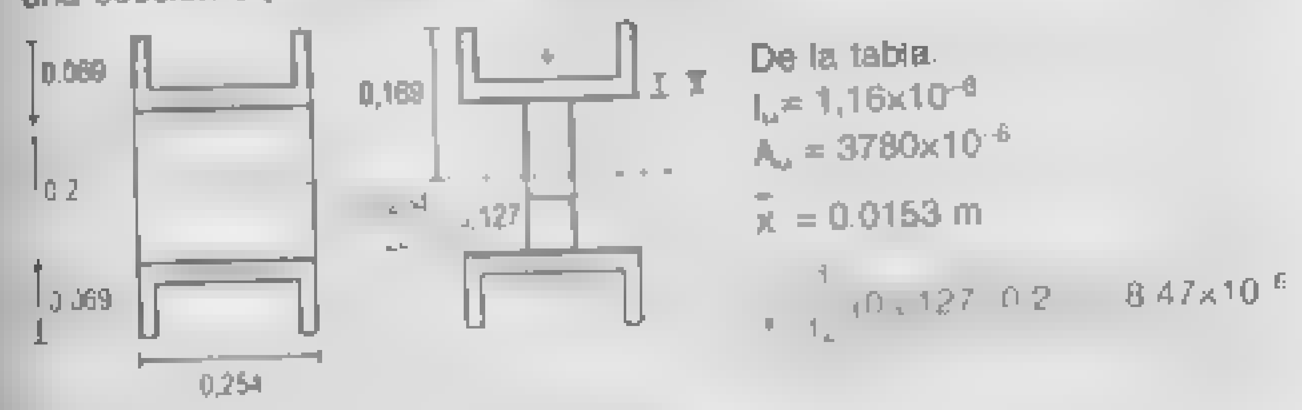
1011 Repetir el problema 1010 si la flexión tiene lugar con respecto al eje 2-2, es decir, en el plano horizontal.





Resolución:

La flexión tiene lugar con respecto al eje 2-2. Transformamos la sección en una sección equivalente de acero



De la tabla.

I_o = 1,16×10^{-6}

A_c = 3780×10^{-6}

$\bar{x}$ = 0.0153 m

$I_b = \frac{1}{12}(0{,}127)(0{,}2)^3$ = 8.47×10^{-6}

La inercia de la sección equivalente

I = 8.47 × 10^{-6} + 2[1.16 × 10^{-6} + (3.78 × 10^{-3})(0.1153)^2] = 108.97 × 10^{-6} m^4

El momento que puede soportar la sección equivalente de acero en función del esfuerzo admisible del acero

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(120\times10^6)(108.97\times10^{-6})}{0.169} \Rightarrow M = 77{,}4\ \text{kN.m}$$

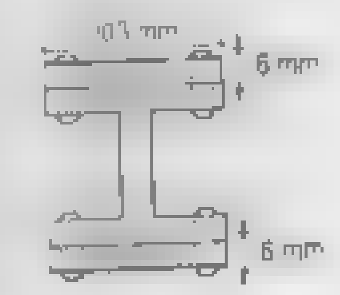
El momento que puede soportar la sección equivalente en función del esfuerzo admisible de la madera

$$M = \frac{(n\sigma)I}{y} = \frac{(20\times8\times10^6)(108.97\times10^{-6})}{0{,}10} = 174{,}3\ \text{kN m}$$

El momento que puede soportar es el menor valor obtenido

M = 77,4 kN.m

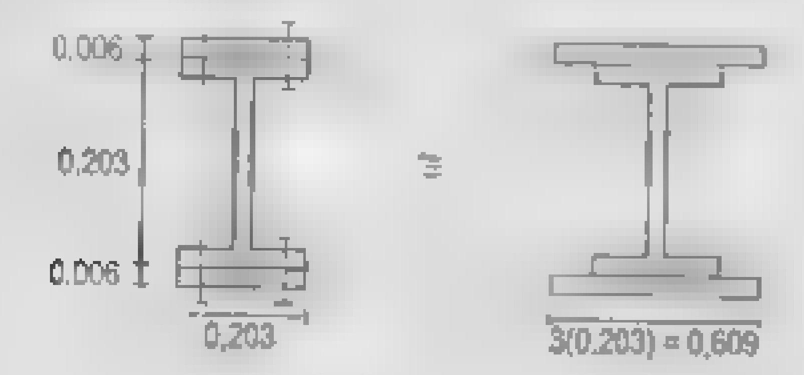
1012 Un perfil de aluminio de las mismas dimensiones que un perfil W200 × 46 de sección, se refuerza remachando a sus alas unas placas de acero de 6 mm de espesor y 203 mm de anchura, como indica la figura. Los esfuerzos admisibles en el aluminio y en el acero son de 100 y 140 MPa, respectivamente, y la relación E_a/E_{Al} = 3. Determinar (a) el incremento de resistencia del perfil original de aluminio, en tanto por ciento del perfil aislado, y (b) el tanto por ciento de incremento de la rigidez E



Resolución.

Transformamos la sección reforzada en una sección equivalente

$n = 3$, $\sigma_{Al} \le 100$ MPa , $\sigma_a \le 140$ MPa



De la tabla tenemos para el perfil W200 × 46: $I_w = 45{,}5 \times 10^{-6}\ m^4$

El momento de inercia para la sección equivalente

$$I = 45{,}5 \times 10^{-6} + 2\left[\frac{1}{12}(0{,}609)(0{,}006)^3 + (0{,}609)(0{,}006)(0{,}203/2 \ldots\right]$$

$$I = 125{,}3 \times 10^{-6}\ m^4$$

El momento que puede soportar la sección equivalente de aluminio sin exceder el esfuerzo admisible del aluminio

$$M = \frac{\sigma_{Al} I}{y} = \frac{(100 \times 10^6)(125{,}3 \times 10^{-6})}{(0{,}203/2)} = 123{,}5\ kN.m$$

Solo la sección W200 × 46

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(100 \times 10^6)(45{,}5 \times 10^{-6})}{(0{,}203/2)} = 44{,}8\ kN.m$$

El momento que puede soportar la sección equivalente sin exceder el esfuerzo admisible del acero

$$M = \frac{\frac{\sigma_a}{n} I}{y} = \frac{(140 \times 10^6 / 3)(125{,}3 \times 10^{-6})}{(0{,}203/2 + 0{,}006)} = 54{,}4\ kN.m$$

Tomamos el menor: $M = 54{,}4$ kN.m

(a) Calculamos el incremento de resistencia

$$\frac{54{,}4 - 44{,}8}{44{,}8} \qquad \boxed{(\%)_R = 21{,}4\%}$$

(b) Calculamos el incremento de la rigidez

$$(\%)\,I_i = \frac{125{,}3 - 45{,}5}{45{,}5} \Rightarrow \boxed{(\%)I_i = 175\%}$$

1013. Una viga maciza de acero, de 50 mm de diámetro, está protegida contra la corrosión mediante una capa de aluminio de 6 mm de espesor, firmemente unida a ella. Calcular el momento flexionante máximo que puede soportar la sección compuesta si $\sigma_a \le 102$ MPa, $\sigma_{Al} \le 100$ MPa y $E_{ac}/E_{Al} = 3$.

Resolución:

Para [illegible] sección equivalente de acero

$$I_a = \frac{\pi}{4}(r)^4 = \frac{\pi}{4}(0{,}025)^4 = 3068 \times 10^{-10}$$

$$I_{Al} = \frac{\pi}{4}(1/n)(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4}(1/3)((0{,}031)^4 - (0{,}025)^4) = 1395 \times 10^{-10}\ m^4$$

$$I_a + I_{Al} = 4463 \times 10^{-10}\ m^4$$

Calculamos el momento resistente considerando el esfuerzo admisible de acero

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{(12 \ldots)(4463 \times 10^{-10})}{0{,}025} = 214\ N.m$$

Calculamos el momento resistente en función del esfuerzo admisible de aluminio

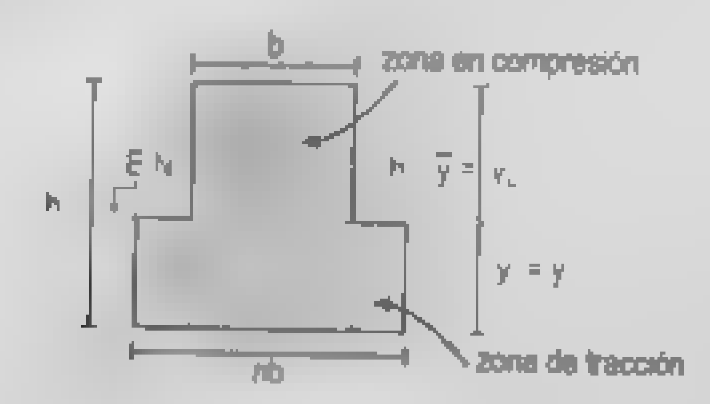
$$M = \frac{(n\sigma_{Al})(I)}{y'} = \frac{(3 \times 100 \times 10^6)(4463 \times 10^{-10})}{0{,}31} = 432\ N.m$$

Escogemos el menor valor de momento. $\boxed{M = 214\ N.m}$

1014. Una sección rectangular de 150 mm de anchura por 250 mm de altura soporta un momento flexionante de 140 kN.m. El material de la viga no es isótropo, y su módulo elástico a tensión es el doble del módulo a compresión. Calcular los esfuerzos máximos de tensión y de compresión en la viga

Resolución:

Del enunciado tenemos. $E_t = 2E_c$, de donde $n = 2$



Para determinar la ubicación del E N. tomamos momentos en el E N

$\Sigma(ay) = 0$: $b(h - \bar{y})^2/2 - nb(\bar{y})^2/2 = 0$

Reemplazando los datos y operando:

$15(25 - \bar{y})^2/2 - 2(15)(\bar{y})^2/2 = 0$

$\bar{y}^2 + 50\bar{y} - 625 = 0 \Rightarrow \bar{y} = 25(\sqrt{2} - 1) = 10{,}35$ cm

De donde

$y_t = \bar{y} = 10{,}35$ cm, $y_c = h - \bar{y} = 25 - 10{,}35 = 14{,}65$ cm

Calculamos el momento de inercia

$$I_{E.N.} = \frac{1}{3}(nb)(y_t)^3 + \frac{1}{3}(b)(y_c)^3$$

$$I_{E.N.} = \frac{1}{3}(2 \times 15)(10{,}35)^3 + \frac{1}{3}(15)(14{,}65)^3 = 26\,800 \text{ cm}^4 \Rightarrow I_{E.N.} = 268 \times 10^{-6}$$

Como paso final calculamos los esfuerzos:

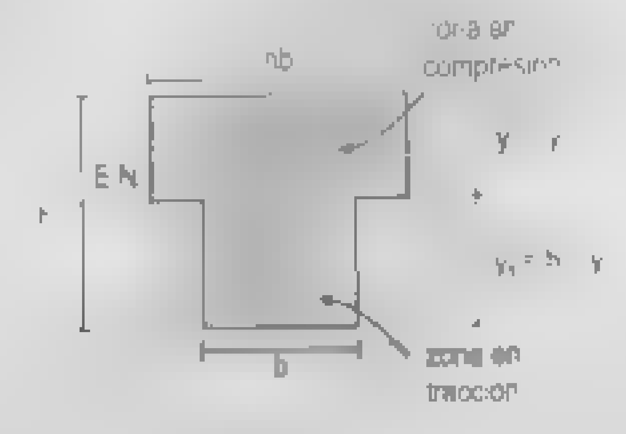
$$\sigma_c = \frac{My_c}{I} = \frac{(140 \times 10^3)(14{,}65 \times 10^{-2})}{268 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 76{,}5 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_t = \frac{nMy_t}{I} = \frac{2(140 \times 10^3)(10{,}35 \times 10^{-2})}{268 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_t = 108 \text{ MPa}}$$

1015. Resolver el problema 1014 si el módulo elástico a compresión es 1,5 veces mayor que a tensión

Resolución:

Del enunciado tenemos: $E_C = 1{,}5E_t \Rightarrow n = 1{,}5$



Determinamos la ubicación del E.N., sabemos que

$\Sigma(ay) = 0$: $b(h - \bar{y})^2/2 - nb\bar{y}^2/2 = 0$

Reemplazando los valores de los datos

$150(250 - \bar{y})^2/2 - 1{,}5(150)(\bar{y})^2/2 = 0$

Operando:

$\bar{y}^2 + 1000\bar{y} - 125\,000 = 0 \Rightarrow \bar{y} = 250(\sqrt{6} - 2) = 112{,}5 \text{ mm} = 0{,}1125$ m

$y_c = \bar{y} = 112{,}5$ mm $y_t = h - \bar{y} = 250 - 112{,}5 = 137{,}5$ mm

Calculamos el momento de inercia al E N

$$I_{E.N.} = \frac{1}{3}(nb)(y_c)^3 + \frac{1}{3}(b)(y_t)^3$$

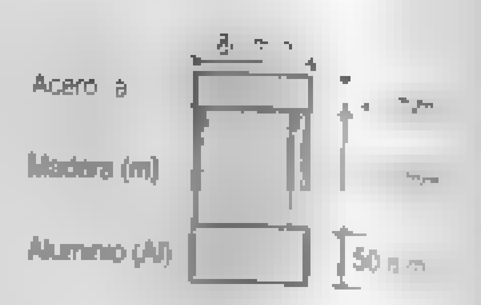
$$I_{E.N.} = \frac{1}{3}(1{,}5 \times 150)(112{,}5)^3 + \frac{1}{3}(150)(137{,}5)^3 = 237 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 237 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Para finalizar calculamos los esfuerzos

$$\sigma_c = \frac{nMy_c}{I} = 1{,}5\frac{(140 \times 10^3)(112{,}5 \times 10^{-3})}{237 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 99{,}8 \text{ MPa}}$$

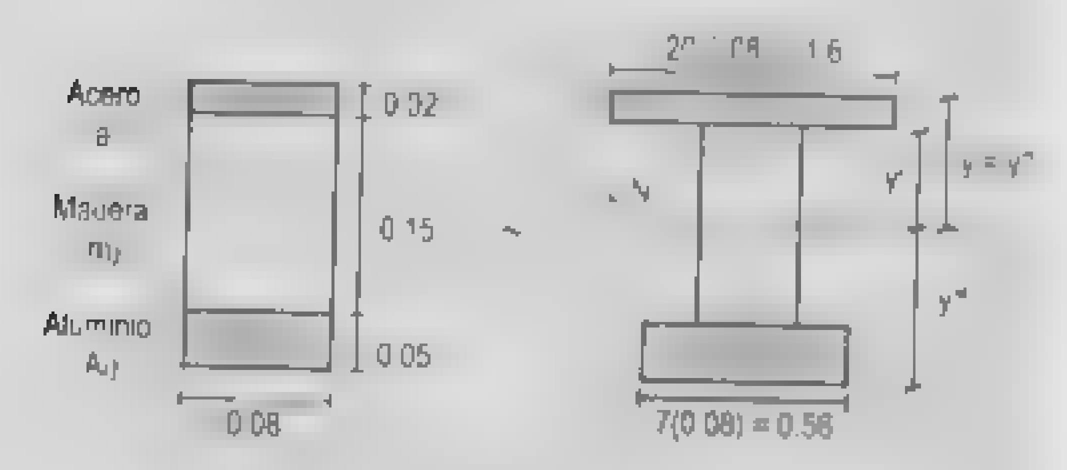
$$\sigma_t = \frac{My_t}{I} = \frac{(140 \times 10^3)(137{,}5 \times 10^{-3})}{237 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_t = 81{,}2 \text{ MPa}}$$

1016. Una viga experimental está compuesta de tres materiales como se observa en la figura. Las tres partes se hallan firmemente unidas entre sí de manera que no existe posibilidad de deslizamiento entre ellas. Determinar el momento de seguridad que pueden soportar si los esfuerzos admisibles son $\sigma_a = 120$ MN/m², $\sigma_{Al} = 80$ MN/m², y $\sigma_m = 10$ MN/m², y los módulos elásticos $E_a = 200$ GN/m², $E_{Al} = 70$ GN/m² y $E_m = 10$ GN/m²



Resolución:
La sección la transformamos a una sección equivalente en madera

$$n_1 = \frac{E_{Al}}{E_m} = \frac{70}{10} = 7 \qquad n_2 = \frac{E_a}{E_m} = \frac{200}{10} = 20$$



Calculamos la ubicación de la línea neutra

$$A = 1.6(0.02) + 0.08(0.15) + 0.56(0.05) = 0.072$$

$$\bar{y} = \frac{0.032(0.01) + 0.012(0.095) + (0.028)(0.195)}{0.072} = 0{,}096 \text{ m}$$

Calculamos el momento de inercia

$$I = \frac{1}{12}(1.6)(0.02)^3 + 0.032(0.096-0.01)^2 + \frac{1}{12}(0.08)(0.15)^3 +$$

$$0{,}012(0{,}096-0{,}195)^2 + \frac{1}{12}(0.56)(0.05)^3 + 0.028(0.096-0.195)^2$$

$= 540.5\times10^{-6}$ m⁴

Calculamos el momento resistente de la sección equivalente considerando el esfuerzo admisible de la madera

$$M = \frac{\sigma_m I}{y} = \frac{(10\times10^6)(540.5\times10^{-6})}{(0.096-0.02)} = 71{,}1 \text{ kN.m}$$

Considerando el esfuerzo admisible del acero

$$M = \frac{(\sigma_a/n_2)I}{y'} = \frac{(120\times10^6/20)(540.5\times10^{-6})}{(0.096)} = 33.8 \text{ kN.m}$$

Considerando el esfuerzo admisible del aluminio.

$$M = \frac{(\sigma_{Al}/n_1)I}{y''} = \frac{(80\times10^6/7)(540.5\times10^{-6})}{(0.22-0.096)} = \ldots \text{ kN.m}$$

Tomamos el momento menor $\boxed{M = 33.8 \text{ kN.m}}$

1017. En ... es 14 ... mm para cada material. Las dimensiones verticales son: 20 mm para el acero, 150 mm para el aluminio y 50 mm para el bronce. Suponiendo que los materiales están firmemente unidos, calcule el máximo esfuerzo en cada material cuando la sección resista un momento flexionante de 70 kN.m si $E_a = 200$ GPa, $E_{Al} = 70$ GPa y $E_b = 80$ GPa

Resolución
Seguimos un procedimiento similar al problema anterior, transformamos en una sección equivalente de aluminio

$$n_1 = \frac{E_a}{E_{Al}} = \frac{200}{7} = \frac{20}{7} \qquad n_2 = \frac{E_b}{E_{Al}} = \frac{80}{7} = \frac{8}{7}$$

Calculamos la ubicación de la línea neutra
Usamos una tabla

Zona	b	h	A	y	$A\bar{y}' \times 10^{-6}$	$I = \frac{bh^3}{12}$	$A(\bar{y}' - \bar{y})^2$
I	0.4	0.02	0.008	0.01	[illegible]	0.27	61.9[illegible]
II	0.14	0.15	0.021	0.095	1995	39.38	0.19
III	0.16	0.05	0.008	0.195	1560	1.66	75.[illegible]
Σ			0.037		3635	41.31	137.41

De la tabla

$A = 0.037\ m^2$

$$\bar{y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A'} = \frac{3\,635 \times 10^{-6}}{0.037} = 0{,}098\ m$$

$$I = \sum I' + \sum A(\bar{y}' - \bar{y})^2 = 41{,}3 \times 10^{-6} + 137{,}41 \times 10^{-6} = 178{,}7 \times 10^{-6}\ m^4$$

Calculamos el esfuerzo máximo, en cada material, para el momento de 70 kN m

I. En el aluminio: $y = 0.098 - 0.02 = 0.078\ m$

$$\sigma_A = \frac{My}{I} = \frac{(70 \times 10^3)(0.078)}{178{,}7 \times 10^{-6}} = 30{,}5\ MPa$$

II. En el acero: $y = \bar{y} = 0.098\ m$

$$\sigma_{ac} = \frac{n_1 My}{I} = \frac{(20/7)(70 \times 10^3)(0.098)}{178{,}7 \times 10^{-6}} = 109.7\ MPa$$

III. En el bronce. $y = 0{,}22 - 0.098 = 0.122\ m$

$$\sigma_b = \frac{n_2 My}{I} = \frac{(8/7)(70 \times 10^3)(0{,}122)}{178.7 \times 10^{-6}} = 54.6\ MPa$$

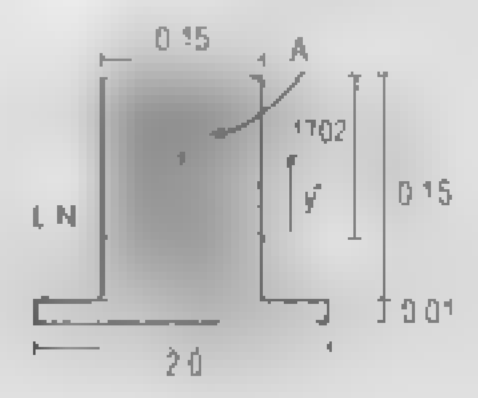
Resumen

$\boxed{\sigma_{Al} = 30.5,\ \sigma_a = 109.7,\ \sigma_b = 54{,}6\ MPa}$

1018. Calcular la fuerza cortante vertical admisible en una viga que tiene la sección recta del problema 1005, si n = 20 y el esfuerzo cortante máximo ha de ser de 800 kN/m^2

Resolución:

De la sección equivalente del problema 1005 tenemos



Calculamos Q

$A = (0{,}15)(0{,}1702) = 0.02553\ ,\ \bar{y}' = 0.1702/2 = 0{,}0851$

$\Rightarrow Q = A'\bar{y}' = 2172{,}6 \times 10^{-6}$

También se conoce $I = 416 \times 10^{-6}\ m^4$

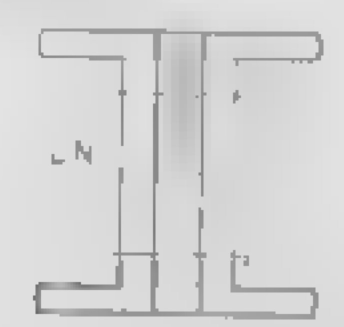
$$\tau = \frac{V}{It}Q = \frac{V}{(416 \times 10^{-6})(0{,}15)}(2172.6 \times 10^{-6}) \le 800 \times 10^3$$

$V \le 23\ kN \Rightarrow \boxed{V = 23\ kN}$

1019. En una viga de sección igual a la representada en el problema 1010, se supone que los perfiles en U están unidos a la madera por dos filas de tornillos de 20 mm, espaciados 30 mm y situados (las dos filas) a 75 mm arriba y abajo de la línea 1-1. Considerando n = 20, calcular el esfuerzo cortante en los tornillos producido por una carga puntual de 80 kN aplicada en el centro de un claro de 3 m (viga simplemente apoyada) si el pandeo tiene lugar respecto de (a) el eje 1-1 horizontal y (b) el eje 2-2 vertical

Resolución:

Para la parte (a) tenemos la siguiente sección equivalente



Se tiene como dato

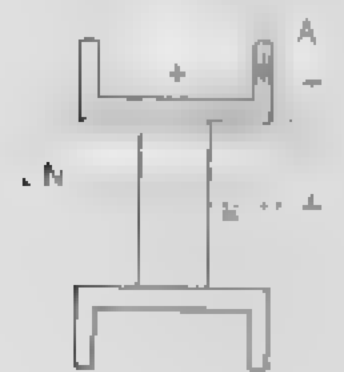
Calculamos el momento estático: Q = (0.01)(0,264)(0,264/2) = 348 5 × 10⁻⁶

Además: V = P/2 = 80/2 = 40 kN ; R = 2R

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{2R'(79{,}1\times10^{-6})}{(348{,}5\times10^{-6})(40\times10^{3})} = 0{,}3 \Rightarrow R' = 26{,}4\ kN$$

$$\tau = \frac{R'}{A} = \frac{26{,}4\times10^{3}}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 84\ MPa}$$

Para la parte (b) tenemos la sección equivalente



Tenemos

Además, $Q = A'\bar{y}$

$Q = (3780\times10^{-6})(0{,}1153) = 436\times10^{-6}$ m

V = 40 kN

R = 2R' (2 filas de tornillos)

Luego, el espaciamiento de los tornillos

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{2R'(109\times10^{-6})}{(40\times10^{3})(436\times10^{-6})} = 0{,}3 \Rightarrow R = 24\ kN$$

Luego el esfuerzo en los tornillos

$$\tau = \frac{R}{A} = \frac{R}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{24\times10^{3}}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 76{,}4\ MPa}$$

1020 La viga del problema 1002 soporta una carga uniformemente repartida de 30 kN/m, apoyada sobre un claro de 5 m de longitud. Con los valores E_a = 200 GN/m² y E_m = 10 GN/m², calcular la deflexión en el centro.

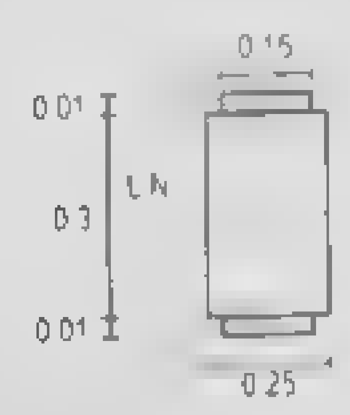
Resolución.

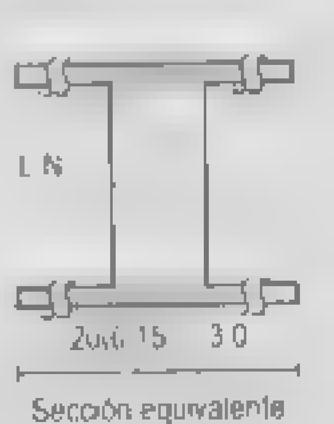
La deflexión para esta viga simplemente apoyada y con una carga uniforme repartida en todo el tramo es

$$\delta = \frac{5wL^4}{384\ EI}\ \text{(verificar)}$$

Del problema 2 tenemos para la sección equivalente de madera, n = 20

$$I = \frac{1}{12}(3)(0{,}32)^3 - \frac{1}{12}(2{,}75)(0{,}3)^3 = 2005\times10^{-6}\ m^4$$





Sección equivalente

Luego reemplazando los valores tenemos

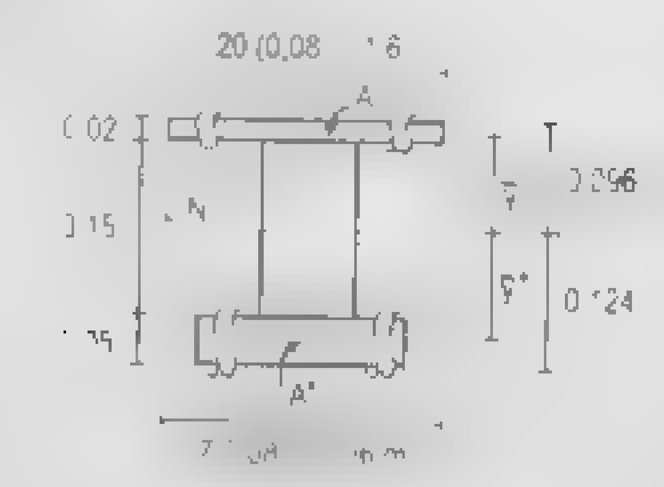
$$\delta = \frac{5(30\times10^{3})(5)^4}{384(10\times10^{9})(2005\times10^{-6})} = 0{,}0122 \rightarrow \boxed{\delta = 12{,}2\ mm}$$

1021 En el problema 1016 calcular el flujo de cortante (sec. 5.7) que existe entre el acero y la madera y entre la madera y el aluminio. Expresar el resultado en función de la fuerza cortante vertical V

Resolución.

Sabemos que el flujo cortante es. $q = \frac{VQ}{I}$

La sección equivalente en madera



El valor de I ya se calculó en el problema de referencia: $I = 540.5 \times 10^{-6}\ m^4$

Calculamos los valores de Q: $Q = A\bar{y}$

Para el acero

$$Q' = A'\bar{y}' = (1.6)(0.02)(0.096 - 0.01) = 2752 \times 10^{-6}\ m^3$$

Para el aluminio

$$Q'' = A''\bar{y}'' = (0.56)(0.05)(0.124 - 0.025) = 2772 \times 10^{-6}\ m^3$$

Luego el flujo de corte existente entre

I. El acero y la madera

$$q = \frac{V(2752 \times 10^{-6})}{540.5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{q = 5.09V\ N/m}$$

II. El aluminio y la madera

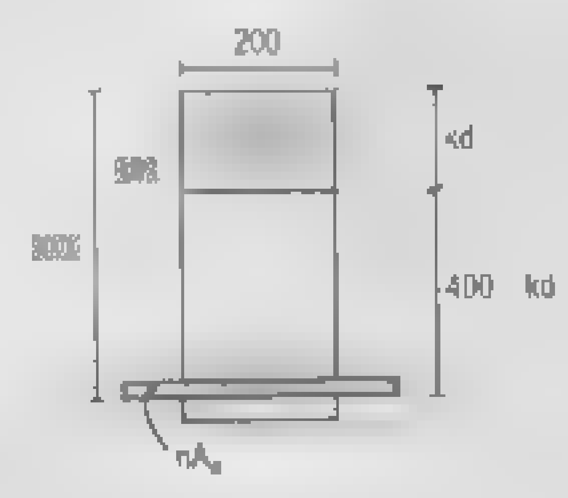
$$q = \frac{V(2772 \times 10^{-6})}{540.5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{q = 5.12V\ N/m}$$

1022, 1023 problemas ilustrativos

1024. En una viga de concreto armado, b = 200 mm, d = 400 mm, $A_a = 1400\ mm^2$. Determinar la posición de la línea neutra si (a) n = 6, y (b) n = 10

Resolución.

Graficamos la sección equivalente



Para la parte (a): n = 6

Por equilibrio

$$200\,kd\left(\frac{kd}{2}\right) = 6 \times 1400\,(400 - kd) \Rightarrow \boxed{kd = 146\ mm}$$

Por tanto.

$$jd = d - \frac{1}{3}kd = 400 - \frac{1}{3}(146) \Rightarrow \boxed{jd = 351\ mm}$$

Para la parte (b): n = 10

Por equilibrio tenemos que

$$200\,kd\left(\frac{kd}{2}\right) = 10(1400)\,(400 - kd)$$

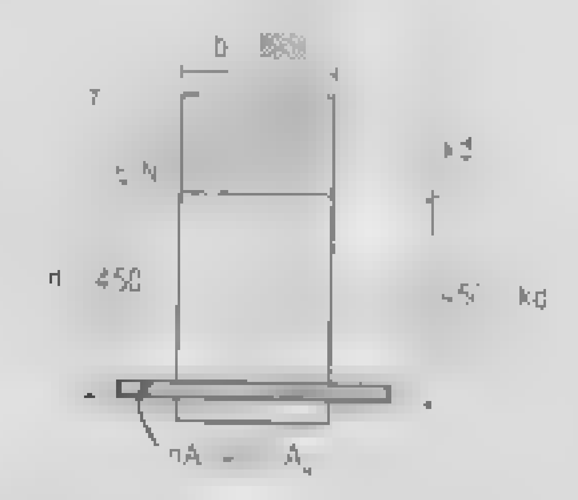
$$(kd)^2 + 140(kd) - 56 \times 10^3 = 0 \Rightarrow \boxed{kd = 177\ mm}$$

Por tanto.

$$jd = d - \frac{1}{3}kd = 400 - \frac{1}{3}(177) \Rightarrow \boxed{jd = 341\ mm}$$

1025. En una viga de concreto armado, b = 250 mm, d = 450 mm y n = 10. Los esfuerzos máximos desarrollados son de 6 MPa en el concreto y de 120 MPa en el acero. Calcular el momento flexionante aplicado y el área requerida de acero

Resolución:
Dibujamos la sección equivalente



- Para que el esfuerzo en el concreto alcance su valor máximo

$$M = \frac{1}{2} f_c (bkd)(jd) = \frac{1}{2}(6)(250)(kd)(jd) \qquad ...(1)$$

- Para que el esfuerzo en el acero alcance su valor máximo

$$M = f_s A_s jd = 120 (A_s) jd \qquad (2)$$

De (1) y (2): $\quad A_s = 6{,}25(kd)$

Además

$$250(kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = 10A_s (450 - kd)$$

$$125(kd)^2 = 10(6{,}25\,kd)(450 - kd) \Rightarrow kd = 150 \text{ mm}$$

Entonces

$$A_s = 6{,}25(150) \Rightarrow \boxed{A_s = 938 \text{ mm}^2}$$

$$M = \frac{1}{2}(6)(250)(150)\left(450 - \frac{150}{3}\right) = 45 \times 10^6 \text{ N mm} \quad \boxed{M = 45 \text{ kN}}$$

1026 Repetir el problema 1025 si d = 540 mm

Resolución:
Seguimos el procedimiento del problema anterior

- Para que el esfuerzo en el concreto alcance su valor máximo:

$$M = \frac{1}{2}(6)(250)(kd)(jd) \qquad (1)$$

- Para que el esfuerzo en el acero alcance su valor máximo

$$M = 120 (A_s) jd \qquad (2)$$

Igualando los momentos de (1) y (2): $A_s = 6{,}25(kd)$

Además $\quad 250(kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = 10A_s(540 - kd)$

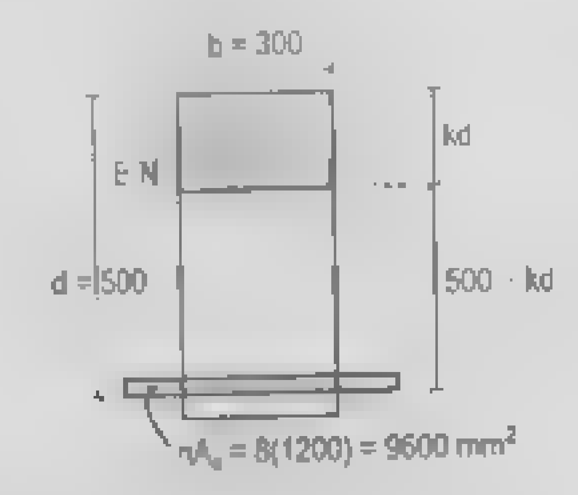
$$125(kd)^2 = 10[6{,}25(kd)](540 - kd)$$

De donde obtenemos: $\quad kd = 180 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{A_s = 1125 \text{ mm}^2}$

$$M = 120(1125)\left(540 - \frac{180}{3}\right) \Rightarrow \boxed{M = 64{,}8 \text{ kN m}}$$

[illegible] Calcular [illegible] en una viga de concreto armado en la que b = 300 mm, d = 500 mm, A_s = 1200 mm^2 y n = 8, al aplicarle un momento flexionante de 70 kN.m

Resolución:
Dibujamos la sección equivalente



Calculamos la ubicación del E N

$$300(kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = 9600(500 - kd)$$

$$(kd)^2 + 64kd - 32\,000 = 0 \Rightarrow kd = 150 \text{ mm}$$

Por tanto.

$$jd = d - \frac{kd}{3} = 500 - \frac{150}{3} = 450 \text{ mm}$$

Calculamos el esfuerzo máximo en el concreto

f ... [illegible] ⇒ f ... 6,91 MN/m [illegible]

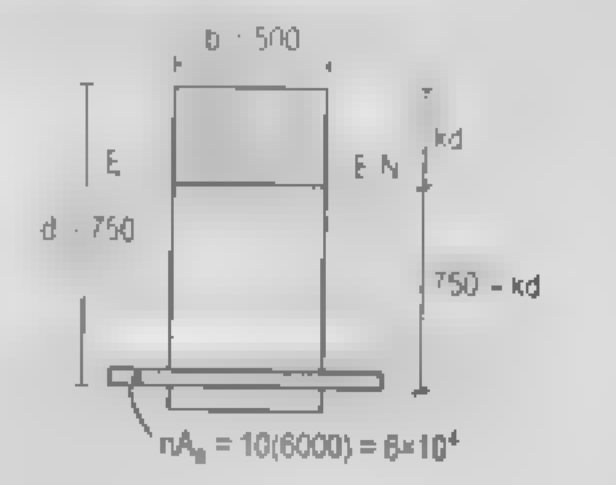
Calculamos el esfuerzo máximo en el acero.

$f_s = \frac{M}{A_s \ldots} = \frac{70 \times 10^3}{\ldots}$ ⇒ f_s ... 1 ... MN/m [illegible]

1028. En una viga de concreto armado b ... 500 mm d ... 750 mm A_s ... 6000 ... y n ... 10 ¿Qué esfuerzos máximos produce un momento flexionante de 27... kN·m?

Resolución

Tenemos la siguiente sección ... [illegible]



Calculamos la ubicación del E N

$500(kd)(kd/2) = 6 \times 10^4(750 - kd) \Rightarrow kd = 321 \text{ mm}$

Por tanto

$jd = d - \frac{1}{3}kd$ ... 643 mm

Calculamos los esfuerzos máximos en

1 El concreto

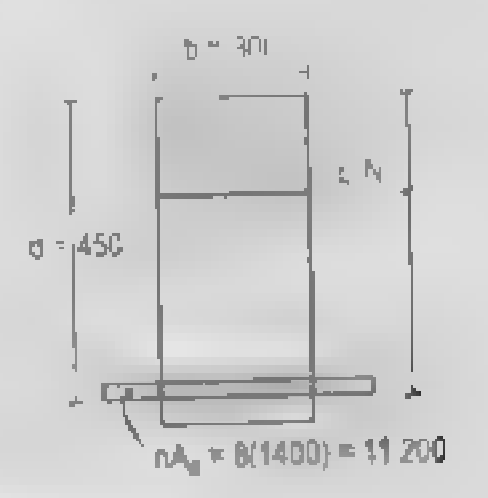
$$f_c = \frac{2M}{b\,kd\,(jd)} = \frac{2(270 \times 10^3)}{0,5(0,321)(0,643)} \Rightarrow \boxed{f_c = 5,23 \text{ MN/m}^2}$$

2 El acero

$$f_s = \frac{M}{A_s\,jd} = \frac{270 \times 10^3}{6 \times 10^{-3}(0,643)} \Rightarrow \boxed{f_s = 70 \text{ MN/m}^2}$$

1029. **Las dimensiones de una viga de concreto armado son b = 300 mm,** d ... 450 mm A_s ... 1400 mm ... y ... 8 ... esfuerzos admisibles son f ... 12 MN/m... y f_s ... 140 MN/m... el momento flexionante máximo que se puede aplicar ¿Cómo está ... la viga?

Resolución



Calculamos la ubicación de E N

$300(kd)(kd/2) = 11\,200(450 - kd) \Rightarrow kd = 150$

Por tanto: $jd = d - \frac{1}{3}kd = 400 \text{ mm}$

Calculamos el momento flexionante máximo que se puede aplicar considerando

I. **El esfuerzo permisible del concreto**

$$f = \frac{2M}{b(kd)(jd)} = \frac{2M}{0,3(0,15)(0,40)} \leq 12 \times 10^6 \Rightarrow M \leq 108 \text{ kN m}$$

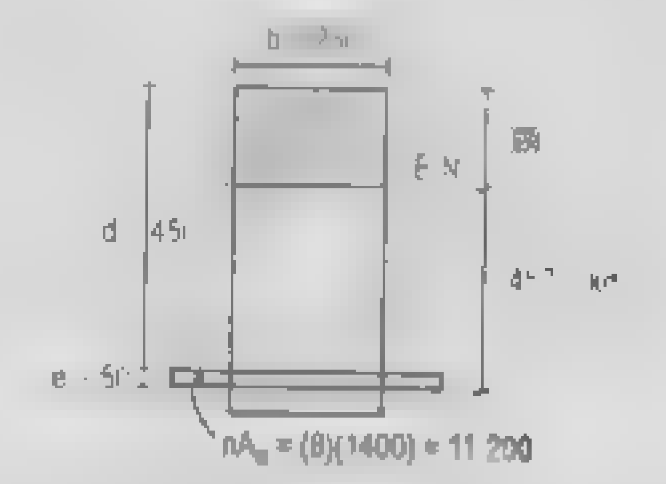
I El esfuerzo permisible del acero

$$f_s = \frac{M}{A_s\, jd} = \frac{M}{1400 \times 10^{-6}(0.396)} \le 140 \times 10^6 \Rightarrow M \le 78.4\ \text{kN m}$$

$\boxed{M \le 78.4\ \text{kN m}}$ (esta subreforzada)

1030 En una viga de concreto armado ... 250 mm ... 450 mm ... A_s ... 1400 mm² y n = 8. Calcular la carga uniformemente repartida que puede soportar la viga simplemente apoyada, sobre un claro de 4 m, si $f_c \le 12$ MPa y f_s ... Se considera un recubrimiento de armadura e = 50 mm y se incluye ... propio de la viga. El concreto pesa, aproximadamente, 2400 kg/m³

Resolucion



Para un viga simplemente apoyada con carga distribuida w

$$M = \frac{1}{8} w_T L^2 = \frac{1}{8} w_T (4)^2 = 2w_T$$

Calculamos la ubicación de E N
$250(kd)(kd/2) = 11\,200(450 - kd) \Rightarrow kd = 161$

Por tanto. $jd = 450 - \frac{1}{3}(161) = 396$

Calculamos w_T considerando lo siguiente
- El esfuerzo máximo en el concreto

$$f_c = \frac{2M}{b(kd)(jd)} = \frac{2(2w_T)}{0.25(0.161)(0.396)} \le 12 \times 10^6 \Rightarrow w_T = \le 47\,817\ \text{N/m}$$

- El esfuerzo máximo en el acero

$$f_s = \frac{M}{A_s(jd)} = \frac{2w_T}{(1400 \times 10^{-6})(0.396)} \le 140 \times 10^6 \Rightarrow w_T \le 38\,808\ \text{N/m}$$

Escogemos el menor $w_T = 38\,808$ N/m

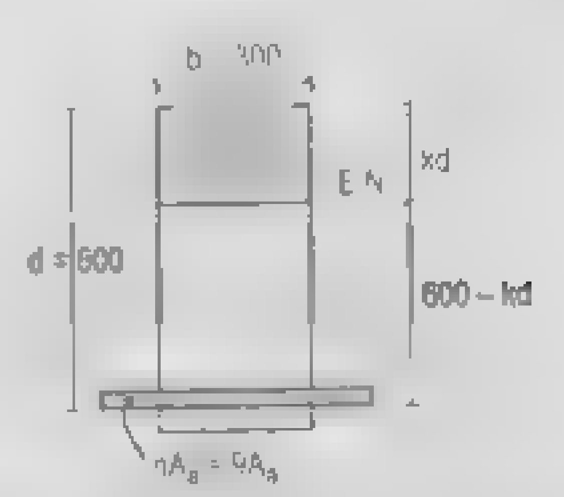
Sabemos que $w_T = w + w_{pp}$

Además. $w_{pp} = (0.25)(0.5)(2400)(9.81) = 2943$ N/m

$\therefore$ $\boxed{w = w_T - w_{pp} = 35.9\ \text{kN/m}}$

1031 En una viga de concreto armado b = 300 mm, d = 600 mm y n = 9. Al aplicar un momento flexionante de 80 kN m, el esfuerzo máximo en el concreto es de 5 MPa. ¿Qué esfuerzo ... en el acero? ¿Cuál será el área de acero requerida?

Resolucion



Calculamos la ubicación de E N con la siguiente expresión

$$M_c = \frac{1}{2} f_c (bkd)\left(d - \frac{1}{3}kd\right) \Rightarrow 80 \times 10^3 = \frac{1}{2}(5 \times 10^6)(0.3)(kd)\left(0.6 - \frac{kd}{3}\right)$$

De donde $kd = 0.20 \Rightarrow jd = 0.533$

Calculamos el área de acero

$$300(200)(200/2) = 9A_s(600 - 200) \Rightarrow \boxed{A_s = 1670\ \text{mm}^2}$$

Calculamos el esfuerzo en el acero.

$$f_a = \frac{M}{A_a(jd)} = \frac{80 \times 10^3}{(1670 \times 10^{-6})(0{,}533)} \Rightarrow \boxed{f_a = 90\ MPa}$$

1032 Resolver el problema anterior con M = 70 kN m sin variar los otros datos

Resolución

Seguimos el procedimiento del problema anterior con M = 70 kN

Calculamos la ubicación del E N

$$70 \times 10^3 = \frac{1}{2}(5 \times 10^6)(0{,}3)(kd)\left(0{,}6 - \frac{kd}{3}\right)$$

De donde. kd = 0 171 ⇒ jd = 0 543 m

Calculamos el área de acero

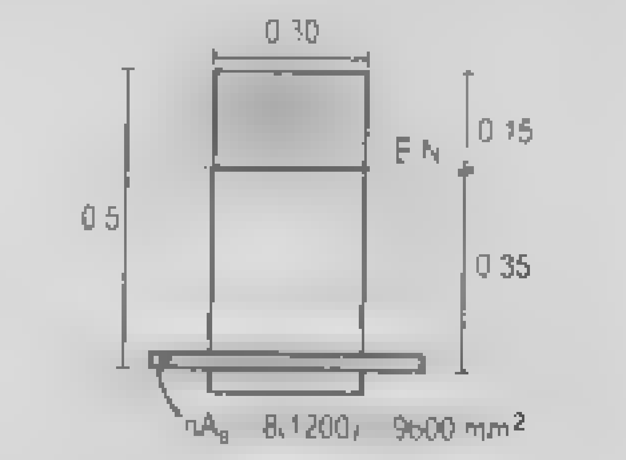
$$300(171)(171/2) = 9A_s(600 - 171) \Rightarrow \boxed{A_s = 1136\ mm^2}$$

Calculamos el esfuerzo en el acero

$$f_a = \frac{M}{A_a(jd)} = \frac{80 \times 10^3}{(1136 \times 10^{-6})(0{,}543)} \Rightarrow \boxed{f_a = 79\ MPa}$$

1033 Resolver el problema 1027 calculando el momento de inercia de la sección equivalente y aplicando la fórmula de la flexión de acuerdo con lo indicado en la sección 10-2. La distancia del área equivalente de concreto a la línea neutra de la sección transformada puede tomarse como su radio de giro con respecto a este eje.

Resolución



Además se ha calculado el E N (ver P 1027) kd = 150 mm

Calculamos el momento de inercia con respecto al E N

$$I = \frac{1}{3}(0{,}3)(0{,}15)^3 + (9600 \times 10^{-6})(0{,}35)^2 \Rightarrow I = 1513{,}5 \times 10^{-6}\ m^4$$

Calculamos el esfuerzo en el concreto

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(70 \times 10^3)(0{,}15)}{1513{,}5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_c = 6{,}93\ MPa}$$

Calculamos el esfuerzo en el acero

$$f_a = \frac{nMc}{I} = \frac{8(70 \times 10^3)(0{,}35)}{1513{,}5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{f_a = 145\ MPa}$$

1034 Resolver el problema 1029 empleando el [illegible] del proble-ma 1033

Resolución:

Calculamos el momento de inercia con respecto al E N.

$$I = \frac{1}{3}(0{,}30)(0{,}15)^3 + (11\,200 \times 10^{-6})(0{,}3)^2 = 1345{,}5 \times 10^{-6}\ m^4$$

Calculamos el momento que puede resistir [illegible] el esfuerzo admisible del concreto

$$f_c = \frac{M_c}{I} = \frac{M(0{,}15)}{1345{,}5 \times 10^{-6}} \leq 12 \times 10^6 \Rightarrow M \leq 107{,}6\ kN\,m$$

Considerando el esfuerzo admisible del acero

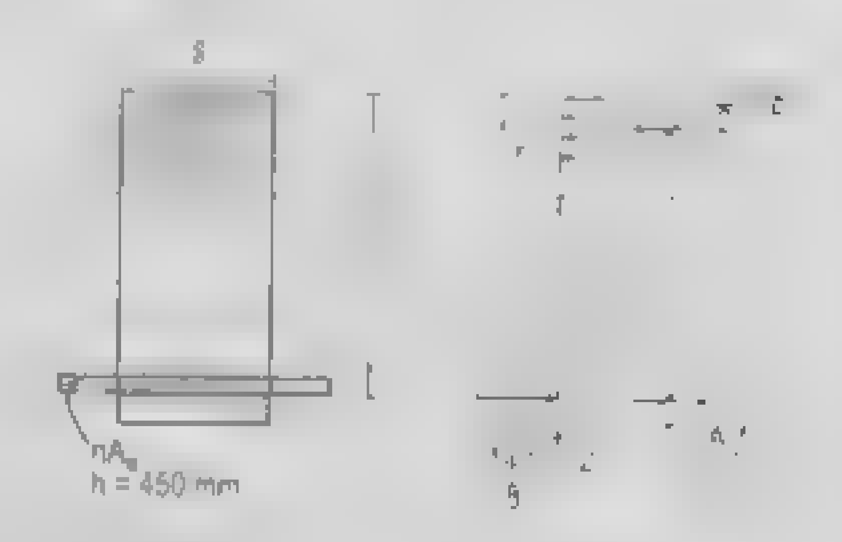
$$f_s = \frac{n\,Ma}{I} = \frac{8(M)(0{,}3)}{1345{,}5 \times 10^{-6}} \leq 140 \times 10^6 \Rightarrow M \leq 78{,}5\ kN\,m$$

$$\boxed{M = 78{,}5\ kN\,m}$$

1036. Se diseña una viga de concreto armado para alcanzar simu ... tánea esfuerzos $f_c = 12$ MPa y $f_s = 140$ MPa. Si $n = 8$ y $h = 450$ mm, c... brazo de momento del par resistente

Resolución

Tenemos el siguiente esquema



Del gráfico por semejanza tenemos

kd   12

Luego el valor de j es

$$j = 1 - \frac{1}{3}k = 1 - \frac{1}{3}(0.407) = 0.864 \Rightarrow jh = 0.864(450) \therefore \boxed{jh\ \ 38}$$

1037 En una viga de concreto, $h = 600$ mm y $n = 9$. Determinar los valo... A_s para que pueda soportar un momento flexionante de 80 kN m con... do o refuerzo estricto, si $f_c = 9 \times 10^6$ N/m² y $f_s = 140 \times 10^6$ N/m²

Resolución

Seguimos un procedimiento similar al problema anterior

Calculamos k

...amos b haciendo d = h = 600 mm

$$M_c = \left(\frac{1}{2}f_c bkd\right)(jd) \Rightarrow 80 \times ...$$

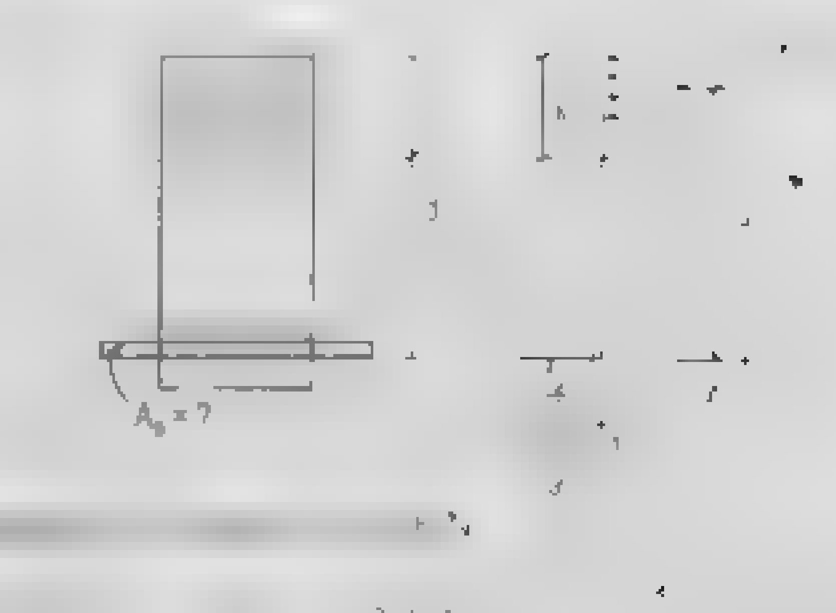
$$b = 0.148 \Rightarrow \boxed{b = 148\ m...}$$

Calculamos A_s con $\frac{1}{2}f_c bkd = A_s f_s$

$$\frac{1}{2}(9 \times 10^6)(0.148)(0.367)(0.6) = A_s(140 \times 10^6) \Rightarrow \boxed{A...}$$

En una viga de concreto armado, b ... esfuerzos admisibles son $f_c = 10$ MPa y f_s ... armadura estricta y el momento de se...

Resolución



$$\frac{}{140}\ \ \frac{}{10}\ \ 0.391 \Rightarrow j = 1 - \frac{}{3}k$$

Calculamos el momento de seguridad

$$M = \left(\frac{1}{2}f_c bkd\right)(jd) = \frac{1}{2}(10 \times 10^6)(0.25)(0.45)^2(0.391)(0.869)$$

$$\Rightarrow \boxed{M = 86\ kN\ m}$$

Luego [illegible] el área de acero

$M = (A_a f_a)(jd) \Rightarrow A_a(140 \times 10^6)(0{,}869)(0{,}45) = 86 \times 10^3$

$\Rightarrow \boxed{A_a = 1570\ mm^2}$

1039 Diseñar una viga de concreto armado de altura estricta para resistir un mo[illegible] [illegible] de 140 kN m [illegible] 1,5b, f_c = 12 MPa y f_a = 160 MPa. Se considerará n = 8

Resolución

[illegible] k y j

$k = \frac{1}{1 + \frac{f_a}{n f_c}} = \frac{12}{\frac{160}{8} + 12} = 0{,}375 \Rightarrow j = 1 - \frac{1}{3}k = 1 - \frac{1}{3}(0{,}375) = 0{,}875$

Sabemos que: $M = \left(\frac{1}{2} f_c bkd\right)(jd)$

[illegible] $\Rightarrow bd^2 = 0{,}071$ [illegible]

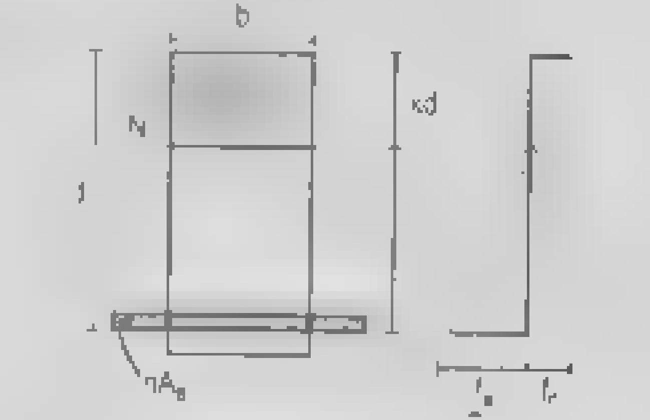
Además $b(1{,}5b)^2 = 0{,}071 \Rightarrow b = 0{,}316\ m \Rightarrow \boxed{b = 316\ mm}$

Luego. $\frac{1}{2}(12 \times 10^6)(0{,}316)(0{,}474)(0{,}375) = A_a(160 \times 10^6)$

$A_a = 2110 \times 10^6\ m^2 = 2110\ mm^2 \Rightarrow \boxed{A_a = 2110\ mm^2}$

1040 Resolver [illegible] si $b = \frac{3}{4}h$

Resolución



[illegible] k y j

$k = \frac{1}{1 + \frac{f_a}{n f_c}} = \frac{12}{\frac{160}{8} + 12} = 0{,}375 \Rightarrow j = 1 - \frac{1}{3}k = 1 - \frac{1}{3}(0{,}375) = 0{,}875$

El momento actuante

$M = 140 \times 10^3 = \frac{1}{2}(12 \times 10^6)(0{,}375)(0{,}875)\,bd^2 \Rightarrow bd^2 = 0{,}0711$

Considerando $b = \frac{3}{4}h \approx \frac{3}{4}d$ [illegible]

Reemplazando $b = \frac{3}{4}$ [illegible]

Con los datos ya calculados determinamos

$A_a = \frac{1}{f_a} \cdot \frac{1}{2} f_c bkd$

$A_a = \frac{1}{160 \times 10^6} \cdot \frac{1}{2}(12 \times 10^6)$ [illegible]

$A_a = 2{,}15 \times 10^{-6}\ m^2 \Rightarrow \boxed{A_a = 2150\ mm^2}$

1041 Se diseña una viga simplemente apoyada de 6 m de claro para soportar una carga concentrada de 80 kN en el centro del tramo. Calcular b y A_a si la altura útil h = 600 mm, la armadura es estricta, y los esfuerzos admisibles son $f_c = 8\ MN/m^2$, $f_a = 120\ MN/m^2$ y n = 10. Se recubren las armaduras con 50 mm de concreto y se tiene en cuenta el peso propio de la viga, siendo 2400 kg/m^3 la densidad (o masa volumétrica). *Indicación*: supóngase un peso inicial por metro de viga y confróntese con el que se obtendrá después de haber determinado las dimensiones de la viga

Resolución

El momento flexionante para la viga simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro del tramo es: $M = \frac{PL}{4} = \frac{80 \cdot 6}{4} = 120$ kN m

4.24 kN/m . $M_v = \frac{1}{8} wL$

total es M = 120 + 19 = 139 kN m

ndica que es armadura estricta Calculamos la

$k = 1 - \frac{1}{3}(0.4) = 0{,}867$

$\frac{M}{kjd^2} = \frac{}{(8\times10^6)(0.4)(0.867)(0.60)^2} = 0.278$ $\boxed{b \quad 278}$

$\frac{1}{2} f_c bkd \Big) \quad \frac{1}{120\times10^6}$

$\times 10^{-3} m^2 \Rightarrow \Big[A$

prot ma se uso d = h = 0.6 m , debió ser d = 0.55 m

de concreto armado de 6 m de longitud y perfectamente sus extremos ha de soportar una carga uniformemente rep kN.m, además de su peso propio Con h = 600 mm diseñar una tura estricta, con f_c = 6 MPa y f_s = 120 MPa siendo n = 10 Té bién un recubrimiento de 50 mm sobre las armaduras L del concreto es 2400 kg/m³ Léase la indicación del proble

máximo es $M = \frac{wL^2}{2}$, donde $w = w' + w_{pp}$

= (0.2)(0.6)(2.4)(9.81) = 2.8 w = 20 + 3 23 kN

$\frac{}{12}$ = 69 kN m

Calculamos la ubicación del eje neutro sabiendo que es una viga de altura

Calculamos b con $M = \frac{1}{2} f_c bkdjd$

$\frac{2M}{d^2} = \frac{2(69\times10^3)}{6\times10^6 \times 0.333\times0.889\times0.6^2} = 0.216$

Reemplazando M =

$6\times10^6 \times 0.333 \cdot 0.889 \cdot 0.6^2$

Calculamos el área de refuerzo

$\frac{1}{}\left(\frac{1}{2} f_c bkd\right) = \frac{1}{}\left(\frac{1}{2}\times6\times10^6\times0.216\times0.333\times0.6\right)$

$= 1.08 \times 10^{-3} m^2 \Rightarrow \boxed{A_s \quad 1080 mm^2}$

Diseñar una viga de concreto armado para soportar una carga repartida de 80 kN/m sobre un tramo de 4 m simplemente apoyada Emplear f_c = 12 MN/m² f_s = 140 MN/m² y n = 8 Tómese el recubrimiento de 50 mm sobre armaduras e incluyase el peso propio de la viga, con una densidad de concreto de 2400 kg/m³ Considerar el valor de D = 200 mm Emplee la indicación del problema 1041

Reso...

En una viga simplemente apoyada con carga uniforme M =

Un primer tanteo

$w_{pp} = (0,2)(0,6)(2,4)(9,81) = 2,83 \approx 3 \quad w = 80 + 3 = 83$ kN/m

Reemplazando $M = \frac{83 \times 4}{8} = 166$ kN m

Considerando una viga de altura estricta y calculamos la posición del E. N.

Calculamos h, hacemos h = d: h

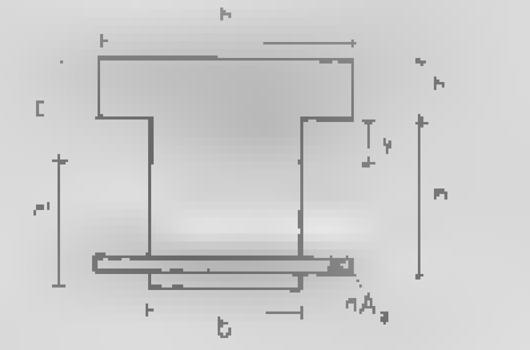
$h = 0,63$ m $\Rightarrow$ $\boxed{h = 630 \text{ mm}}$

Por lo tanto $w_{pp} = 3$ kN/m

Calculamos el área del refuerzo

En la viga en T de concreto armado, de la figura, $b_1 = 500$ mm, $h_1 = 150$ mm, $b = 250$ mm, $h = 500$ mm, $A_s = 3000$ mm^2 y $n = 10$. Calcular los esfuerzos máximos en el concreto y en el acero si el momento flexionante aplicado es

Resolución



Calculamos la ubicación del E. N. para lo cual hacemos equilibrio

$\Sigma ay = 0: (b_1h_1)(h_1/2 + y) + (by)(y/2) - nA_s(h - y) = 0$

$(500)(150)(150/2 + y) + (250y)(y/2) - 3 \times 10^4 (500 - y) = 0$

$y^2 + 840y - 75\,000 = 0 \Rightarrow y = 81,4$ mm

$I = \frac{1}{3}(b_1)(h_1 + y)^3 - \frac{1}{3}(b_1 - b)(y)^3 + nA_s(h - y)^2$

$I = \frac{1}{3}(500)(231,4)^3 - \frac{1}{3}(250)(81,4)^3 + 3 \times 10^4 (418,6)^2$

$I = 7277 \times 10^6$ mm^4 = 7277×10^{-6} m^4

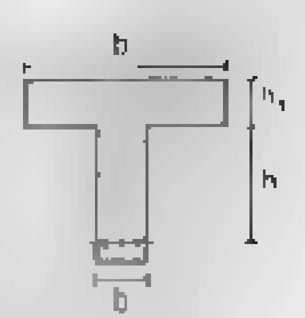
Calculamos el esfuerzo en el concreto

$f_c = \frac{Mc}{I} = \frac{(140 \times 10^3)(231,4 \times 10^{-3})}{7277 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{f_c = 4,45 \text{ MPa}}$

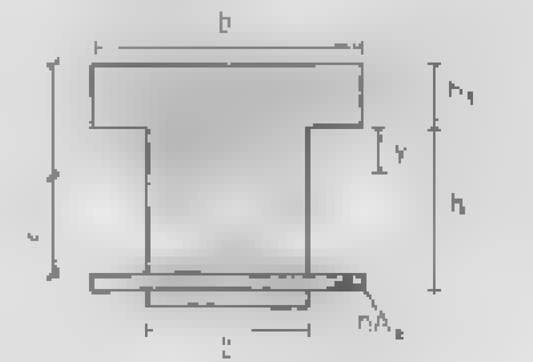
Calculamos el esfuerzo en el acero

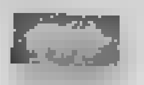
$f_s = \frac{nM}{I} = \frac{10(140 \times 10^3)(418,6 \times 10^{-3})}{7277 \times 10^{-6}} \Rightarrow f_s = 80,5$ MPa

Las dimensiones de la viga en T de concreto armado de la figura son $b_1 = 750$ mm, $h_1 = 100$ mm, $b = 300$ mm y $h = 450$ mm. Si $n = 8$ y $A_s = 3300$ mm^2, calcular el momento flexionante máximo que se puede aplicar sin exceder $f_c = 12$ MN/m^2 y $f_s = 140$ MN/m^2.



Resolución





Calculamos la ubicación del E.N. para ello tomamos momentos

Σay ... $(b_1 h_1)(y + h_1/2) + (by)(y/2)$ ... $nA_s(h - y) = 0$

Reemplazando valores

$(750)(100)(y + 50) + 300$ ...

Haciendo operaciones $y^2 + 676y - 54\ 200 = 0 \Rightarrow y = 72.4$ mm

Calculamos el momento de inercia

$$\frac{1}{3}(b_1)(h_1 + y)^3 - \frac{1}{3}(b_1 - b)(y^3) + nA_s(h - y)^2$$

$$\frac{1}{3}(750)(172.4)^3 - \frac{1}{3}(450)(72.4)^3 + 8(3300)(377.6)^2$$

$I = 4988 \times 10^6\ mm^4 = 4988 \times 10^{-6}$ ...

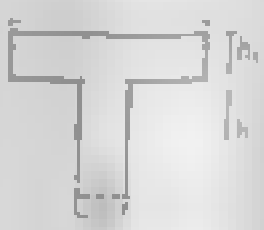
Calculamos el momento que se puede a...

M ... $\Rightarrow M \le 347$ kN.m

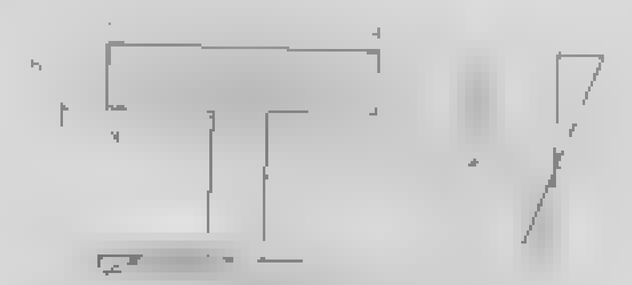
... $140 \times 10^6 \Rightarrow M \le 231$ kN.m

Escogemos el valor menor ...

1047 En la viga de concreto armado de la figura las dimensiones son $b_1 = 900$ mm, $h_1 = 80$ mm, $b = 300$ mm, $h = 520$ mm y $n = 9$. Determinar A_s y el momento máximo que puede resistir con armadura estricta si $f_c = 9$ MPa y $f_s = 160$ MPa



Resolución



Calculamos la posición del E.N. considerando armadura estricta

Por semejanza en el gráfico de la derecha

$$\frac{80 + y}{...} = \frac{f_c}{...} = \frac{9}{...} \Rightarrow y = 121.7\ mm$$

Para calcular el área del acero tomamos momentos en el E.N.

$$\Sigma(ay) = 0 \quad (b_1 h_1)\left(y + \frac{h_1}{2}\right) + (by)(y/2) - nA_s(h - y) = 0$$

Reemplazando valores y operando

$$\boxed{A_s = 3868\ mm^2}$$

Antes de calcular el momento que puede resistir, calculamos I

$$I = \frac{1}{3}(b_1)(h_1 + y)^3 - \frac{1}{3}(b_1 - b)(y)^3 + nA_s(h - y)^2$$

$$= \frac{1}{3}(900)(201.7)^3 - \frac{1}{3}(600)(121.7)^3 + 9(3868)(398.3)^2$$

$I = 7624 \times 10^6\ mm^4 \Rightarrow I = 7624 \times 10^{-6}\ m^4$

Calculamos M considerando $f_c = 9$ MPa

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(9 \times 10^6)(7624 \times 10^{-6})}{201.7 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{M = 340\ kN.m}$$

...

$$M = \frac{(f_s/n)I}{c} = \frac{(160/9)(7624)}{398.3 \times 10^{-3}} \quad \boxed{M = 340\ kN.m}$$

... cortante vertical de 120 kN. Calcular el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo de adherencia si los refuerzos consisten de 6 varillas de 20 mm

Resolución

Para V = 120 kN

I. Calculamos el esfuerzo cortante máximo

$$\tau = \frac{V}{jhb} = \frac{20\times10^3}{(0.857)(0.75)(0.5)} = 373\times10^3\ \text{N/m}^2 \Rightarrow \tau_{máx} = 373\ \text{kPa}$$

II. Calculamos el esfuerzo de adherencia: $\tau = \frac{V}{jd\Sigma_0}$

Para las 6 varillas de 20 $\Sigma_0 = 6(4\times20) = 480$ mm

$$\frac{120\times10^3}{\ldots} = 389\ \text{kPa} \quad \therefore \quad \tau_{máx} = 373\ \text{kPa}$$

1049 Determinar la fuerza cortante vertical que puede ser soportada por la viga del problema 1027 si el refuerzo consta de 4 varillas de 10. Supóngase que el esfuerzo cortante admisible es de 350 kN/m² y el esfuerzo de adherencia admisible de 550 kN/m².

Resolución

Calculamos el corte considerando el ...

$$\tau_{máx} = \frac{V}{hb} \quad V = (\tau_{máx})hd \Rightarrow V = (350\times10^3)(0.9)(0.5)(0.3)$$

V = 47 kN

Considerando τ de adherencia

$\Sigma_0 = 4(4\times10) = 160$ mm

$V = \tau jd\Sigma_0 = (550)(0.9)(0.5)(0.16)$

V = 39.6 kN

$$\boxed{V_{máx} = 39.6\ \text{kN}}$$

CAPÍTULO 11

COLUMNAS

1101. Problema ilustrativo

1102 Una pieza de madera escuadrada de 50 ×100 mm se emplea como columna con los extremos empotrados. Calcular la longitud mínima para que pueda aplicarse la fórmula de Euler si E = 10 GPa y el límite de proporcionalidad es de 30 MPa. ¿Qué carga axial podrá soportar con un factor de seguridad igual a 2, si la longitud es de 2,50 m?

Resolución

Dadas las dimensiones de la sección recta, calculamos el radio de giro menor

$$I = \frac{1}{12}(0,1)(0,05)^3 = 1,042\times10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$A = (0,1)(0,05) = 5\times10^{-3}\ \text{m}^2$$

Entonces: $r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1,042\times10^{-6}}{5\times10^{-3}}} = 0,0144$ m

Para calcular la longitud usamos la expresión

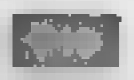
$$\sigma = \frac{E\pi^2}{(L'/r)^2}, \quad \text{pero } L' = \frac{L}{2} \Rightarrow L = 2L' = 2\pi r\sqrt{\frac{E}{\sigma}} = 2\pi(0,0144)\sqrt{\frac{10}{30}\,10^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 1,65\ \text{m}}$$

Para calcular P_{adm} tenemos lo siguiente L = 2,5 m

$$P = \frac{E\pi^2 I}{L^2} = \frac{(10\times10^9)\pi^2(1,042\times10^{-6})}{(0,5\times2,5)^2} \Rightarrow P_{cr} = 65,8\ \text{kN}$$

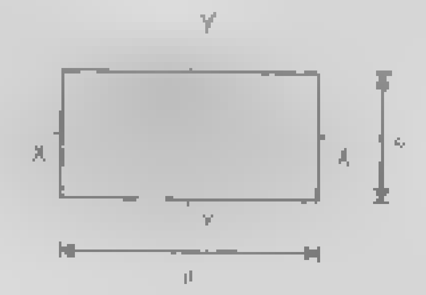
$$P_a = \frac{P}{F} = \frac{65,8}{2} \Rightarrow \boxed{P_{adm} = 32,9\ \text{kN}}$$



1103. Jn tornapuntas de aluminio tiene una sección rectangular de 20 x 5 perno que atraviesa cada extremo lo asegura de manera que actua umna doblemente articulada con respecto a un eje perpendicular sión de 50 mm y como empotrada respecto a un eje normal a Determinar la carga axial de seguridad con un factor igual a $E = 70$ GPa y la longitud de 2 m

Resolucion

Tenemos la secc on de 20 x 50 mm, calculamos los momentos



$\frac{1}{12}(0.05)(0.02)^3 = 33.333 \times 1$

$= \frac{1}{12}(0.02)(0.05)^3 = 208\,333$

Calculamos las cargas criticas

En el eje X (doblemente empotrado)

$$P_{cr} = \frac{EI_x\pi^2}{L_e^2} = \frac{(70\times10^9)(33.333\times10^{-9})\pi^2}{(1)^2} = 23.03 \text{ kN}$$

En el eje Y (doblemente articulado)

$(L_e) = L = 2$ m

$$\frac{EI_y\pi^2}{L_e^2} = \frac{(70\times10^9)(208.333\times10^{-9})\pi^2}{(2)^2} = 35.98 \text{ kN}$$

De los dos valores tomamos el menor $P_{cr} = 23.03$ kN

Luego a carga de seguridad con un factor de seguridad de 2 5 es

1104 Una barra de aluminio de sección cuadrada y 3 m de longitud sopor carga de 40 kN. Si los extremos están articulados con rótulas. determ lado de la sección, con valor de E = 0 GPa

Resolucion

Tenemos una seccion cuadr a de ado b con 3 m de longitud. P_{cr} 40 kN y extremos articu ados

Amp amos a expresion de

$E\pi^2$ (70

De donde obtenemos. $b = 0.05$ m = 50 mm

Repetir el problema anterior si la barra fue de madera con E = 10 GPa

Resolucion

Tenemos los siguientes datos

L = 3 m P_{cr} = 40 kN E = 10 GPa

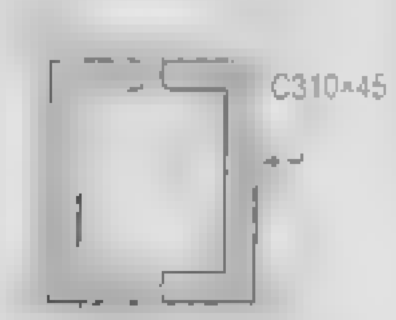
Luego aplicamos la expres on anterior

$E\pi^2$ $(10\times10^9)(\pi)^2$ 12

Dos perfiles C310 x 45 se unen mediante placa en celos a de manera que el momento de inercia sea el m smo con respecto a los dos ejes princ pa es de la seccion compuesta asi formada. Determinar la ong tud minima de esta columna que se supone artic ada en sus extremos, con E = 200 GPa y lim te de proporcionalidad de 240 MPa para poder apl car la fórmula de Euler ¿Que carga podria soportar con una longitud de 12 m y un factor de segur dad de 2 5?

Resolucion

Tenemos la seccion



Seccion transversal

= 67 3 x 10⁶ mm⁴ (tabla,

09 mm

134 6 x 10⁶ mm

(igual para ambos ejes)

Además $L_e = L$, $E = 200$ GPa, $G = 240$ MPa

Usamos la expresión

$$L = \pi r_x \sqrt{\frac{E}{\sigma}} = \pi (109 \times 10^{-3}) \sqrt{\frac{200 \times 10^9}{240 \times 10^6}} \Rightarrow \boxed{L = 9.89 \text{ m}}$$

Para calcular la carga que puede soportar para una longitud de ... y $F_S = 2.5$ calculamos primero la carga crítica de Euler

$$P = \frac{E\pi^2 I}{L^2} = \frac{(134.6 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)\pi^2}{12^2} = 1845 \text{ kN}$$

Luego $P_{adm} = \frac{P_c}{F_S} \Rightarrow P_{adm} = \frac{1845}{2.5}$ $\boxed{P_{adm} = 738 \text{ kN}}$

1107 Repetir el problema 1106 si un extremo está empotrado y el otro ... 30

Resolución

Como datos tenemos: $\sigma_x = 109$ mm, $I_x = 134{,}6 \times 10^6$ mm^4, $\sigma = 240$ MPa, $A = 5690$ mm, $E = 200$ GPa

La longitud efectiva para las condiciones es: $L_e = 0.7L$

Luego utilizando la expresión

$$0.7L = \pi r_x \sqrt{\frac{E}{\sigma}} = 9.89 \text{ (prob. anterior)} \Rightarrow \boxed{L = 14.13 \text{ m}}$$

Para L = 12 m

$$P = \sigma A = (240 \times 10^6)(5690 \times 10^{-6}) = 1365{,}6 \text{ kN}$$

Luego $P_{adm} = \frac{P}{F_S} = \frac{1365.6}{2.5} \Rightarrow \boxed{P_{adm} = 546 \text{ kN}}$

1108 Escoger el perfil W más ligero para una columna de 8 m de longitud con extremos empotrados que ha de soportar una carga de 270 kN con un coeficiente de seguridad de 2,5. El límite de proporcionalidad es de 200 MPa y E = 200 GPa

Resolución

Tenemos una carga crítica de Euler de 270 kN. Además

$L_e = L/2 = 8/2 = 4$ m (doble empotrado)
$F_s = 2{,}5$
$E = 200$ GPa

Donde la carga de trabajo es $2{,}5(270) = 675$

$$I \geq \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(675 \times 10^3)(4)^2}{(200 \times 10^9)\pi^2} = 5{,}47 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \geq 5.47 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$r \leq \frac{L}{100} = \frac{4000}{100} = 40 \text{ mm}$$

Escogemos W200 × 36 $\begin{cases} I = 7{,}64 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ r = 40.9 \text{ mm} \end{cases}$

Considerando el límite de proporcionalidad

$$A \geq \frac{(675 \times 10^3)}{200 \times 10^6} = 3375 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \Rightarrow A \geq 3375 \text{ mm}^2$$

$r \geq 40$ mm

Escogemos un W200 × 36 $\begin{cases} A = 4580 \text{ mm}^2 \\ r = 40.9 \text{ mm} \end{cases}$

$\boxed{\text{seleccionamos un perfil W200} \times 36}$

1109 Elegir un perfil W para una columna de 12 m doblemente empotrada que ha de soportar una carga axial de 700 kN, con un factor de seguridad de 2,0. Supóngase que el límite de proporcionalidad es de 200 MPa y E = 200 GPa

Resolución

La carga de trabajo, multiplicada por el factor de seguridad 2, da una car[illegible] de 14[illegible] kN [illegible]

$$I \geq \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(1400\times10^3)(12\times0.5)^2}{200\times10^9\,\pi^2}$$ [illegible]

A [illegible]

$$\frac{L}{r} \geq 100 \Rightarrow r \leq \frac{L}{100} = \frac{6000}{100} = 60\ \text{mm}$$

También considerando el límite de proporcionalidad

$$\frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\ } = \frac{1400\times10^3}{\ } = 7\times10^{-3}\ \text{m}^2 = 7000\ \text{mm}^3$$

Escogemos de la tabla B-2

W200 × 86 donde $I = 31.4\times10^6\ \text{mm}^4 \geq 25.5\times10^6\ \text{mm}^4$

$r = 53.3\ \text{mm} < 60\ \text{mm}$

$A = 11\ 100\ \text{mm}^2 \geq 7000\ \text{mm}^2$

1110 y 1111 problemas ilustrativos

1112 Determinar la relación de esbeltez de una columna de 4 m con extre[illegible] empotrados si su sección es (a) una circunferencia de 50 mm de [illegible] un cuadrado de 40 mm de lado. Use el concepto de longitud efe[illegible]

Resolución

La relación de esbeltez es L/r. Tenemos una longitud de 0.5L, igual a [illegible] m) = 2 m para la sección

a) R = 50 mm

$r = 0.5R = 0.5(50) = 25$ mm

$L/r = 2000/25 \Rightarrow L/r = 80$

b) a = 40 mm

$r = 0.29a = 0.29(40) = 11.6$ mm

$L/r = 2000/11.6 \Rightarrow \boxed{L/r = 173}$

1113 Usando especificaciones de la AISC, determinar la longitud máxima de un perfil W360 × 122 si se va usar como columna con extremos articulados para soportar una carga de 1200 kN, usando $\sigma_{pc} = 450$ MPa

Resolución

Para el perfil W360 × 122, tenemos.

$A = 15\ 500\ \text{mm}^2$ (área) $\quad r_y = 63$ mm (radio de giro menor)

Además como datos

$L_e = L$ (extremos articulados) ; $P = 1200$ kN , $\sigma_{pc} = 450$ MPa

Calculamos la relación de esbeltez C_c

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{450\times10^6}} = 94$$

Asumimos lo siguiente

Si $L_e/r > C_c \Rightarrow L_e = L > (63)(94) = 5922$ mm

Entonces $\sigma_T = \frac{P}{A} = \frac{12\pi^2E}{23(L_e/r)^2} \rightarrow L_e = r\sqrt{\frac{12\pi^2EA}{23P}}$

Reemplazando

$$L_e = 63\sqrt{\frac{12\pi^2(200\times10^9)(15\ 500\times10^{-6})}{23(1200\times10^3)}} = 7245\ \text{mm}$$

$L_e = 7245 > 5922$ $\quad \boxed{L = 7.25\ \text{m}}$

1114 Aplicando las especificaciones de la AISC, determinar la máxima longitud que puede tener una columna formada con un perfil W250 × 167 para soportar una carga de 1600 kN, con extremos articulados. Use $\sigma_{pc} = 380$ MPa

Resolución

Para el perfil W250 × 167 de la tabla tenemos lo siguiente

$A = 21\ 300\ \text{mm}^2$ $\quad r_y = 68.1$ mm

Además

$L_e = L$ (extremos articulados) $\quad P = 1600$ kN $\quad \sigma_{pc} = 380$ MPa

Calculamos la relación de esbeltez C_c

$$C = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{380\times10^6}} = 102$$

Asumimos lo siguiente

Si $L_e/r > C$ [illegible] 69,0

Entonces $\sigma_T =$ [illegible]

Reemplazando [illegible]

$L_e = 681$ [illegible] 0

[illegible]

1115 Calcular el coeficiente de seguridad que debería emplearse en la [illegible] Euler para que diera la misma capacidad de carga, para el acero [illegible] por la aplicación de (a) la [illegible] lineal dada por la ecuación (11.8 [illegible] ecuación (11.9) de Rankine-G[illegible]

Resolución

Calculamos el coeficiente de seguridad para los siguientes casos

a) Usando la fórmula lineal $\frac{P}{A} = 110 - 0{,}483\frac{L}{r}$

Para elementos primarios $L/r = 120$

$$\frac{P}{A} = 110 - 0{,}483\,(120) = 52{,}04 \text{ MPa}$$

Para el acero, aplicando Euler

$$\frac{P}{A} = \frac{E\pi^2}{(L/r)^2} = \frac{[illegible]}{(120)^2} = 137{,}08 \text{ MPa}$$

$$F_s = \frac{137{,}08}{52{,}04} \qquad F_s = 2{,}63$$

b) Usando la expresión de Rankine-Gordon

$$\frac{P}{A} = \frac{124}{1+\frac{1}{18\times10^3}(120)^2} = 68{,}88 \text{ MPa}$$

$$F_S = \frac{137{,}08}{68{,}88} \Rightarrow \boxed{F_S = 1{,}99}$$

Un perfil W360 x 134 se usa como columna con extremos articulados. Usando las especificaciones de la AISC, determinar la carga máxima que puede aplicársele si (a) L = 9 m y (b) L = 15 m, usando $\sigma_{pc} = 290$ MPa en ambos casos.

Resolución

Para determinar la carga máxima usando las especificaciones de la AISC para el perfil W360 x 134

$A = 17\,100$ mm² (área) ; $r_y = 94$ mm (radio menor) $\sigma_{pc} = 290$ MPa

De donde tenemos el límite de esbeltez

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{290\times10^6}} = 117$$

a) Si $L_e = L = 9$ m (extremos articulados)

$$\frac{L_e}{r} = \frac{9000}{94} = 96 < C_c = 117$$

El esfuerzo de trabajo está dado por

[illegible]

Donde $F_s = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^2} = \frac{5}{3} + \frac{3(96)}{8(117)} - \frac{(96)^3}{8(117)^3} = 1{,}9$

Luego reemplazando valores en

σ_{t} [illegible] $= 102{,}0$ MPa

La carga admisible es: $P = \sigma A$

$$P = (102.0 \times 10^6)(17\,100 \times 10^{-6}) \qquad P = 1740\ kN$$

b) Si $L_e = L = 15$ m

$$\frac{L_e}{r} = \frac{15\,000}{94} = 160 > C_c \quad 117$$

El esfuerzo de trabajo está dado por

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23 \ldots} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{\ldots 160} = 40.2\ MPa$$

Luego la carga admisible es $P = \sigma A$

$$P = (40.2 \times 10^6)(17\,100 \times 10^{-6}) \ldots$$

1117. Un perfil W200 x 100 se emplea como columna de 9 m con sus extremos empotrados. Empleando las especificaciones de la AISC ... de seguridad ... puede ... efectiva es ... Determinar la carga de seguridad si la columna está sujeta lateralmente en su punto medio. Use $\sigma_{pc} = 380$ MPa

Resolución

Para el perfil W200 x 100: $A = 12\,700\ mm^2$, $r_x = 94.5$ mm, $r_y = 53.8$ mm

L = 9 m (extremos empotrados)

a) Calculamos $C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}}$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{380\times10^6}} = 102$$

Además:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{\frac{3}{4}(9000)}{53.8} = 125 > C_c = 102$$

Entonces el esfuerzo de trabajo σ_T, está dado por

$$\sigma_T = \ldots\ MPa$$

Y la carga de seguridad es $P = \sigma A$

$$P = (65.9 \times 10^6)(12\,700 \times 10^{-6}) = 837\ kN$$

b) Del gráfico:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{\ldots}{53.8} = 58.55 < C_c$$

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{FS}$$

Entonces $\sigma_T = \left[1 - \frac{\ldots}{2(102)^2}\right]\frac{\ldots}{1.858} = 170.8$ MPa

y la carga de seguridad es, $P = \sigma A$

Por tanto $P = (170.8 \times 10^6)(12\,700 \times 10^{-6}) = 2200$ kN $\rightarrow$ $\boxed{P = 2200\ kN}$

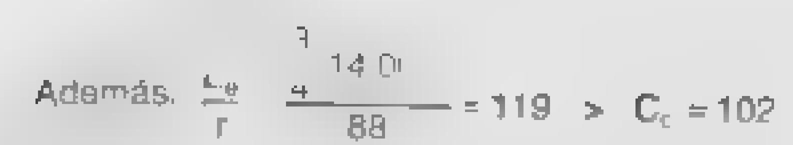
1118. Repetir el problema 1117 ... con un perfil W310 x 500

Resolución:

Para el perfil W310 x 500: $A = 63\,700\ mm^2$, $r_x = 163$ mm, $r_y = 88$ mm

L = 14 m

a) Sabemos que $C_c = 102$



Además, $\frac{L_e}{r} = \frac{\frac{3}{4}(14\,000)}{88} = 119 > C_c = 102$

Entonces el esfuerzo de trabajo σ_T, está dado por

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(119)^2} = 72.7 \text{ MPa}$$

Y la carga de seguridad es $P = \sigma A$

Por tanto: $P = (72.7\times10^6)(63\,700\times10^{-6}) \Rightarrow$ **P = 4631 kN**

b) Tenemos

$$\frac{L_e}{r} = \frac{0.35(14\,000)}{88} = 55 < C_c$$

Entonces

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(L_e/r)}{C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = 5/3 + \frac{3}{8}\frac{(55)}{(102)} - \frac{(55)^3}{8(102)^3} = 1.8$$

Luego,

$$\sigma = \dots = 175.5 \text{ MPa}$$

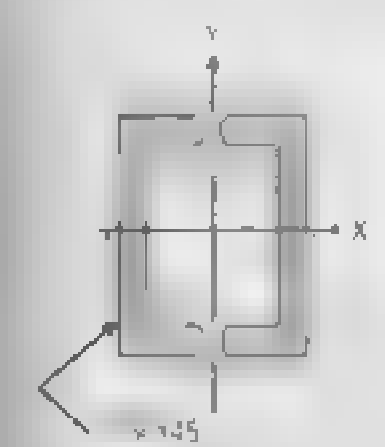
Y la carga de seguridad es $P = \sigma A$

Por tanto, $P = (175.5\times10^6)(63\,700\times10^{-6}) \rightarrow$ **P = 11 180 kN**

1119 Una columna de acero de 10 m de longitud se construye con dos perfiles C250 × 45 unidos mediante celosía, de manera que la sección compuesta tiene igual momento de inercia con respecto a los dos ejes principales. Determinar la carga de seg[illegible] [illegible] las especificaciones de la A[illegible] con $\sigma_{pc} = 380$ MPa

Resolución.

Para la sección compuesta tenemos lo siguiente



$r_x' = 86.9$ mm, $A' = 5670$ mm² } Para el C250 × 45 (tabla)

Entonces,
$r_x' = r_x = 86.9$ mm
$A = 2A' = 11\,340$ mm² } Toda la sección

Además: $L_e = L = 10$ m $\sigma_{pc} = 380$ MPa

Usando las expresiones de esbeltez y reemplazando los datos tenemos

$$C_c = \dots \qquad \frac{L_e}{r} = \frac{\dots}{86.9} = 115 > C_c$$

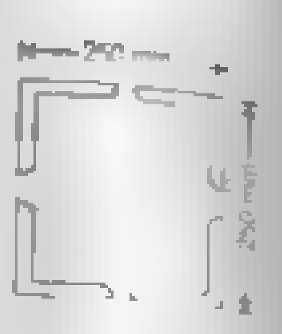
El esfuerzo de trabajo es

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{23(115)^2} = 77.87 \text{ MPa}$$

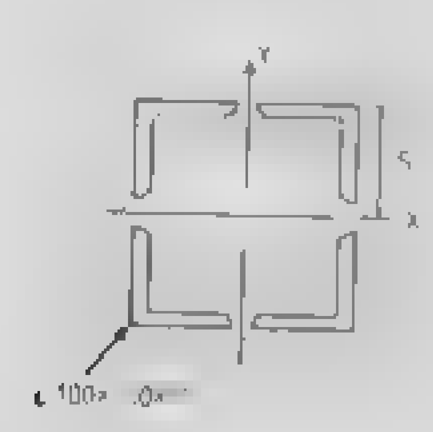
Así la carga admisible para esta sección es

$P = \sigma_T A = (77.87\times10^6)(11\,340\times10^{-6})$ [P = 883 kN]

1120. Cuatro ángulos de 100 × 100 × 10 mm se unen mediante placas en celosía para formar una sección compuesta, [illegible] nes de la AISC, con σ_{pc} = 290 MPa, determinar la longitud máxima que puede tener si ha de soportar una carga de 500 kN.
¿Cuál debe ser la longitud libre entre ángulos, de manera que su esbeltez sea, como máximo igual a las tres cuartas partes de la correspondiente a la sección compuesta?

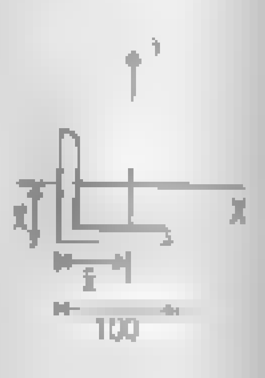


Resolución.



Tenemos los datos
P = 500 kN σ_{pc} = 290 MPa
[illegible]

Para el ángulo: (de tabla)
A = 1920 mm²
r' = 30.4 mm
I' = 1.77 × 10⁶ mm⁶
x̄ = 28.2 mm



Para la sección compuesta.

$$I = \Sigma(I_i + A_i d_i^2) \quad y \quad d_i = s - \bar{x} = 125 - 28.2$$

$$d_i = 96.8 \text{ mm}$$

$$I = 4(\underbrace{1.77 \times 10^6 + 1920 \times 96.8^2}_{17.99\times10^6}) = 4(19.76 \times 10^6)$$

$$A = \Sigma A_i = 4A' = 4(1920) = 7680 \text{ mm}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{4 \times 19.76 \times 10^6}{4 [\text{illegible}]}} = 101 \text{ mm}$$

La relación de esbeltez límite es

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{290 \times 10^6}} = 117$$

Asumimos
i) L = L_e (extremos articulados) ii) $L_e/r > C_c$

Entonces, aplicando: $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} \Rightarrow \frac{L_e}{r} = \sqrt{\frac{12\pi^2 E}{23\,P/A}}$

Reemplazando valores obtenemos

$$\frac{L_e}{r} = \sqrt{\frac{12\pi^2(200\times10^9)}{[\text{illegible}]}} = 125.8$$

Cumple ii) L_e/r = 125,8 > C_c = 117

$$L = L_e = 125.8(101) \Rightarrow L = 12{,}7 \text{ m}$$

Para obtener la separación libre entre ángulos

$$\frac{L'}{r'} = \frac{3}{4}\left(\frac{L_e}{r}\right) = \frac{3}{4}(125{,}8) = 94.35$$

De donde L' = 94.35(30,4) = 2.8 m

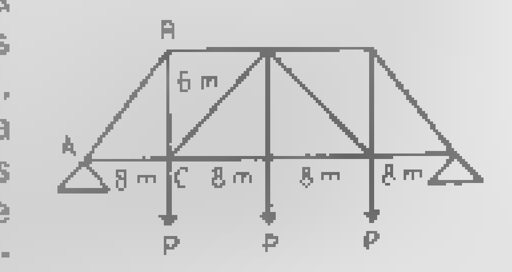
Verificamos que el esfuerzo $\sigma_y > \sigma_{aplicado}$

$$F_s = 5/3 + 3(L_e/r)/8C_c - (L'/r')^3/8C_c^3 = 1{,}9$$

$$\sigma = [\text{illegible}] \frac{94.35}{2 \cdot 117} [\text{illegible}] \frac{10^6}{1.9} [\text{illegible}] = 103 \text{ MPa}$$

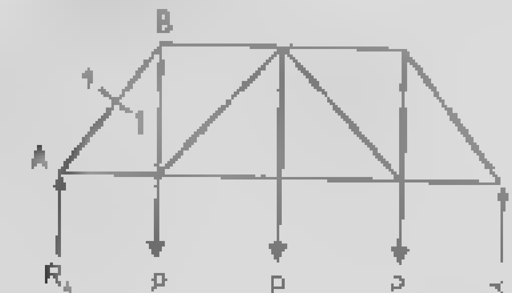
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{500 \times 10^3}{7680 \times 10^{-6}} = 65 < \sigma [\text{illegible}]$$

1121 En la estructura de un puente, representada en la figura, la barra AB está formada por dos perfiles C230 × 30 unidos mediante celosías, de manera que la sección resultante tenga igual momento de inercia respecto de los ejes de simetría. Si la carga de seguridad P viene dada por la resistencia de la barra AB, determinarla mediante las especificaciones AISC con σ_{pc} = 290 MPa



Resolución.

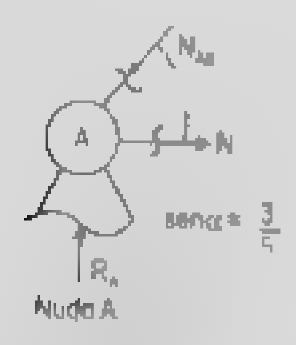
Debemos calcular P. Primeramente calculamos la fuerza axial en la barra AB



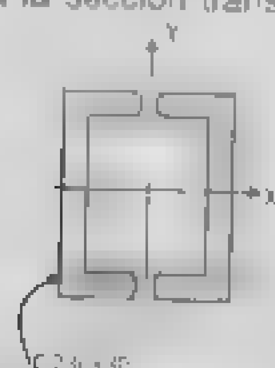
Por ser simétrico

$R_A = R_B = 3P/2$

Equilibrio en el nudo (A)



Para la sección transversal



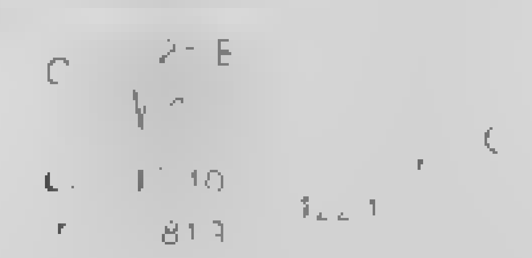
r = 81,9 mm

A = 2A' = 2(3800) = 7600 mm

Además: $L_e = L = 10$ m

290 MPa

Luego el esfuerzo de trabajo está dado por



$\sigma_T = \frac{N}{A} = \frac{12\pi^2 E}{23(\ldots)^2} \Rightarrow \frac{2{,}5P}{76\ldots} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{\ldots}$; $\boxed{P = 210\ kN}$

Determinar una sección W que pueda trabajar como columna de 4 m soportando una carga de 420 kN. Aplicar las especificaciones de la AISC con σ = 250 MPa

Resolución.

Usaremos tanteos

Tenemos lo siguiente

$L_e = 4$ m $\qquad$ P = 420 kN $\qquad$ $\sigma_{pc} = 250$ MPa

Para el acero con 250 MPa la relación de esbeltez límite es

$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = 126$

Primer ensayo

Para $L_e/r = 0$, $F_s = 5/3$ y $\sigma_T = \sigma_{pc}/F_s = \frac{250}{5/3} = 150$

Suponiendo un esfuerzo inicial de 80%. 0,80(150) = 120 MPa

De donde obtenemos un área requerida de

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{420\times10^3}{120\times10^6} = 3{,}5\times10^{-3}\ m^2 = 3500\ mm^2$$

De la tabla B-2, seleccionamos W200 × 31 con A = 4000 mm² y r = 32 mm

$$\frac{L_e}{r} = \frac{4\times10^3}{32} = 125 < 126$$

El esfuerzo de trabajo

$F_s = 5/3 + [3(L_e/r)] / [8C_c] - (L_e/r)^3 / 8C_c^3]$

$5/3 + [3(125)] / [8(126)] - (125)^3 / [8(126)^3] = 1{,}92$

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(125)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1{,}92} \Rightarrow \sigma_T = 66{,}1\ MPa$$

Por lo tanto la carga admisible es

$P = \sigma A = (66{,}1\times10^6)(3500\times10^{-6})$

$P = \sigma A = 231\ 350\ N = 231\ kN < 420\ kN$ (el perfil se rechaza)

Segundo ensayo

De la tabla B-2 seleccionamos W200 × 36 con $A = 4580\ mm^2$ y r ... 9

Para esta sección tenemos una relación de esbeltez de

$$\frac{L_e}{r} = \frac{4 \times 10^3}{40.9} = 98 < 126$$

Calculamos el esfuerzo de trabajo:

$$F_S = 5/3 + [3(98)] / [8(126)] - (98)^3 / [8(126)^3] = 1,9$$

σ_T ... 98 ... 8 MPa

Con una carga admisible de: $P = \sigma_T A$

$$P = (91,78 \times 10^6)(4580 \times 10^{-6}) = 420\ 352$$

$\therefore$ $P = 420\ 35\ kN > 420\ kN$

El perfil W200 × 36 tiene ...

$\Rightarrow$ W200 × 36 P = 420.35 kN

1123 Aplicando las especificaciones de AISC, determinar el perfil W más ligero para soportar una carga de 700 kN con una longitud efectiva de 5.5 m, suponiendo $\sigma_{pc} = 250$ MPa

Resolución:

El procedimiento para determinar el perfil W, será el de prueba-error

P = 700 kN $L_e = 5,5$ m $\sigma_{pc} = 250$ MPa

Calculamos la relación de esbeltez: C ... 126

Primer ensayo

Para $L_e/r = 0$ $\Rightarrow$ $F_S = 5/3$ y $\sigma_T = \frac{\sigma_{pc}}{F_S} = \frac{250}{5/3} = 150$

Considerando un esfuerzo ... de 80%.

$$0\ 80(150) = 120\ MPa$$

Para lo cual requerimos de un área

$$A = \frac{P}{\ldots} = 5.83 \times 10^{-3}\ m^2 = 5833\ mm^2$$

De la tabla B-2, seleccionamos W200 × 52 con $A = 6600\ mm^2$ y r = 51,8 mm

De donde $\frac{L_e}{r} = \frac{5.5 \times 10^3}{51.8} = 106 < 126$

Calculamos el esfuerzo del trabajo

$$F_S = 5/3 + [3(106) / [8(126)] - (126)^3 / [8(126)^3] = 1,9$$

... 85 MPa

Con una carga admisible de: $P = \sigma_T A$

$$P = (85 \times 10^6)(6600 \times 10^{-6})$$

$P = 561\ 000 = 561\ kN < 700\ kN$ (esta sección no aprueba)

Segundo ensayo

De la tabla B-2, seleccionamos los siguientes perfiles

...	P ... kN
...	P ... kN
W310 × 67	P = 674 kN

Escogemos un W250 × 67, con $A = 8550\ mm^2$ y r = 51 mm

1124 Repetir el problema anterior con una carga de 690 kN y $\sigma_{pc} = 345$ MPa.

Resolución

Para este caso tenemos:

P = 690 kN L_e = 5,5 m σ_{pc} = 345 MPa

Calculamos la relación de esbeltez: $C = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi^2\ 200 \times 10^9}{345 \times 10^6}} = 107$

Con el procedimiento del problema anterior seleccionamos un perfil W200 × ... con A = 6600 mm² y r = 51,9

De donde la relación de esbeltez es: $\frac{L_e}{r} = \frac{5.5 \times 10^3}{51.9} = 106 < 107$

Calculamos el esfuerzo de trabajo $F_S = 1.92$

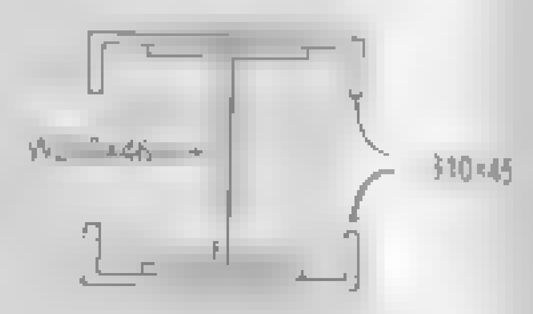
$$\sigma \quad \quad 2C \quad F \quad \quad 2(107, \quad \frac{345}{1.92} = 91.5\ \text{MPa}$$

Que presenta una carga admisible $P = \sigma A$

$$P \quad (91.5 \times 10^6)(7660 \times 10^{-6} = 700\ 890) \Rightarrow \boxed{P = 700\ \text{kN}}$$

Esta sección presenta mayor carga admisible que la carga a soportar

1125 Una columna de acero, con extremos articulados, de 10 m de altura se construye con un perfil W200 × 46 y dos C310 × 45 soldados entre sí como se indica en la figura. Determinar la carga axial de seguridad aplicando las especificaciones de la AISC con $\sigma_{pc} = 250\ \text{MN/m}^2$



Resolución.

Empezamos ... de los perfiles

Para el C310 × 45

$A' = 5690\ \text{mm}^2$ $\quad$ $I' = 67.3 \times 10^6\ \text{mm}^4$

Para el W200 × 46

$A'' = 5860\ \text{mm}^2$ $\quad$ $I'' = 15.3 \times 10^6\ \text{mm}^4$

Para toda la sección

$$A = 2A' + A'' = 2(5690) + 5860 = 17\ 240\ \text{mm}^2$$

$$I = 2I' + I'' = 149.9 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{149.9 \times 10^6}{17\ 240}} = 93.2\ \text{mm}$$

Además: $L_e = L = 10$ m (ext. articulados)

De donde: $C_c = 126$ (para $\sigma_{pc} = 250$ MPa)

$L_e / r = 10 \times 10^3 / 93.2 = 107$

Como $L_e / r < C_c$, entonces el esfuerzo de trabajo está dado por

$$F \quad \frac{5}{3} \quad \frac{3(107)}{8(126)} \quad \frac{(107}{8(126} \quad 1.9$$

$$\sigma_T \quad \quad 83.6\ \text{MPa}$$

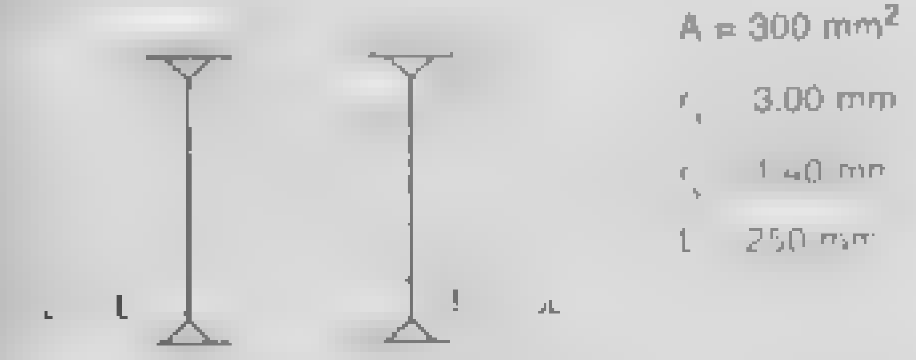
Para toda la sección la carga de trabajo es

$$P = \sigma A = (83.6 \times 10^6)(17\ 240 \times 10^{-6}) = 1\ 441\ 264$$

$$\Rightarrow \boxed{P \quad 1441\ \text{kN}}$$

1126 Un ... na tiene una sección recta con las siguientes propiedades ... 300 ... soldadas de un ... X ... Y. Tomando en cuenta la longitud efectiva, determinar la carga de seguridad si la longitud real es de 250 mm, aplicando la ecuación (11-9) de Rankine-Gordon.

Resolución



$A = 300\ \text{mm}^2$

$r_x \quad 3.00$ mm

$r_y \quad 1.40$ mm

$L \quad 250$ mm

Pandeo con respecto al eje X $\quad L_e = L = 250$ mm

Con una relación de esbeltez de $\frac{L}{r_x} = \frac{250}{3.0} = 83.33$

El esfuerzo medio es $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{124}{1 + \frac{1}{18000}(83.33)^2} = 89.48\ \text{MPa}$

De donde $\quad P = \sigma A = (89.48 \times 10^6)(300 \times 10^{-6}) = 26\ 844$ N

Pandeo con respecto al eje Y

$$0.5L = 0.5(250) = 125 \text{ mm}$$

Con una relación de esbeltez de $\frac{L_e}{r_y} = \frac{125}{1.4} = 89.28$ MPa

El esfuerzo medio es $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{124}{1\ldots}$ [illegible]

Con una carga de $P = \sigma A = (85.94 \times 10^6)(300 \times 10^{-6})$ [illegible]

El menor valor de la carga es $\boxed{P = 25.8 \text{ kN}}$

1127 Obtener una fórmula parabólica de la forma general $P/A = \sigma - C(L/r)^2$ que sea aplicable a las columnas de aleación de aluminio con extremos articulados. Supóngase que la fórmula parabólica tiene que ser tangente a la fórmula de Euler con un factor de seguridad igual a 2. $\sigma = 110$ MPa y $E = 70$ GPa. *Indicación*: en las dos fórmulas, iguale los valores de las cargas unitarias y de las derivadas de estas con respecto a la esbeltez.

Resolución.

Sabemos que $\frac{P}{A} = \sigma - C(L/r)^2$ ... (I) $\Rightarrow \left(\frac{P}{A}\right)' = -2C(L/r)$ ... (α)

Por Euler $\frac{P}{A} = \frac{E\pi^2}{(L/r)^2}$

De donde el esfuerzo de trabajo es:

$$\frac{P}{A} = \frac{1}{FS}\frac{E\pi^2}{(L/r)^2} \quad \text{(II)} \quad \Rightarrow \left(\frac{P}{A}\right)' = \frac{-2E\pi^2}{(FS)(L/r)^3} \quad \ldots (\beta)$$

De (α) y (β) $\left(\frac{L}{r}\right)^4 = \frac{E\pi^2}{(FS)C}$

Igualando (I) y (II) $\sigma - C(L/r)^2 = \frac{E\pi^2}{FS\ldots}$ [illegible]

$$(L/r)^2\sigma - C\left(\frac{E\pi^2}{F.S(C)}\right) = \frac{E\pi^2}{F.S.} \Rightarrow \frac{L}{r} = \sqrt{\frac{2\pi E}{\sigma(F.S)}}$$

Calculamos el valor de la esbeltez (límite) donde la tangente de las dos curvas son iguales

$$\frac{L}{r} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{(\sigma)(F.S.)}} = \sqrt{\frac{2(\pi^2)(70 \times 10^7)}{(110 \times 10^6)(2)}} = 79.3 \quad \therefore \frac{L}{r} < 79.3$$

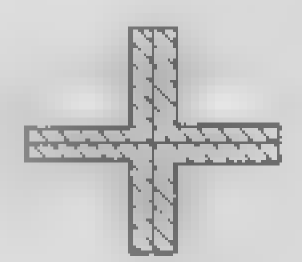
Igualamos los esfuerzos en este límite para calcular C

[illegible]

De donde $C = 8757 \approx 8760$

$$\boxed{\frac{P}{A} = (110 \times 10^6) - 8760\left(\frac{L}{r}\right)^2} \text{, para } \frac{L}{r} < 79.3$$

1128 Cuatro ángulos de 100 × 100 × 13 mm se remachan adosados como indica la figura. Determinar la carga de seguridad si se utilizan como columna de 4 m de extremos articulados. Aplicar las especificaciones de la AISC con $\sigma_{pc} = 250$ MPa.



Resolución:

Propiedades del ángulo 100 × 100 × 13

$A^L = 2430 \text{ mm}^2$ $\quad I^L = 2.24 \times 10^6 \text{ mm}^4$ $\quad \bar{x}^L = 29.8$ mm

Para toda la sección

$$A = \Sigma A_i^L = 4A^L = 9720 \text{ mm}^2$$

$$I = \Sigma\left[I_i + A_i^L(\bar{x}^L)^2\right] = 4\left[I^L + A^L(\bar{x}^L)^2\right]$$

$$I = 4[2.24 \times 10^6 + 2430(29.8)^2] = 17.6 \times 10^6 \text{ m}^4$$

216×10^6

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{17.6 \times 10^6}{9720}} = 42.55$$

Además, $L_e = 4$ m y $\sigma_{pc} = 250$ MPa

Calculamos la relación de esbeltez: $C_C = 126$ (para σ_{pc} [illegible] 250 MPa)

$L_e/r = 4 \times 10^3/42{,}55 = 94$

Podemos ver que $L_e/r < C_c$, entonces el esfuerzo de trabajo es

[illegible]

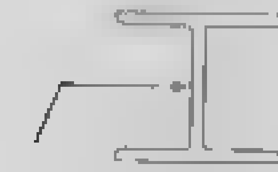
Para esta sección la carga de segundades

$P = \sigma A = (95{,}5 \times 10^6)(9720 \times 10^{-6}) = 928$ kN $\quad$ **P = 928 kN**

1129. Determinar la carga axial de seguridad que pueda aplicarse a una colu[illegible] [illegible] 1 m y [illegible] 3 m. Suponga[illegible] en cada caso que las propiedades geométricas del perfil son idénticas a las de un perfil de acero S310 x 52

Resolución

Las propiedades geométricas son las del perfil S310 x 52



S310x52

$A = 6650\ mm^2$ [illegible] Tabla B [illegible]

Las especificaciones para la aleación de aluminio del tipo 2014-T6 son

$\sigma_T = 193$ MPa $\qquad L/r < 12$

$\sigma_T = 212 - 1{,}59\frac{L}{r}$ $\qquad 12 < L/r < 55$

$\sigma_T = \frac{372 \times 10^3}{(L/r)^2}$ $\qquad L/r > 55$

a) Para L = 1 m tenemos una relación de esbeltez de

$\frac{L}{r} = \frac{1 \times 10^3}{25} = 40 \quad \Rightarrow \quad 12 < \frac{L}{r} < 55$

Luego el esfuerzo es: $\sigma_T = 212 - 1{,}59\,(40) = 148$ MPa

Esto da una carga axial de seguridad

$P = \sigma A = (148 \times 10^6)(6650 \times 10^{-6})$ = 984 200 $\Rightarrow$ **P = 984 kN**

b) Para L = 3 m, presenta una relación de esbeltez de

$\frac{L}{r} = \frac{3 \times 10^3}{25} = 120 > 55$

Entonces, el esfuerzo es: $\sigma_T = \frac{372 \times 10^3}{(120)^2} = 25{,}83$ MPa

Luego, la carga axial de seguridad es

$P = \sigma A = (25{,}83 \times 10^6)(6650 \times 10^{-6}) = 171\ 769 \quad \Rightarrow$ **P = 172 kN**

1130. Re[illegible] 1129 [illegible] propiedades geométricas del perfil son idénticas a las de un perfil de acero S250 x 52

Resolución:

Para este caso las propiedades geométricas corresponden al perfil S250 x 52

$A = 6660\ mm^2$
$r = 23{,}1\ mm$ } Tabla B [illegible]

Las especificaciones para la aleación de aluminio del tipo 2014-T6 son,

$\sigma_T = 212 - 1{,}59\left(\frac{L}{r}\right)$, $12 < \left(\frac{L}{r}\right) < 55$

$\sigma_T = \frac{372 \times 10^3}{(L/r)^2}$, $\frac{L}{r} > 55$

a) Para L = 1 m, la relación de esbeltez es

$\frac{L}{r} = \frac{1 \times 10^3}{23{,}1} = 43{,}29$ de donde $\sigma_T = 212 - 1{,}59\,(43{,}29) = 143$ MPa

Esto da una carga axial de seguridad:

$P = \sigma A = (143 \times 10^6)(6660 \times 10^{-6}) = 952\ 380$ N $\Rightarrow$ **[illegible] 2 kN**

b) Para L = 3 m, la relación de esbeltez es: $\frac{L}{r}=\frac{3\times10^3}{23.1}=129{,}87>55$

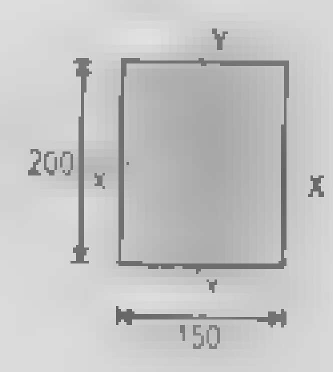
De donde, $\sigma_T=\frac{372\times10^4}{(129{,}87)^2}=22$ MPa

Luego, la carga axial de segundad es

$P=\sigma A=(22\times10^6)(6660\times10^{-6})=146\ 520$ N $\Rightarrow$ P = 146 kN

1131 Determinar la carga axial de seguridad de una columna de roble de sección rectangular de 150 x 200 mm si su longitud es a) 2 m y (b) 4 m, E = 11,5 GPa

Resolución:



$A=(150)(200)=30\ 000$ mm² $I_y=\frac{1}{12}(200)(150)^3=56{,}25\times10^6$

$r_y=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{56{,}25\times10^6}{30\ 000}}=43{,}3$ $r=\frac{d}{\sqrt{12}}=\frac{150}{\sqrt{12}}=43{,}3$

Para columnas de madera N.L.M.A. se recomienda la fórmula de Euler en la siguiente forma. $\sigma_T=\frac{3{,}619\,E}{(L/r)^2}$

a) Para L = 2 m: $\sigma_T=\frac{3{,}619(11{,}5\times10^9)}{(2\times10^3/43{,}3)^2}=19{,}5$ MPa

La carga axial de segundad es

$P=\sigma A=(19{,}5\times10^6)(30\ 000\times10^{-6})$ $\Rightarrow$ P = 585 kN

b) Cuando L = 4 m

$\sigma_T=\frac{3{,}619(11{,}5\times10^9)}{(4\times10^3/43{,}3)^2}=4{,}87$ MPa

Entonces la carga axial de segundad es.

$P=\sigma A=(4{,}87\times10^6)(30\ 000\times10^{-6})$ $\Rightarrow$ P = 146 kN

1132 Repetir el problema 1131 para una columna de pino de sección rectangular de 50 x 200 mm para la cual E = 11,2 GPa

Resolución

La dimensión mínima es d = 50

El radio de giro vale $r=d/\sqrt{12}$

Entonces $r=50/\sqrt{12}=14{,}4$ mm y $A=50\times200=10\ 000$ mm

Aplicando la expresión recomendada por N.L.M.A. para calcular el esfuerzo, tenemos para

a) L = 2 m $\sigma_T=\frac{3{,}619E}{(L/r)^2}=\frac{3{,}619(11{,}2\times10^9)}{(2\times10^3/14{,}4)^2}=2{,}1$ MPa

De donde $P=\sigma A=(2{,}1\times10^6)(10\ 000\times10^{-6})$ $\Rightarrow$ P = 21 MPa

b) L = 4 m: $\sigma_T=\frac{3{,}619(11{,}2\times10^9)}{(4\times10^3/14{,}4)^2}=0{,}53$ MPa

De donde $P=\sigma A$

$P=(0{,}53\times10^6)(10\ 000\times10^{-6})$ $\Rightarrow$ P = 53 kN

1133 Problema ilustrativo

En los problemas siguientes usar el planteamiento del máximo esfuerzo y las especificaciones de la AISC para columnas, a menos que se indique otra cosa

1134. Una perfil W360 x 122 se emplea como columna de 10 m de longitud efectiva. Determinar la carga máxima que puede soportar con una excentricidad de 300 mm. ¿Dónde se debe situar la carga, sobre el eje X o sobre el Y? Supóngase $\sigma_{pc}=290$ MPa

Resolución.

La tabla B-2 da las propiedades de un perfil W360 × 122 como

$A = 15\,500\ mm^2$ $\quad S_x = 2010 \times 10^3\ mm^3$ $\quad r = 63\ mm$

La relación de esbeltez $L_e/r = 10 \times 10^3 / 63 = 158.7$

Para $\sigma_{pc} = 290$ MPa, la relación de esbeltez límite es

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{290\times10^6}} = 117$$

Ya que $L_e/r > C_c$, el esfuerzo de trabajo es

$$\sigma = \frac{12\pi^2 (200\times10^9)}{23(158.7)^2} = 40.89\ MPa$$

Usando el enfoque de máximo esfuerzo

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S} \Rightarrow 40.89 \times 10^6 = \frac{P}{15\,500\times10^{-6}} + \frac{0.3P}{2010\times10^{-6}}$$

De donde $P = 191 \times 10^3$ $\Rightarrow$ $\boxed{P = 191\ kN}$

Esta carga está situada sobre el eje Y

1135 Repetir el problema anterior si la longitud es de 4.5 m

Resolución.

De la tabla B-2, el perfil W360 × 122 tiene las propiedades

$A = 15\,500\ mm^2$ $\quad S_x = 2010 \times 10^3\ mm^3$ $\quad r = 63\ mm$

La relación de esbeltez $L_e/r = 4.5 \times 10^3/63 = 71.4$

Para $\sigma_{pc} = 290$ MPa, la relación de esbeltez crítica es $C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = 117$

De donde $L_e/r < C_c$, el esfuerzo de trabajo es como sigue

$$F = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = \ldots + \frac{\ldots}{8\ldots} - \frac{71.4}{8\ldots} = 1.87$$

Entonces: $\sigma_T = \ldots \left[1 - \frac{(71.4)^2}{2(117)^2}\right] \frac{290}{1.87} = 126.2\ MPa$

Usando el enfoque de máximo esfuerzo

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S} \Rightarrow 126.2 \times 10^6 = \frac{P}{15\,500\times10^{-6}} + \frac{0.3\,P}{2010\times10^{-6}}$$

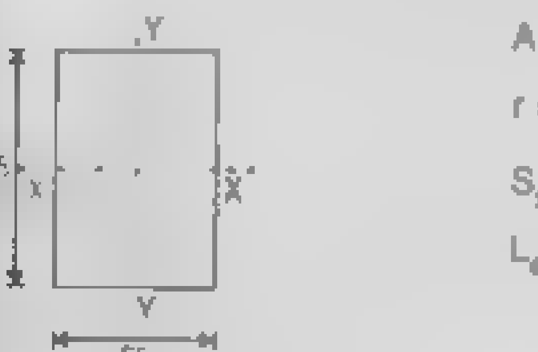
De donde $P = 590 \times 10^3$ N $\Rightarrow$ $\boxed{P = 590\ kN}$

Aplicado sobre el eje Y

1136. Una barra prismática de acero de 50 × 75 mm tiene una longitud de 1,5 m. Calcular la carga máxima que puede soportar con una excentricidad de 120 mm con respecto a los ejes geométricos. La barra soporta también una carga axial de 50 kN. Suponga $\sigma_{pc} = 250\ MN/m^2$

Resolución.

Para la sección prismática tenemos



$A = (50)(75) = 3750\ mm^2$

$r = d/\sqrt{12} = 50/\sqrt{12} = 14.4\ mm$

$S_x = (50)(75)^2/6 = 46\,875\ mm^3$

$L_e = 1.5\ m$

Tiene una relación de esbeltez de $L_e/r = 1.5 \times 10^3/14.4 = 104$

Para $\sigma_{pc} = 250$ MPa, la relación de esbeltez crítica es:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9)}{250\times10^6}} = 126$$

Ya que $L_e/r < C_c$, el esfuerzo de trabajo se determina como sigue:

$$F = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(104)}{8(126)} - \frac{(104)^3}{8(126)^3} = 1.9$$

De donde $\sigma_T = \left[1 - \frac{(104)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1{,}9} = 86{,}7$ MPa

Usando el enfoque de máximo esfuerzo consideramos que la columna a [illegible] como un miembro corto sometido a compresión y cargado excéntricamen[illegible]

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S}$$

$$86{,}7 \times 10^6 = \frac{(50 \times 10^3 + P)}{3750 \times 10^{-6}} + \frac{0{,}12P}{46\,875 \times 10^{-9}} \Rightarrow \boxed{P = 25{,}9 \text{ kN}}$$

1137 Un tubo de acero de 2,5 m de longitud, empotrado en su extremo inferior y libre en el superior, soporta un gran cartel cuyo centro de gravedad dista 0,60 m del eje del tubo. Determinar su peso máximo si el diámetro exterior del tubo es de 140 mm, su sección de 2800 mm² y su momento de inercia de 6,32 × 10⁶ mm⁴. Usa $\sigma_{pc} = 250$ MN/m²

Resolución.

Empotrado

$L = 2{,}5$ m y $e = 0{,}6$ m
$D = 140$ mm
$A = 2800$ mm²
$I = 6{,}32 \times 10^6$ mm⁴
$\sigma_{pc} = 250$ MPa
$L_e = 2L = 5$ m (un extremo libre
$S = I/(D/2) = 90{,}2 \times 10^3$ mm

El radio de giro es: $r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{6{,}32 \times 10^6}{2800}} = 47{,}5$

Tiene una relación de esbeltez de: $\frac{L_e}{r} = \frac{5000}{47{,}5} = 105$

Para $\sigma_{pc} = 250$ MPa, la relación de esbeltez límite es

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{250 \times 10^6}} = 126$$

Ya que $L_e/r < C_c$, el esfuerzo de trabajo se calcula como sigue

$$F_S = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(105)}{8(126)} - \frac{105^3}{8(126)^3} = 1{,}9$$

De donde

$$\sigma = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{pc}}{F_S} = \left[1 - \frac{(105)^2}{2(126)^2}\right]\frac{250}{1{,}9} = 85{,}9$$

Considerando [illegible] P [illegible] máx de esfuerzo $\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S}$

$$85{,}9 \times 10^6 = \frac{P}{2800 \times 10^{-6}} + \frac{0{,}6P}{90{,}2 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{P = 12{,}25 \text{ kN}}$$

1138 [illegible] W360 × 134 [illegible] 6 m [illegible] Soporta una carga [illegible] kN y [illegible] 220 kN [illegible] de menor momento de inercia. Determinar la excentricidad máxima admisible de la carga, con $\sigma_{pc} = 250$ MPa

Resolución.

De la tabla B-2, el perfil W360 × 134 tiene las siguientes propiedades geométricas

$A = 17\,100$ mm² $r_y = 94$ mm $S_x = 2330 \times 10^3$ mm³

Además $L = 6$ m, $P_c = 260$ kN y $P = 220$ kN

Tiene una relación de esbeltez de $\frac{L_e}{r} = \frac{6 \times 10^3}{94} = 63{,}8$

Para $\sigma_{pc} = 250$ MPa, la relación de esbeltez crítica es

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{pc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{250 \times 10^6}} = 126$$

Como $L_e/r < C_c$, entonces el esfuerzo de trabajo es:

$$F_S = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3(63{,}8)}{8(126)} - \frac{(63{,}8)^3}{8(126)^3} = 1{,}84$$

σ_T ... 63 8 ... 26 ...

... A S

$$118 \times 10^6 = \frac{260\times10^3 + 220\times10^3}{17\,100\times10^{-6}} + \frac{e(220\times10^3)}{2330\times10^{-6}}$$

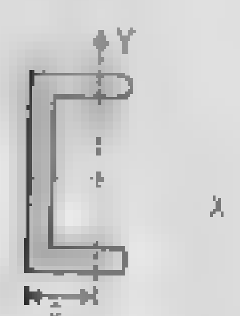
De donde: e = 0,952 m ⇒ e = 952 mm

Esta es la excentricidad máxima

1139 Un canal C310 × 45 se usa como columna articulada en sus extremos, de 2,2 ... 50 kN sobre el eje X? Suponga que σ_{pc} = 380 MPa y que el esfuerzo de tensión está limitado a 140 MN/m² ¿Sobre qué lado del eje Y ha de ... se la carga?

Resolución:

De la tabla B-4 las propiedades geométricas del perfil C310 × 45



A = 5690 mm²

r_y = 19 3 mm

S_y = 33.6 × 10³ mm³

I_y = 2.12 × 10⁶ mm⁴; x ...

L_e = 2 2 m

P = 50 kN

$S = I_y / \bar{x}$ = 124,7 × 10³ mm³

La relación de esbeltez es L_e/r = 2200 / 19 3 = 114

Para σ_{pc} = 380 MPa, la relación de esbeltez límite es

C ...

Ya que $L_e/r > C_c$, el esfuerzo de trabajo se determina como sigue

$$\frac{12\pi^2E}{...} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{...} = 79 \text{ MPa}$$

Usando el criterio de máximo esfuerzo $\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S}$

$$... = \frac{50\times10^3}{...} + \frac{e(50\times10^3)}{...} \Rightarrow e = 0,195 \text{ m}$$

Considerando el límite del esfuerzo de tensión

$$140\times10^6 = -\frac{50\times10^3}{3920\times10^{-6}} + \frac{e(50\times10^3)}{28.2\times10^{-6}} \Rightarrow e = 0\,0999 \text{m} = 100 \text{ mm}$$

Escogemos el menor ...

Colocado a la izquierda del eje Y

1140. Repetir el problema 1139 usando un canal C310 × 31

Resolución

De la tabla B-4, las propiedades geométricas del perfil C310 × 31 son

A = 3920 mm²

S = 28,2 × 10³ mm³

x = 17,5 mm

r_y = 20,1 mm

I_y = 1,59 × 10⁶ mm⁴

S' = $I_y / \bar{x}$ = 90.8 × 10³ mm³

P = 50 kN

La relación de esbeltez es L_e/r = 2200 / 20,1 = 109 5

Para σ_{pc} = 380 MPa la relación de esbeltez crítica es

$$C = \sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_{pc}}} ... 2$$

Ya que $L_e/r > C_c$, el esfuerzo de trabajo se determina como sigue

$$\frac{12\pi^2E}{...} = \frac{12\pi^2(200\times10^9)}{...} = 85\,8 \text{ MPa}$$

Usando el criterio de máximo esfuerzo $\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S}$

$$85.8 \times 10^6 = \frac{50 \times 10^3}{3920 \times 10^{-6}} + \frac{e \quad [illegible]}{90.8 \times 10^{-6}} \qquad e = 0.132 \text{ m}$$

Considerando el límite del esfuerzo de tensión

$$110 \times 10^6 \quad \frac{[illegible] \times 10^3}{3920 \times 10^{-6}} \quad \frac{e(50 \times 10^3)}{28.2 \times 10^{-6}} \qquad e = [illegible]86 \text{ m}$$

Por lo tanto, la excentricidad es el menor $\boxed{e = 86 \text{ mm}}$

Colocado a la izquierda del eje Y

1141 Un perfil W360 × 134 va emplearse como columna con una longitud de 9 m. La columna soporta una carga axial de 260 kN y una excentricidad de 360 kN que actúa sobre el eje Y. Determinar la excentricidad máxima de la carga 360 kN usando el método del máximo esfuerzo y la fórmula lineal de la ecuación (11·8)

Resolución:

De la tabla B-2 las propiedades del perfil W360 × 134 son

$A = 17\,100 \text{ mm}^2$ $\qquad S_x = 2330 \times 10^3 \text{ mm}^3$ $\qquad r$ [illegible] mm

Además, $L = 9$ m

Se tiene una relación de esbeltez de: $\frac{L}{r} = \frac{9000}{[illegible]4} = [illegible] \qquad 30 < \frac{L}{r} < 1[illegible]$

Podemos aplicar la fórmula lineal

$$\sigma_T = 110 - 0{,}483\left(\frac{L}{r}\right) = 110 - 0{,}483\,(95{,}7) = 63{,}7 \text{ MPa}$$

Para calcular la excentricidad usamos el criterio del máximo esfuerzo

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S} \qquad 63.7 \times 10^6 = \frac{260 \times 10^3 + 360 \times 10^3}{17\,100 \times 10^{-6}} + \frac{e(360 \times 10^3)}{2330 \times 10^{[illegible]}}$$

De donde: $e = 0{,}178$ m $\Rightarrow \boxed{e = 178 \text{ mm}}$

1142 Repetir el problema 1141 usando un perfil W60 × 347

Resolución

De la tabla B-2, las propiedades geométricas del perfil W360 × 347 son

$A = 44\,200 \text{ mm}^2$ $\qquad S_x = 6140 \times 10^3 \text{ mm}^3$ $\qquad r_y = 104$ mm

Además $L = 9$ m

Para esta sección la relación de esbeltez es

$$\frac{L}{r} = \frac{[illegible]}{104} = 86{,}5 \quad \Rightarrow \quad 30 < \frac{L}{r} < 120$$

Entonces podemos aplicar la fórmula lineal

$$\sigma_T = 110 - 0.483(86.5) = 68.22 \text{ MPa}$$

Para calcular la excentricidad usamos el criterio del máximo esfuerzo

$$\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S} \Rightarrow 68{,}22 \times 10^6 = \frac{260 \times 10^3 + 360 \times 10^3}{44\,200 \times 10^{-6}} + \frac{e(360 \times 10^3)}{6140 \times 10^{-6}}$$

De donde $e = 0.924$ m $\Rightarrow \boxed{e = 924 \text{ mm}}$

CAPÍTULO 12

UNIONES REMACHADAS Y SOLDADAS

A menos que se diga lo contrario, se considerarán como los esfuerzos admisibles los valores $\tau = 60$ MPa, $\sigma_v = 130$ MPa y $\sigma_t = 80$ MPa

12.1 Problema ilustrativo

12.2 La unión longitudinal de una caldera cilíndrica de placa de 14 mm tiene una resistencia de 350 kN en la longitud de 400 mm. La eficacia de las uniones circunferenciales es del 45% y el esfuerzo admisible a tensión es de 80 MPa. Determinar el máximo diametro de la caldera si la presión interior de trabajo es de 1,4 MPa

Resolución

Sabemos: $2P = pDL$, de donde: $\frac{2P}{pL} = D$ (Longitud)

Reemplazando: $D = \frac{2\times 350\times 10^3}{1{,}4\times 10^6\times 400\times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{D = 1{,}25\ m}$

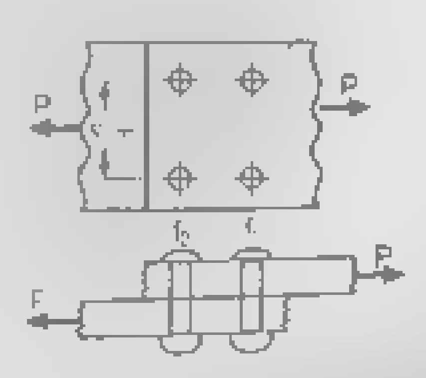
12.3 Una unión por solape de dos filas de remaches constituye la unión circunferencial de una caldera cilíndrica de 1,50 m de diámetro. El paso de los remaches es de 80 mm, el diámetro de los orificios es de 17,5 mm y el espesor de la placa, de 12 mm. Determinar la resistencia de la unión por sección tipo, la eficacia y la máxima presión interior admisible

Resolución

En la figura siguiente

$D = 1{,}50$ m; $\phi_{orificio} = 17{,}5$ mm

$e = 12$ mm



Cálculo previo.

Corte simple: $P_s = \frac{\pi d^2}{4}\times \tau$

$$P_s = \pi \times \frac{(17{,}5 \times 10^{-3})^2 \times 60 \times 10^6}{4} = 14{,}4317 \text{ kN} \Rightarrow P_s = 14{,}4317 \text{ kN}$$

Contacto con remache. P_b

$$P_b = ed\sigma_b = 12 \times 10^{-3} \times 17{,}5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P \text{ [illegible]}$$

a) Capacidad con remache: (fila 1) P_r

Fila 1 $1 \times 14{,}4317$ [illegible] $14{,}4317$ kN
Fila 2 $1 \times 14{,}4317 =$ [illegible] $4{,}4317$ kN
P [illegible] $2 \times 14{,}4317 = 28{,}8633825$ kN

b) Capacidad de placas

Fila 1. $P_1 = (80 - 2 \times 17{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 60$ kN

Fila 2 $P_2 = 60 + 14{,}4317 \Rightarrow P_2 = 74{,}4317$ kN

Elegimos el menor de P_r, P_1 y P_2

Luego $\boxed{P = 28{,}8633825 \text{ kN}}$ es la resistencia de la unión

La máxima presión en junta circunferencial es

$$4P = pDL$$

$$p = \frac{4P}{DL}; \quad D = 1{,}5 \text{ m}; \ P = 28{,}86 \text{ kN}; \ L = 80 \text{ mm}$$

$$p = \frac{4 \times 28{,}8633825 \times 10^3}{1{,}5 \times 80 \times 10^{-3}} \Rightarrow p = 0{,}96211275 \text{ MPa} \Rightarrow \boxed{p = 962{,}11275 \text{ kPa}}$$

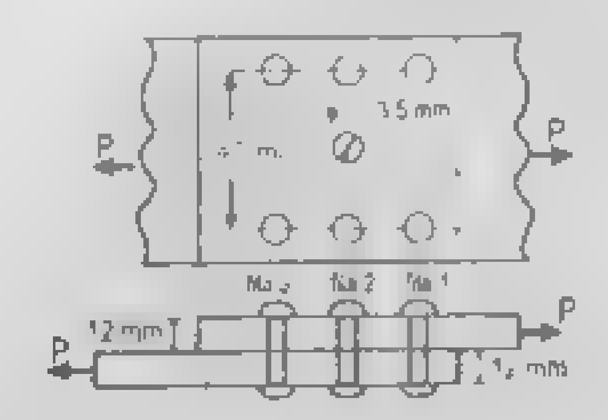
(máxima presión tanque)

Eficacia n

$$n = \frac{28{,}8633825 \times 10^3}{80 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \Rightarrow \boxed{n = 36{,}93\%}$$

1204. La costura longitudinal de una caldera es una unión por solape de 3 filas de remaches, con el paso de las filas extremas igual a 140 mm y, el de la intermedia de 70 mm. El diámetro de los orificios es de 23,5 mm y el espesor de la placa de 12 mm. Determinar la resistencia de la sección tipo y su eficacia.

Resolución:



Cálculos previos: por remache

Corte simple: $P_s = \dfrac{\pi (23{,}5 \times 10^{-3})^2}{4} \times 60 \times 10^6$

$P_s = 26{,}02416814$ kN

Contacto: $P_b = ed\sigma_b$

$P_b = 23{,}5 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \times 12 \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 36{,}667$ kN

a) Capacidad de remaches. P_r

Fila 1: 26,02416814 kN Fila 2: 2 × 26,024 kN Fila 3: 26,02416 kN

Luego: $P_r = 4 \times 26{,}0241681 \Rightarrow P_r = 104{,}0966726$ kN

b) Capacidad de placas

Fila 1: $P_1 = (140 - 23{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6$

$P_1 = 111{,}840$ kN

Fila 2 $P_2 = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 26{,}024 \times 10^3$

P_2 [illegible] $115{,}340$ kN

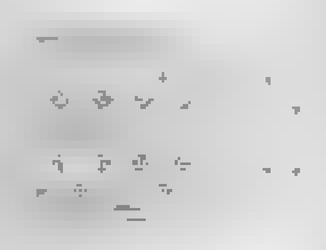
Fila 3 innecesario $P_3 > P_1$

La resistencia es el menor de P_r, P_1, P_2 y P_3 ⇒ $P = 104{,}09667$ kN (resistencia)

Eficacia n

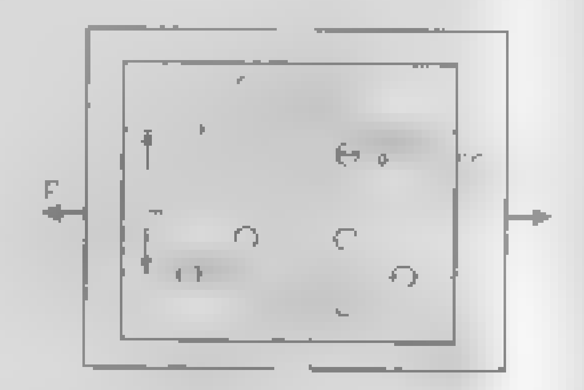
$$n = \frac{104{,}09667 \times 10^3}{140 \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \times 100 = 77{,}453\% \Rightarrow \boxed{n = 77{,}453\%}$$

1205. Las características de una unión doble a tope, tal como la de la figura son: diámetro de los orificios, 23,5 mm, paso mayor, 140 mm, paso menor 70 mm espesor de las placas principales 14 mm, y de los cubrejuntas, 10 mm. Calcular la resistencia de la sección tipo y su eficacia



Resolución.

$\phi = 23{,}5$ mm, $e = 14$ mm, $e' = 10$ mm

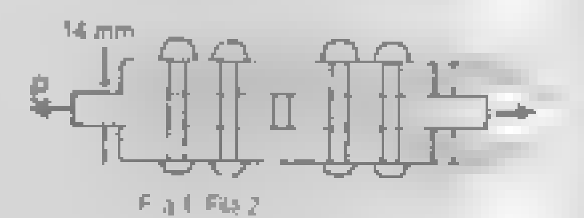


Previos cálculos, por remache

Corte doble: $P_s = 2 \times \frac{\pi d^2}{4} \times \tau$

$$P_s = \pi \times \frac{(23{,}5 \times 10^{-3})^2}{2} \times 60 \times 10^6$$

⇒ $P_s = 52{,}04833$ kN



Contacto con placa P_b

$$P_b = (14 \times 10^{-3})(23{,}5 \times 10^{-3}) \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 42{,}77 \text{ kN}$$

Contacto con cubrejuntas: P_b'

$P_b' = (10 \times 10^{-3})(23{,}5 \times 10^{-3}) \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 30{,}55$ kN

a) Capacidad de remaches

Fila 1 contacto con placa 42,77 kN

Fila 2 contacto con placa 2 × 42,77 = 85,54 kN

Luego $P_r = 128{,}31$ kN

b) Capacidad de placa y cubrejuntas

Placa principal

Fila 1 $P_1 = (140 - 23{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 130{,}48$ kN

Fila 2 $P_2 = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 42{,}77$ kN ⇒ $P_2 = 146{,}93$ kN

Cubrejuntas fila 2, crítica

$P_C = (140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 74{,}4$ kN

Dos cubrejuntas $2 \times 74{,}4 = 148{,}8$ kN ⇒ $P_{Ctotal} = 148{,}8$ kN

Tomamos mínimo de P_r, P_1, P_2 y P_C

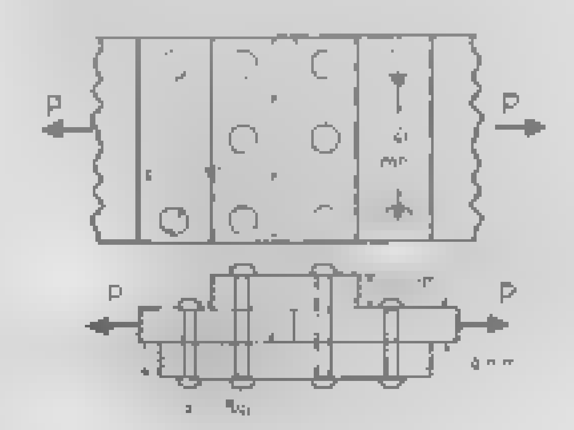
Resistencia = 128,31 kN (mínimo)

Eficacia n

$$\frac{128{,}31 \times 10^3}{140 \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \times 100\% \Rightarrow \boxed{n = 81{,}83\%}$$

1206. Una unión remachada doble a tope a presión, en la que el cubrejuntas superior abarca únicamente las filas interiores de remaches mientras que el inferior abarca todas, tiene las siguientes características: diámetro de los orificios, 23,5 mm, espesor de las placas principales, 14 mm, espesor de los cubrejuntas, 10 mm. Paso menor, 70 mm y paso mayor 140 mm. Determinar la resistencia de la sección tipo y la eficacia de la unión

Resolución.



Cálculos previos: por remache

Cortes simple: $P_s = \dfrac{\pi \times (23{,}5 \times 10^{-3})^2}{4} \times 60 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 26{,}02417$ kN

Corte doble: $P_s = 2 \times 26{,}02417 = 52{,}0483$ kN

Contacto con placa: P_b

$P_b = (14 \times 10^{-3})(23{,}5 \times 10^{-3})(130 \times 10^6) \Rightarrow P_b = 42{,}77$ kN

Contacto con cubrejuntas: P_b

$P_b = (10 \times 10^{-3})(23{,}5 \times 10^{-3})(130 \times 10^6) = 30{,}55$ kN

a) Capacidad de (placas) remaches (P_r)
   Fila 1: mínimo corte simple: 26.02416 kN
   Fila 2: contacto con placa: 2 × 42.77 = 85.54 kN
   $P_r = 26.024 + 85.54 \Rightarrow$ $\boxed{P_r = 111{,}5641681 \text{ kN}}$

b) Capacidad de placas y cubrejuntas
   Placa
   Fila 1: $P_1 = (140 - 23.5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 130{,}480$ kN
   Fila 2: $P_2 = (140 - 2 \times 23.5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 26.02416814 \times 10$
   $P_2 = 130.184$ kN

   Cubrejunta: en fila 2
   $P_C = (140 - 2 \times 23.5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 74{,}4$ kN

El cubrejuntas superior trasmite a los remaches
   2 × 26.024 < 74.4 kN

Remaches: 2 × 26.024 < 74,4 kN
Luego: $P_C = 2 \times 26{,}024 + 74{,}4 \Rightarrow P_C = 126.4483$ kN

Para la resistencia elegimos el menor de: P_r, P_1, P_2, P_C

$$\Rightarrow \boxed{\text{Resistencia} = 111{,}5641681 \text{ kN}}$$

Eficacia: n

$$n = \frac{111{,}5641681 \times 10^3}{140 \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \times 100\% \Rightarrow \boxed{n = 71.151674\%}$$

1.207 Si los cubrejuntas del problema anterior fueran de 8 mm, determinar la forma de ruptura y la eficacia de la unión

Resolución
Cálculo previo: de lo anterior, solo varía $P_b' = 24.44$ kN

a) Capacidad de remaches: P
   Fila 1: contacto con cubrejuntas 24.44 kN
   Fila 2: contacto con placa 42,77 × 2 = 85.54 kN
   $P_r = 24.44 + 2 \times 42{,}77 \Rightarrow P_r = 109{,}98$ kN

b) Capacidad de placas y cubrejuntas
   Placas
   Fila 1: $P_1 = 130.48$ kN (anterior)
   Fila 2: $P_2 = 104.16 + 24{,}44 = 128.6$ kN

   Cubrejuntas: en fila 2
   $P_C = (140 - 2 \times 23.5) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 59{,}52$ kN

El cubrejuntas superior trasmite corte simple a dos remaches
   2 × 26.024 kN = 52.05 kN

Como: 52.05 kN < 59.62 kN
Entonces la capacidad total del tensión en cubrejuntas es
   $P_C = 52.05 + 59.52 \Rightarrow P_C = 111.57$ kN

Resistencia: P tomamos el mínimo de P_r, P_1, P_2 y P_C

Resistencia: $\boxed{P = 109.98 \text{ kN}}$ (el mínimo)

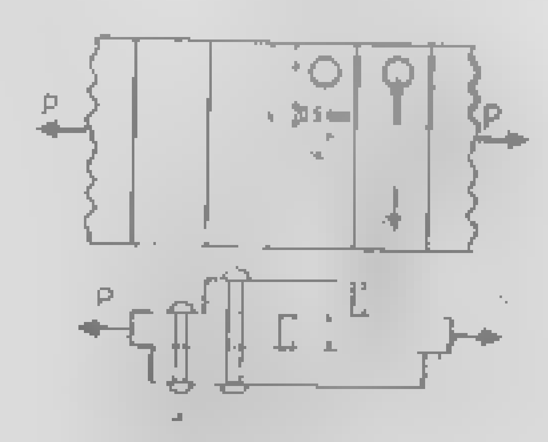
Eficacia: n

$$n = \frac{109.98 \times 10^3}{140 \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6} \times 100\% \Rightarrow \boxed{n = 70.14\%}$$

Baja en 1 punto la eficacia porcentual

1208 En una unión remachada a tope, de dos filas y de tipo a presión, en [illegible] cubrejuntas superior abarca solo a las filas interiores y el inferior a [illegible] espesor de la placa es de 14 mm, el del cubrejuntas superior es de [illegible] mm y el del inferior, de 10 mm El diámetro de los orificios es de 20,5 mm [illegible] mayor es de 100 mm y el menor, de 50 mm Calcular la resisten[illegible] de la sección tipo

Resolución:



Cálculos previos por remache

Corte simple $P_s = \frac{[illegible]}{4} \times 60 \times 10^6 \Rightarrow P$ [illegible] 19 8038 kN

Corte doble: 2×19.8038 kN = 39.6076 kN

Contacto con placa: $P_b = 14 \times 10^{-3} \times 20.5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6$

$P_b = 37{,}31$ kN

Contacto con cubrejuntas P_b' (interior)

$P_b' = 10 \times 10^{-3} \times 20{,}5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 26.65$ kN

Contacto con cubrejuntas exterior P_b''

$P_b'' = 6 \times 10^{-3} \times 20.5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b'' = 15.99$ kN

a) Capacidad de remaches. P_r

Fila 1 mínimo es: 19 8038 kN

Fila 2: el mínimo es. 37 31 × 2 = 74 62 kN

Luego P_r [illegible] 19 8038 + 74 62 ⇒ P_r = 94 4238 kN

b) Capacidad de placas y cubrejuntas

Placas

Fila 1 $P_1 = (100 - 20.5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6$

$P_1 = 89.04$ kN

Fila 2: $P_2 = (100 - 2 \times 20.5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 19{,}8038 \times 10^3$

$P_2 = 85.8838$ kN

Cubrejuntas: fila 2

Exterior: $P_{Ce} = (100 - 2 \times 20.5) \times 10^{-3} \times 6 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6$

$P_{Ce} = 28{,}32$ kN

Interior: $P_{Ci} = (100 - 2 \times 20.5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6$

$P_{Ci} = 47.2$ kN

El exterior transmite corte simple en dos remaches 2 × 19 8038 = 39 6076 kN

Tomamos el menor de P_{Ce} = 28.32 kN y 39 6076 kN

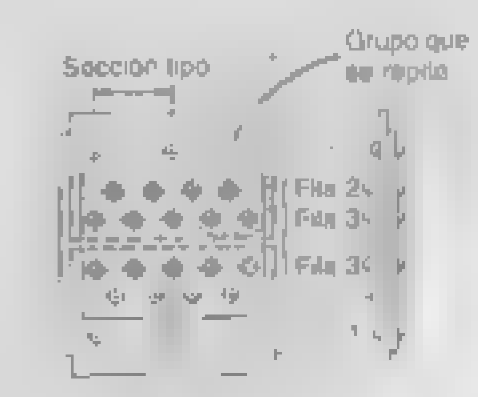
Luego. $P_C = 28{,}32 + 47{,}2 \Rightarrow P_C$ [illegible] 75 52 kN

Que significa colapso por tracción del exterior en la segunda fila y colapso a cubrejuntas inferior en la segunda fila

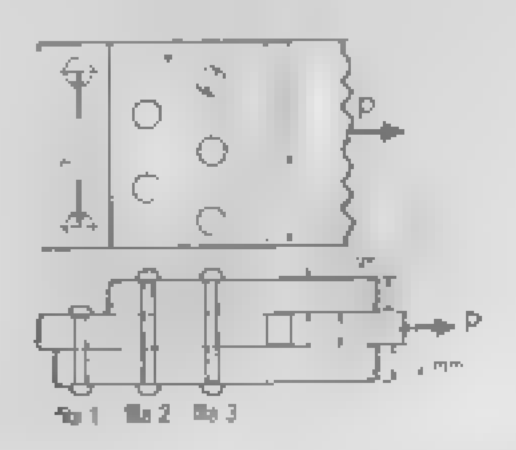
Tomamos el mínimo de P_r, P_1, P_2 y P_C

[Resistencia 75 52 kN] (mínimo)

Una unión remachada triple a tope como la [illegible] de 200 mm y un paso menor de 100 mm El diámetro de los orificios es de 26 5 mm, el es[illegible] y e[illegible] de los cubrejuntas, de 12 mm. Hallar la resistencia de la sección tipo y su eficacia



Resolución:



Cálculo previo por remache

Corte simple $P_s = \frac{\pi(26.5\times10^{-3})^2\times60\times10^6}{4} \Rightarrow P_s = 33.09275$ kN

Corte doble: $P_s = 2 \times 33.09275 = 66{,}1855$ kN

Contacto con placa P_b
$P_b = 16\times10^{-3}\times26.5\times10^{-3}\times130\times10^6 \Rightarrow P_b = 55.12$ kN

Contacto con cubrejuntas P_b
$P_b'' = 12\times10^{-3}\times26.5\times10^{-3}\times130\times10^6$ ... 41.34 kN

a) Capacidad de remaches P

Fila 1: mínimo, 33.09275 kN
Fila 2: mínimo, 2 × 55,12 = 110.24 kN
Fila 3: mínimo: 110.24 kN
Luego. $P_r = 33{,}09275 + 110.24 + 110.24 \Rightarrow P_r = 253.5727$ kN

b) Capacidad de placas por cubrejuntas
Placa
Fila 1
$P_1 = (200 - 26.5)\times10^{-3}\times16\times10^{-3}\times80\times10^6 \Rightarrow P_1 = 222.080$ kN

Fila 2
$P_2 = (200 - 2\times26{,}5)\times10^{-3}\times16\times10^{-3}\times80\times10^6 + 33.09275$ kN ⇒
⇒ $P_2 = 221{,}2527$ kN

Fila 3
$P_3 > P_2$ (el mismo # de remaches)
$P_3 = P_2$ + absorbe fila 2

Cubrejuntas: en fila 3
$P_C = (200 - 2\times26{,}5)\times10^{-3}\times12\times10^{-3}\times80\times10^6 \Rightarrow P_C = 141{,}1$

Pero el cubrejuntas exterior trasmite: 33.092 × 4 = 132.371 kN

Luego
$P_C = 132{,}371 + 141{,}12 \Rightarrow P_C = 273.491$ kN

Tomamos el menor de P_r, P_1, P_2, P_3 y P_C

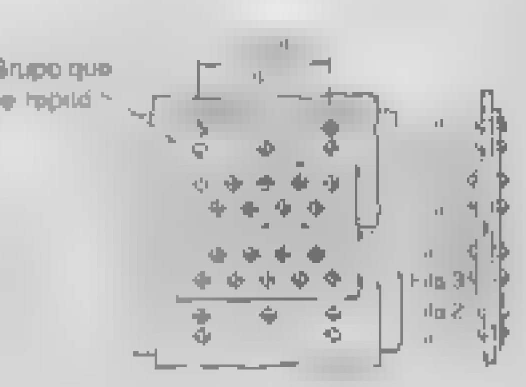
Más crítico. $P_2 = 221.2527$ kN

Luego: P = 221.2527517 kN

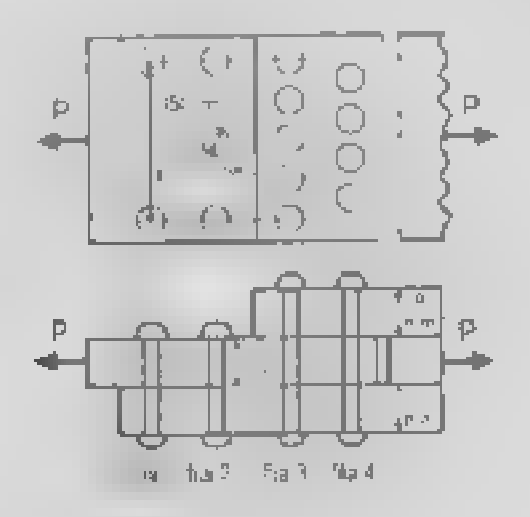
Eficacia. n

$$\frac{221.25\times10^3}{(200\ldots)\times\ldots} = 86.426\%$$

12.10 Una unión cuádruple a tope análoga a la representada en la figura, tiene un paso mayor de 350 mm. El diámetro de los orificios es de 20.5 mm, el espesor de las placas principales, de 10 mm y el cubrejuntas, de 8 mm. Calcular la resistencia de la sección tipo y la eficacia de la unión.



Resolución.



Cálculos previos por remache

Corte simple. $P_s = \pi\frac{(20.5\times10^{-3})^2}{4}\times60\times10^6 \Rightarrow P_s = 19.8038$ kN

Corte doble $2 \times 19.8038 = 39.6076$ kN

Contacto con placa $(10 \times 10^{-3})(20.5 \times 10^{-3}) \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_t$

Contacto con cubrejuntas P_b'

$P_b' = 8 \times 10^{-3} \times 20.5 \times 10^{-3} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 21.32$ kN

a) Capacidad de remaches

Fila 1 mínimo: 19.8038 kN

Fila 2: mínimo 39.6076 kN

Fila 3: $26.65 \times 4 = 106.6$ kN, contacto con placa principal

Fila 4 $26.65 \times 4 = 106.6$ kN

$P_r = 19.8038 + 39.60763 + 106.6 \Rightarrow P_r = 272.6114$ kN

b) Capacidad de placas y cubrejuntas

Placa

Fila 1

$P_1 = (350 - 20.5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 263.6$ kN

Fila 2

$(350 - 2 \times 20.5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 19.8038 \times 10^3 \Rightarrow P$ 67

Fila 3

P $(350 - 4 \times 20.5) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 + 19.8038 \times 3$

P .73.8114 kN

Fila 4

$P_4 > P_3$ el mismo # de remaches

Cubrejuntas en fila 4

$P_C = (350 - 4 \times 20.5) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^6 \Rightarrow P_C$ 1 1

Comparamos con lo que transmite por corte simple

$8 \times 19.8038 = 158.43$ kN

$158.43 \text{ kN} < 171.52$ kN

Luego: P_C $158.43 + 171.52 \Rightarrow P_C = 329.9504$ kN

Resistencia, el mínimo de P_r, P_1, P_2, P_3 y P_C $\Rightarrow$ Resistencia 263.6 kN

Eficacia n

$$n = \frac{263.6 \times 10^3}{\ldots} \Rightarrow n \quad 94.14\%$$

11 Una unión cuádruple a tope, como la representada en la figura tiene un paso mayor de 430 mm, el diámetro de los orificios es de 32.5 mm y el espesor de las placas principales, de 20 mm. El espesor de cada cubrejuntas es de 14 mm. Calcular la resistencia de la sección tipo, con un coeficiente de seguridad de 4, en función de los esfuerzos de ruptura, $\tau = 300$ MPa, a cortante simple, y de 520 MPa a cortante doble: $\tau_b = 660$ MPa y $\sigma_t = 400$ MPa. Si esta unión es la longitudinal de una caldera cilíndrica que soporta una presión interior de 1.8 MPa y las uniones circunferenciales tienen una eficacia de 50%. ¿Cuál será el máximo diámetro admisible?

Resolución

En la figura del problema anterior considerar

Paso mayor 430 mm; $\phi_{orificio}$ 32.5

Espesor cubrejuntas 14 mm

Espesor placa 20 mm

Esfuerzos ruptura

$\tau = 300$ MPa corte simple

$\tau = 520$ MPa corte doble

$\tau_b = 660$ MPa $\sigma_t = 400$ MPa

$fs = 4$

Permisibles son

$\tau = 75$ MPa simple corte

$\tau = 130$ MPa doble corte

$\sigma_b = 165$ MPa contacto

$\sigma_t = 100$ MPa tracción

Presión interna $p = 1.8$ MPa

Cálculos previos por remache

C P $\dfrac{\pi(32.5 \times 10^{-3})}{4} \times 75 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 62.218$ kN

Corte doble: $P_s = \dfrac{\pi(32.5 \times 10^{-3})^2}{2} \times 130 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 215.69$ kN

Contacto con placa

P $20 \times 10^{-3} \times 32.5 \times 10^{-3} \times 165 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 107.25$ kN

Contacto con cubrejunta

$P_b' = 14 \times 10^{-3} \times 32.5 \times 10^{-3} \times 165 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 5.075$ kN

a) Capacidad de remaches. P

Fila 1 mínimo, 62.218 kN

Fila 2 mínimo; $2 \times 62.218 = 124.436$ kN

Fila 3. mínimo: 4×107.25 429 kN

Fila 4 análogo al anterior; 429 kN

Luego P = 62 21826 + 124 43 + 429 4 + 429 ⇒ P = 1044,65 kN

b) Capacidad de placas y cubrejuntas
Placa
Fila 1
P = (430 − 32) × 10 × 20 × 10 × 100 × 10 ⇒ P = [illegible] kN

Fila 2:
P = (430 − 2 × 32,5) × 10 × 2 × 0 × 100 × 10 + 62,2182 × 10
⇒ P_2 = 792,21 kN

Fila 3
P = 4 [illegible] [illegible] + 124 [illegible]
P = 786 65 kN

Fila 4:
$P_4 > P_3$ el mismo # de remaches.
La fila 3 [illegible] de [illegible] 1

Cubrejuntas
Peligro de falla en fila 4.
$P_C = (430 - 4 \times 32,5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^6 \Rightarrow P_C = 420$ kN

La tapa exterior trasmite 8 cortes simples del doble

$$\frac{8 \times 215,689}{2} = 862,75$$

Se toma el menor que es 420 kN

Luego como son dos cubrejuntas P = 2 × 420 = 840 kN

Luego la resistencia es el mismo de P P P P y P

Luego: P = 786 657 kN

Diámetro del caldero: $D = \frac{2P}{pL}$

$$D = \frac{2 \times 786,6547 \times 10^3}{18 \times 10^6 \times 430 \times 10} \Rightarrow \boxed{D = 2\ 032699483}$$

2 P[illegible]

[illegible] presión de contacto y el esfuerzo de tensión [illegible] a la acción de las cargas indicadas

[illegible] 350 kN por metro de longitud

Resolución

350 ⟶ 1000 mm
x ⟶ 80 mm
x = [illegible] kN

Cálculos previos, por remache
Esfuerzo corte τ

$$\frac{14 \times 10^3}{\frac{\pi (17,5)^2}{4}}$$

Esfuerzo de contacto σ_b

$$\sigma_b = \frac{14 \times 10^3}{12 \times 17,5 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 66,67\ MPa}$$

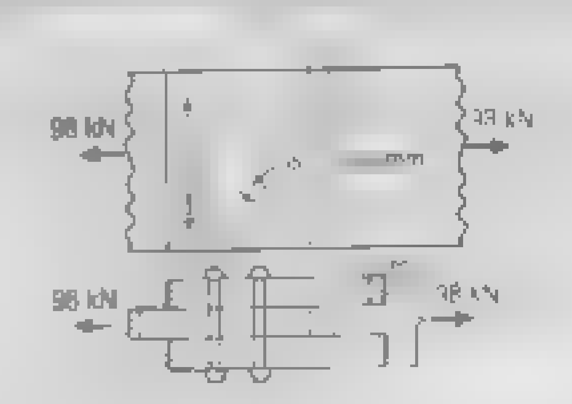
Esfuerzo tensión

Fila 1: $\sigma_t = \frac{28 \times 10^3}{[illegible]} \Rightarrow \sigma_1 = 37,33$ MPa

Fila 2: $\sigma = \frac{(28 - 14) \times 10^3}{[illegible]} \Rightarrow \sigma = 18,67$ MPa

[illegible] Carga 700 kN por metro de longitud

Resolución
En figura adjunta



Cada sección recibe: $\frac{1}{6} \times 98$ kN, osea. $\frac{49}{3}$ kN

Esfuerzo corte. $\tau = \dfrac{\left(\frac{49}{3}\right) \times 10^{3}}{[illegible]} \Rightarrow \boxed{\tau = 37\,6573 \text{ MPa}}$

Esfuerzo contacto en placa

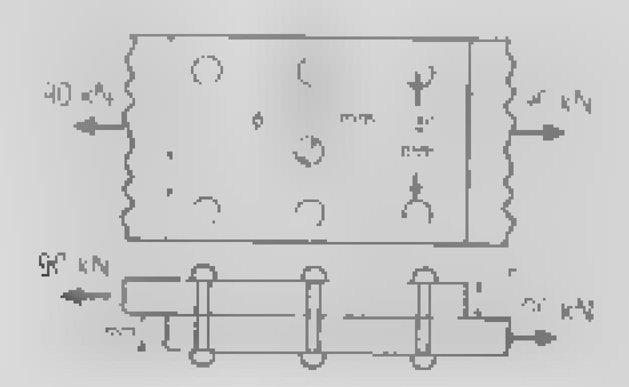
$$\sigma_b = \frac{\left(\frac{98}{3}\right) \times 10^3}{(14 \times 10^{-3})(23{,}5 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 99{,}29078 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo tracción

Placa. $\dfrac{98 \times 10^3}{(140 - 23{,}5) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_t = 60\,0858 \text{ MPa}}$

1215 Unión triple del problema 1204 Carga de la sección tipo = 90 kN

Resolución.
En figura siguiente



90 se reparte en 4 cargas en cada remache $\frac{1}{4} \times 90$ kN = 22,5 kN

Corte esfuerzo

$$\tau = \frac{22{,}5 \times 10^3}{\frac{\pi (23{,}5 \times 10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\tau = 51\,87485 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo contacto: σ_b

$$\sigma = \frac{22{,}5 \times 10^3}{(23{,}5 \times 10^{-3})(12 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 79\,787 \text{ MPa}}$$

Tensión en placa: σ

Fila 1

$$\sigma = \frac{90 \times 10^3}{[illegible] \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_1} = 64{,}377 \text{ MPa}$$

Fila 2

$$\sigma = \frac{(90 - 22{,}5) \times 10^3}{(140 - 2 \times 23{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_2} = 59{,}21052 \text{ kPa}$$

Fila 3

$$\frac{(90 - 3 \times 22{,}5) \times 10^3}{[illegible] 23{,}5) \times 10^{-3} \times 12 \times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_3} = 16{,}094 \text{ MPa}$$

Tomando el mayor $\boxed{\sigma_t = 64{,}37 \text{ MPa}}$ (crítico)

1216 Unión doble. a tope. del problema 1206 Carga de la sección tipo = 90 kN

Resolución.
Con carga de 90 kN
Como 5 áreas soportan 90 kN, entonces carga en cada área

$\frac{1}{5} \times 90$ kN = 18 kN

Corte máximo: τ

$$\tau = \frac{18 \times 10^3}{\frac{\pi (23{,}5 \times 10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\tau = 41\,499 \text{ MN/m}^2}$$

Contacto con placa: σ_b

$$\sigma_b = \frac{36 \times 10^3}{(23{,}5 \times 10^{-3})(14 \times 10^{-3})} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 109\,4225 \text{ MN/m}^2}$$

En cubrejuntas actúa 18 kN, pero el espesor mayor es 2 × 10 = 20

Esfuerzo tensión placa. σ_t
Fila 1

$$\sigma_{t_1} = [illegible] \Rightarrow \sigma_{t_1} = 55.181 \text{ MNm}^2$$

Fila 2

$$\sigma_{t_2} = \frac{[illegible] \times 10^3}{(140 - 2 \times 23.5) \times 14} \Rightarrow \sigma_{t_2} = 55.3 \text{ MN/m}^2$$

Cubrejuntas exterior

$$\sigma_{t_e} = \frac{54 \times 10^3}{(140 - 2 \times 23.5 [illegible])} \Rightarrow \sigma_{t_e} = 58{,}064 \text{ MN/m}^2$$

El mayor: $\boxed{\sigma_t = 58.064 \text{ MN/m}^2}$

1217 Unión triple, a tope del problema 1209. Carga de la sección tipo = [illegible]

Resolución.

En figura del problema 1209 considera carga en sección tipo P = 200 kN

Corte máximo: τ

$$\tau = \frac{200 \times 10^3}{9 \times \pi \times \frac{(26.5 \times 10^{-3})^2}{4}}; \text{ en 9 áreas } \frac{1}{9} \text{ 200 kN} \Rightarrow \boxed{\tau = 40.291 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo contacto placa σ_b :

En 4 remaches actúan: $200 - \frac{200}{9}$ kN. o sea: $\frac{400}{9}$ kN

$$\sigma_b = \frac{400 \times 10^3}{9 \times 6 \times 10^{-3} \times 26 \times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_b = 104.82 \text{ MN/m}^2$$

Tensión en placas y cubrejuntas

Placas
Fila 1

$$\sigma_{t_1} = \frac{200 \times 10^3}{(200 - 26.5) \times 10^{-3} \times 16 \times 10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_1} = 72.046 \text{ MPa}$$

Fila 2

$$\sigma_{t_2} = \frac{1600 \times 10^3 \times 10^6}{9 \times (200 - 2 \times 26.5) \times 16} \Rightarrow \sigma_{t_2} = 75{,}585 \text{ MPa}$$

Fila 3: $\sigma_{t_3} < \sigma_{t_2}$ mismo # remaches

Cubrejuntas
En fila 3 crítica

Carga: $\frac{5 \times 200}{9}$ kN $\Rightarrow \sigma_C = \frac{1000 \times 10^3 \times 10^6}{9 \times (200 - 2 \times 26.5) \times 12} \Rightarrow \sigma_C = 62{,}988$ MPa

Luego: $\boxed{\sigma_{máx} = 75.58 \text{ MPa}}$

En la segunda fila de placa principal

1218 Unión [illegible] a tope de problema 1210. Carga de la sección tipo = 220 kN

Resolución:
En figura del problema 1210
Carga en sección. 220 kN
Áreas en sección: 1 + 2 + 8 + 8 = 19 m²

Carga en cada área. $\frac{220}{19}$ kN

Corte máximo: (σ) $\tau_{máx}$

$$\tau_{máx} = \frac{220 \times 10^3}{19 \pi \frac{(20.5 \times 10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 35{,}081 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo contacto con placa: σ_b

$\frac{16}{19} \times 220$, en 8 remaches

Cada remache absorbe: $\dfrac{440}{19}$ kN

$$\sigma_b = \frac{440\times10^3}{19\ 1\ [illegible]\ 10} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 112\ 965\ \text{MPa}}$$

Tensión en placas y cubrejuntas

Placas

Fila 1

$$\sigma_{t_1} = \frac{220\times10^3}{(350-20.5)\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_1} = 66{,}76783\ \text{MPa}$$

Fila 2

$$\sigma_{t_2} = \frac{18\times220\times10^3}{19\times(350-2\times20.5)\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_2} = 67{,}45\ \text{MPa}$$

Fila 3

$$\sigma_{t_3} = \frac{16\times220\times10}{19\times(350-4\times20.5)\times10^{-3}\times10\times10^{-3}} \Rightarrow \sigma_{t_3} = 69\ 128\ \text{MPa}$$

Fila 4

$$\sigma_{t_4} = \frac{8\times220\times10}{19(350-4\ [illegible])} \Rightarrow \sigma_{t_4} = 34\ 564\ \text{MPa}$$

Cubrejuntas critica

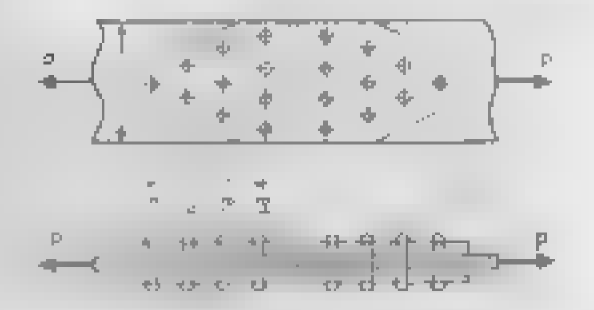
$$\sigma = \frac{11\times220\times10^3}{19\ [illegible]\ 4\ 20\ [illegible]\ 8\ \ 0^3}$$

$\sigma_c = 59.4069$ MPa

Valor critico, placa principal en fila 3 $\boxed{\sigma = 69\ 128\ \text{MPa}}$

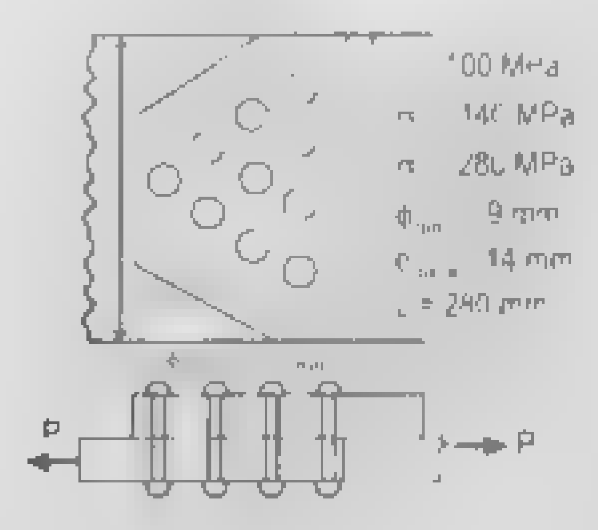
1219 Problema ilustrativo

1220 Determinar la carga de seguridad de la unión a tope de la figura si los esfuerzos admisibles son $\tau = 100$ MN/m², $\sigma_t = 140$ MN/m² y $\sigma_b = 280$ MN/m². Emplear remaches de 19 mm. El espesor de las placas por unir es de 14 mm y su ancho, 280 mm. El espesor e' de los cubrejuntas es de 10 mm



Resolución

En la figura siguiente



Calculo previo

Corte doble. $P_s = \dfrac{2\pi(19\times10^{-3})^2}{4}\times100\times10^6 \Rightarrow P_s = 56{,}7$ kN

Contacto placa $P_b = 14\times10^{-3}\times19\times10^{-3}\times280\times10^6 \Rightarrow P_b$ 74 48 kN

Contacto con cubrejuntas: P_b

$P_b' = 10\times10^{-3}\times19\times10^{-3}\times280\times10^6 \Rightarrow P_b$ 53 2 kN

a) Capacidad de remaches

Fila 1 56 7 kN

Fila 2 2 × 56 7 kN

Fila 3 3 × 56.7 kN

Fila 4 4 × 56 7 kN

[illegible] = 10 × 56 7957474 ⇒ P_r = 567 057 kN

b) Capacidad de placa y cubrejunta

Placa

Fila 1

$P = (280 - 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^{6} \Rightarrow P_1 = 505.68$ kN

Fila 2

$P_2 = (280 - 2 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^{6} + 56,7 \times 10^{3} \Rightarrow P_2 = 519\ 26$ kN

Fila 3

$P = (280 - 3 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^{6} + 3 \times 56,7 \times 10$

$\Rightarrow P_3 = 589\ 557$ kN

Fila 4

$P_4 = (280 - 4 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-4} \times 140 \times 10^{6} + 6 \times 56\ 7 \times 10$

$\Rightarrow P_4 = 716\ 5545$ kN

Cubrejunta en fila 4

$P_C = (280 - 4 \times 22) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^{6} \Rightarrow P_C = 268\ 8$ kN

$P_{C total} = 2 \times 268\ 8 = 537,6$ kN

Menor de P_1, P_1, P_2, P_3 y $P_{C\ total}$

Carga segundad = 505,68 kN

1221 En el problema ilustrativo 1219, determinar los nuevos esfuerzos cortantes, de contacto y de tensión, si se quita el remache de la fila 1 y la carga es 280 kN. Calcular también el ancho mínimo de los cubrejuntas en las filas 2 y 3 si el esfuerzo de tensión está limitado a 100 MPa

Resolución:

Carga $P = 280$ kN

Utilizar figura del ejemplo 1219 del libro sin fila 1

280 kN se reparten en 18 áreas

Luego cada área $\frac{1}{8} \times 280$ kN

Corte crítico: τ

$$\tau = \frac{280 \quad 10}{18 \times \frac{(19 \times 10^{-3})^2}{4}} \Rightarrow \boxed{t = 54,86 \text{ MPa}} \text{ (cortante crítico)}$$

Esfuerzo de contacto en placa σ_b

$$\sigma_b = \frac{280 \times 10^{3}}{9 \times 14 \times 10^{-3} \times 19 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 116\ 959 \text{ MPa}}$$

Esfuerzo tensión placa principal

Fila 1

$$\sigma_{t_1} = \frac{9\ 9\ \ 1\ 1}{(250 - 2 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3}}$$

Fila 2

$$\sigma_{t_2} = \frac{7 \times 280 \times 10^{3}}{9(250 - 3 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{t_2} = 84.541 \text{ MPa}}$$

Fila 3

$$\sigma = \frac{4 \times 280 \times 10^{3}}{9 \times (250 - 4 \times 22) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{t_3} = 54,8696 \text{ MPa}}$$

Tensión en cubrejuntas

En fila 3

$$\sigma_c = \frac{190 \times 10^{3}}{(250 - 4 \times 22) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{\sigma_C = 108,0247 \text{ MPa}}$$

Tensión crítica σ

$\boxed{\sigma_c = 108\ 0247 \text{ MPa}}$ (en cubrejunta en la fila 3)

Cálculo de ancho en fila 2 de cubrejuntas

$\frac{2}{9} \times 280 \times 10^{3} = [L - 2 \times 22 \times 10^{-3}]\ (2 \times 8 \times 10^{-3}) \times (100 \times 10^{6})$

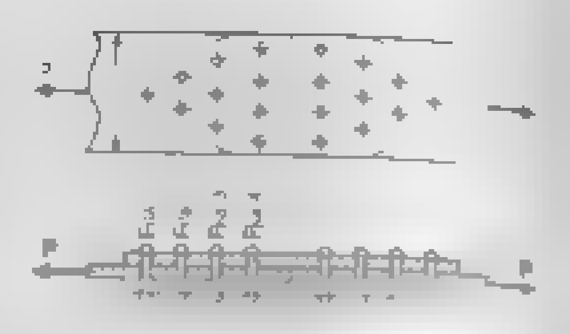
Luego: $L = 0.08228$ m $\Rightarrow$ $\boxed{L = 82\ 888 \text{ mm}}$ (ancho de la fila 2)

En fila 3 ancho cubrejuntas

$\frac{5}{9}(280) \times 10^{3} = (L - 3 \times 22 \times 10^{-3})\ 1600 \times 10^{3}$

$L = 0.16322$ m $\Rightarrow$ $\boxed{L = 163\ 22 \text{ mm}}$

1222. Si no existiera la fila 4 en la figura, calcular la carga de seguridad y la eficacia de la junta con los esfuerzos admisibles siguientes τ = 90 MPa, σ_t = 120 MPa; y σ = 90 MPa. Los remaches son de 25 mm, L = 230 mm, e = 14 mm y e' = 10 mm



Resolucion

Considerar cargas admisibles

τ = 90 MPa , σ_c = 190 MPa σ_t = 120 MPa

$\phi_{remache}$ = 25 mm $\phi_{agujero}$ = 28 mm

L = 230 mm , e = 14 mm (placa)

e' = 10 mm (cubrejunta)

Cálculos previos

Corte doble: $P_s = \frac{\pi(25\times10^{-3})^2}{2} \times 90 \times 10^6 \Rightarrow P_s = 88.3573$ kN

Contacto con placa σ_b

$P_b = 14 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-3} \times 190 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 66.5$ kN

Contacto con cubrejuntas σ_b'

$P_b' = 10 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-3} \times 190 \times 10^6 \Rightarrow P_b' = 47.5$ kN

a) Capacidad de remaches

Fila 1: 66.5

Fila 2: 2 × 66.5

Fila 3: 3 × 66.5

P = 6 × 66,5 = 399 kN

b) Capacidad de placa y cubrejuntas

Placa

Fila 1

$P_1 = (230 - 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 339.36$ kN

Fila 2

$P_2 = (230 - 2 \times 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^6 + 66.5 \times 10$

P_2 = 358.82 kN

Fila 3:

$P_3 = (230 - 3 \times 28) \times 10^{-3} \times 14 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^6 + 66.5 \times 10^3 + 133 \times 10^3$

P_3 = 444,78 kN

Cubrejuntas:

$P_c = (230 - 3 \times 28) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 120 \times 10^6 \Rightarrow P_c = 175.2$ kN/cara

Resistencia de corte de remaches es

$\frac{88.35}{2} \times 6 = 264.96$ kN

En el cubrejuntas es

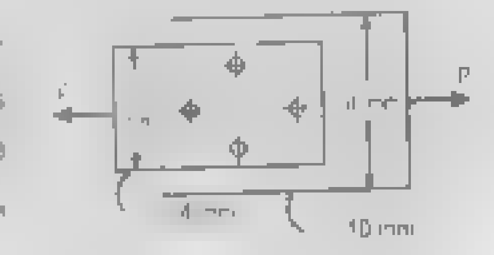
P = 2 × 175.2 = 350 kN, no actua, luego P_c = 529,92 kN

Tomando como carga de seguridad el mínimo de P_r, P_1, P_2, P_3 y P_c

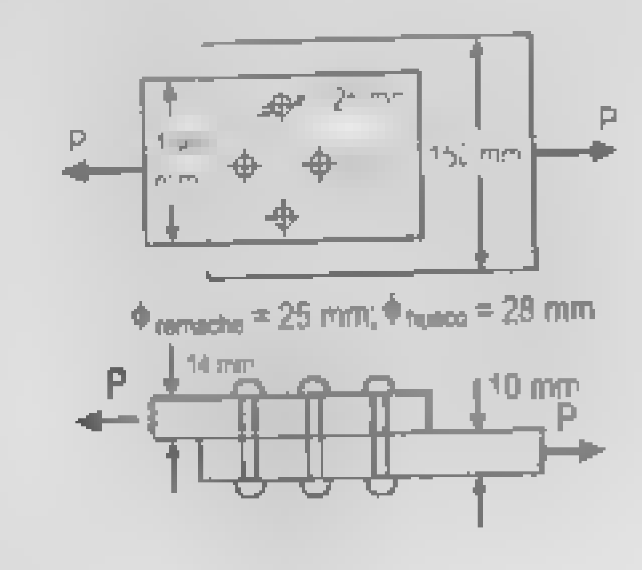
$$P_{seguridad} = P_1 = 339.36 \text{ kN}$$

$$n = \frac{339.36 \times 10^3 \times 100\%}{[illegible]} \Rightarrow \boxed{n = 87.826\%} \text{ (eficacia)}$$

[illegible] Se unen dos placas mediante cuatro remaches, por solape, como se indica en la figura. Los remaches son de 25 mm. Determinar la carga P admisible si los esfuerzos de trabajo son τ = 70 MN/m², σ_t = 100 MN/m² y σ_b = 140 MN/m²



Resolucion



Esfuerzos admisibles
τ = 70 MPa ; σ_t 00 MPa , σ_b = 140 MPa

Cálculos previos

Corte simple: $P_s = \frac{\pi \times (25 \times 10^{-3}}{4}$ P = 34 36 kN

Contacto con superior placa
P_b= 14 x 10^{-3} x 25 x 10^{-3} x 140 x 10^6 ⇒ P_b = 49 0 kN

Contacto con placa inferior
P_b = 10 x 10^{-3} x 25 x 10^{-3} x 140 x 10^6 ⇒ P_b' = 35 kN

a) Capacidad de remaches. P_r
Fila 1 34,36 kN
Fila 2 2 x 34 36
Fila 3 34 36 kN
P_r = 137 445 kN

b) Capacidad de placas
Placa superior
Fila 1
P_1 = (130 – 28) x 10^{-3} x 14 x 10^{-3} x 100 x 10^6 ⇒ P_1 = 142 8 kN

Fila 2
P_2 = (130 – 2 x 28) x 10^{-3} x 14 x 10^{-3} x 100 x 10^6 + 34 36 x 10
P_2 = 103,60 + 34 36 ⇒ P_2 = 137 96 kN

Fila 3: $P_3 > P_1$

Placa inferior
Fila 3: P_4
P_4 = (150 – 28) x 10^{-3} x 10 x 10^{-3} x 100 x 10^6 ⇒ P_4 = 122 00 kN

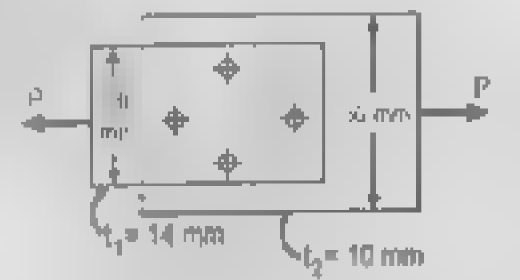
Fila 2: P_5
P_5 = (150 - 2 x 28) x 10^{-3} x 10 x 10^{-3} x 100 x 10^6 + 34.36 x 10^3 ⇒ P_5 = 128

Fila 1 $P_6 > P_4$, igual # remaches

Finalmente, la carga admisible es el mínimo de P_r, P_1, P_2, P_3, P_4, y P_5, P_6

P = P 122 kN, P 122 kN (carga admisible)

1224 Repetir el problema 1223 si los esfuerzos admisibles son τ = 100 MN/m² σ = 140 MN/m² y σ_b = 220 MN/m²



Resolución:
Cálculos previos:

Corte simple $P_s = \frac{\pi (25 \times 10^{-3})^2}{4} \times 100 \times 10^6$ ⇒ P_s = 49 08738 kN

Contacto en placa superior P_b
P_b = 14 x 10^{-3} x 25 x 10^{-3} x 220 x 10^6 ⇒ P_b = 77,0 kN

Contacto con placa inferior: P_b'
P_b' = 10 x 10^{-3} x 25 x 10^{-3} x 220 x 10^6 ⇒ P_b' = 55 kN

a) Capacidad de remaches
Fila 1 49 087 kN (mínimo)
Fila 2 2 x 49 087 kN
Fila 3 49 087 kN
P = 196 3495 kN (la suma de lo anterior)

b) Capacidad de placas
Placa superior

Fila 1
P_1 = (130 – 28) x 10^{-3} x 14 x 10^{-3} x 140 x 10^6 ⇒ P_1 = 199,92 kN

Fila 2
P_2 = (130 – 2 x 28) x 10^{-3} x 14 x 10^{-3} x 140 x 10^6 + 49,087 x 10^3
P_2 = 194 127 kN

Fila 3: $P_3 > P_1$ igual número de remaches
Placa inferior

Fila 3: P_4
P_4 = (150 – 28) x 10^{-3} x 10 x 10^{-3} x 140 x 10^6 ⇒ P_4 = 170 8 kN

Fila 3: P_5

$P_5 = (150 - 2 \times 28) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 49.087 \times 10$

$P \quad 180\ 687$ kN

Fila 1 $P_8 > P_4$

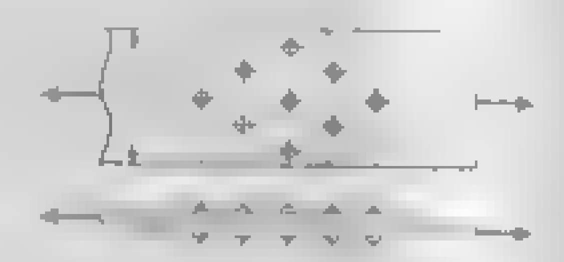
La carga admisible la elegimos del minimo de P_r, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P

Elegimos $P_4 = 170.8$ kN

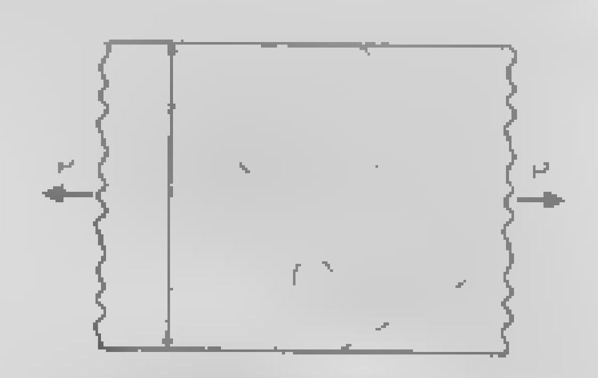
Luego la carga admisible es $P = P_4 = 170.8$ kN

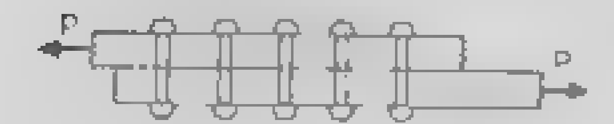
Falla por tensión en la placa inferior en la fila 3

1225. Determinar la carga de seguridad del empalme a solape en el tirante de la figura si los remaches son de 19 mm y el espesor de las piezas por unir es de 8 mm. Los esfuerzos admisibles son $\tau = 95$ MPa, $\sigma_t = 140$ MPa y $\sigma_b = 220$ MPa



Resolucion:





$\phi_{remache} = 19$ mm, $\phi_{hueco} = 22$ mm

$e_{placa} = 8$ mm, $L = 250$ mm

Cargas admisibles

$\tau = 95$ MPa, $\sigma_b = 220$ MPa, $\sigma_t = 140$ MPa

Cálculos previos

Corte simple $P_s = \frac{\pi}{4} \times 95 \times 10^6 = 29.93$ kN

Contacto placa

$P_b = 8 \times 10^{-3} \times 19 \times 10^{-3} \times 220 \times 10^6 \Rightarrow P_b = 33.44$ kN

a) Capacidad remaches

Fila 1 29.93 kN

Fila 2 2 × 29.93 kN

Fila 3 3 × 29.93 kN

Fila 4 2 × 29.93 kN

Fila 5 29.93 kN

$P_r = 9 \times 29.93523$ kN $= 269.41707$ kN

b) Capacidad de tension de placas

Fila 1 P_1

$P_1 = (250 - 22) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 \Rightarrow P_1 = 255.36$ kN

Fila 2 P_2

$P_2 = (250 - 2 \times 22) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 29.935 \times 10^3 \Rightarrow P_2 = 260.65$ kN

Fila 3 P_3

$P_3 = (250 - 3 \times 22) \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6 + 3 \times 29.935 \times 10^3$

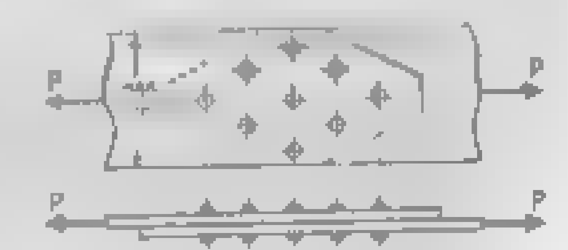
$P \quad 295.88$ kN

Fila 4 $P_4 > P_2$, Fila 5 $P_5 > P_1$

La carga de segundad se obtiene con la capacidad menor de P_r, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

Luego: carga segundad = 255.36 kN

1226. Repetir el problema 1225 si los esfuerzos admisibles son los mismos, los remaches, de 22 mm y las placas por unir, de 10 mm

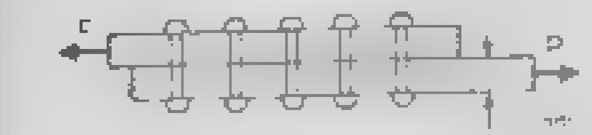


Resolucion.

Remaches $\phi = 22$ mm

Placas. $e = 10$ mm

Agujeros: $\phi = 25$ mm



Esfuerzos admisibles. $\tau = 95$ MPa $\sigma_t = 140$ MPa; $\sigma_b = 220$ MPa
Calculo previo

Corte simple $P_c = \frac{\pi}{4}(22 \times 10^{-3})^2 \times 95 \times 10^6 = 36{,}1126$ kN

Contacto $P_b = (22 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-3})(220 \times 10^6) \Rightarrow P_b = 48{,}04$ kN

a) Capacidad de remaches, son 9 remaches
$P_r = 9 \times 36.1126075 = 325\ 013$ kN

b) Capacidad de placas, se toma por fila
Fila 1 $P_{t1} = (250 - 25) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 140 \times 10^6$ P 315 kN
Fila 2 $P_{t2} = (250 - 2 \times 25) \times 10^{-3} \times 140 \times 10 \times 10^{?} + 36\ 1126075 \times 10$
P_{t2} 316,1126 kN

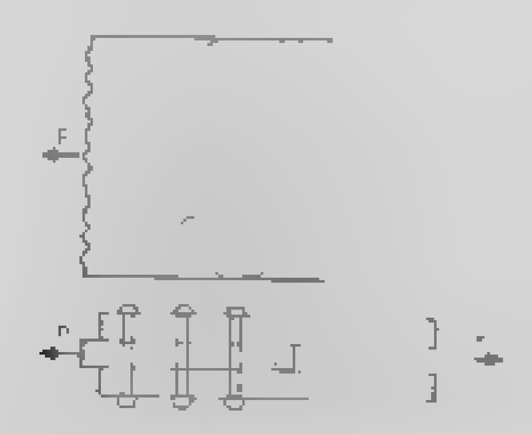
Fila 3 $P_{t3} = (250 - 3 \times 25) \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{3} \times 140 \times 10^6 + 3 \times 36\ 1126075 \times 10$
P_{t} - 353 3378 kN

Fila 4 $P_4 > P_3$, $P_5 > P_4$
Luego la carga de seguridad será el menor de P_r, P_1, P_2, P_3 P_4 y P_5

De lo anterior $\boxed{P = P_1 = 315 \text{ kN}}$ carga seguridad

1227 Dos placas de 250 mm de ancho y 20 mm de espesor se empalman mediante una unión a tope, con dos cubrejuntas, mediante remaches de 22 mm de diametro. La carga axial de tensión es de 400 kN. Si los esfuerzos admisibles son $\tau = 70$ MPa, $\sigma_t = 100$ MPa y $\sigma_b = 130$ MPa, determinar (a) el menor numero de remaches (b) el minimo numero de filas y la mejor distribución de los roblones en cada fila, (c) el minimo espesor en cada cubrejuntas, de acuerdo con la distribución del apartado (b)

Resolución



a) Calculos del # remaches

Corte doble por remache $\frac{2\pi}{4}(22 \times 10^{-3})^2 \times 70 \times 10^6$

$P_{corte\ doble} = 53{,}21857955$ kN

$\# \text{ remaches} = \frac{400 \text{ kN}}{53\ 21857955 \text{ kN}} = 7\ 5161$ remaches

remaches = 8 remaches

b) Numero de filas mínimo, en primera fila tenemos
$400 \times 10^3\ (250 - 25\ k) \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-3} \leq 100 \times 10^6$
De donde $k \leq 2$; no falle por tracción

filas 3 filas (mínimo)

c) Espesor mínimo en el cubrejuntas superior que soporta 200 kN se tiene,

$$\frac{200 \times 10^3}{(250 - 4 \times 25) \times 10^{-3} \times e \times 10^{-3}} < 100 \times 10^6 \Rightarrow e \geq 13{,}33 \text{ mm}$$

Chequeo por aplastamiento

$130 \times 10^6 \Rightarrow e \geq 7{,}77$

Luego tomamos $\boxed{e \geq 13\ 33 \text{ mm}}$, cumple ambas restricciones

1228 Resolver el problema 1227 con remaches de 19 mm y esfuerzos admisibles de $\tau = 110$ MPa, $\sigma_t = 140$ MPa y $\sigma_b = 220$ MPa

Resolucion
(a) Calculo del # remaches

Corte doble por remache: $\frac{2\pi}{4}(19 \times 10^{-3})^2 \times 110 \times 10^6$

$P_{c\ doble} = 62\ 37632214$ kN

$\# \text{ remaches} = \frac{400 \text{ kN}}{62\ 376322 \text{ kN}}\ 6{,}41$

$\boxed{\# \text{ remaches} = 7 \text{ remaches}}$

b) Cálculo del # de filas

En primera fila $\dfrac{400\times10^3}{(250 - 22\,k)\times10^{-3}\times20\times10^{-3}} \le 140\times10^6$

Luego: $k \le 4$, tomamos 1 ó 2 en primera fila

Luego: 3 filas como mínimo

Configuración.

	1ra	2da	3ra		1ra	2da	3ra
	○	○	○		○	○	
			○		○	○	○
	○	○	○			○	○

Ambas dan $\boxed{\text{3 filas y 7 remaches}}$

c) Cálculo del espesor de cubrejuntas

Se chequea falla por tracción del cubrejuntas superior sometido a 200 kN y con 3 remaches en tercera fila

[illegible]

$(250 - 3\times22)\times10^{-3}\times e\times10$ [illegible]

$e = 7\,764$ mm espesor mínimo de cubrejuntas

Chequeo por aplastamiento

$\dfrac{(200/7)\times10^3}{(\ldots10^{-3})(19\ldots10^{-3})} \le 220\times10^6 \Rightarrow e \ge 6\,83$ mm más conservador

Tomamos $\boxed{e = 7\,764\ \text{mm}}$: valor mínimo de espesor de cubrejuntas

1229. Problema ilustrativo

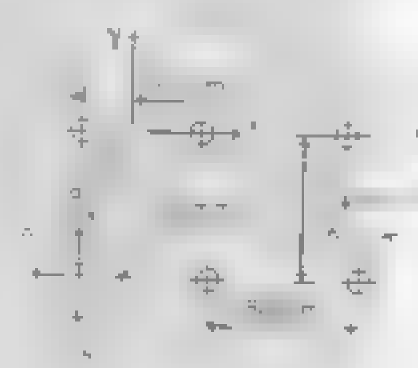
1230. Calcular la carga resultante en el remache menos cargado del problema 1229

Resolución:

Consideramos el remache interior central izquierdo el de menor carga: es el remache B

En este remache B, tenemos

$P_{d_x} = \dfrac{120\ \text{kN}}{12} = 10\ \text{kN} \leftarrow$



$P_{d_y} = \dfrac{160\ \text{kN}}{12} = 13\,33\ \text{kN}\uparrow$

$M_t = (160\times10^3\ \text{N})(120\times10^{-3})\ \text{m}$

$M_t = 1$[illegible] kN·mm [illegible] kN [illegible]

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 =$ [illegible] $6\times$ [illegible] $+ 6\times$ [illegible] $+ 8\times1$ [illegible] $= 176\,000\ \text{mm}^2$

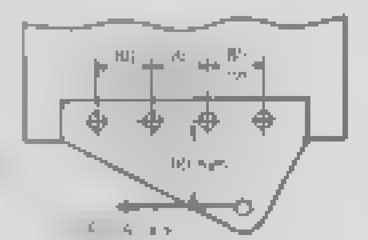
$P_{t_x} = \dfrac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\,y = \dfrac{19.2\ \text{kN·m}}{0{,}176\ \text{m}^2}\times100\times10^{-3}\ \text{m} = 10\,91\ \text{kN}\rightarrow$

$P_{t_y} = \dfrac{19{,}2\ \text{kN·m}}{\ldots}\times40\times10^{-3}\ \text{m} = 4\,3636\ \text{kN}\downarrow$

Luego en el remache B: $P_r = \sqrt{(10.91-10)^2 + (13.33-4.3636)}$

$\boxed{P_r = 9\,057\ \text{kN}}$, mínimo valor de carga en remache B

1231. Una placa de amarre se cose al borde de una placa fija mediante cuatro remaches de 22 mm dispuestos como indica la figura y se somete a la acción de la [illegible]



Resolución.

En figura adjunta

Momento en el centro de gravedad es:

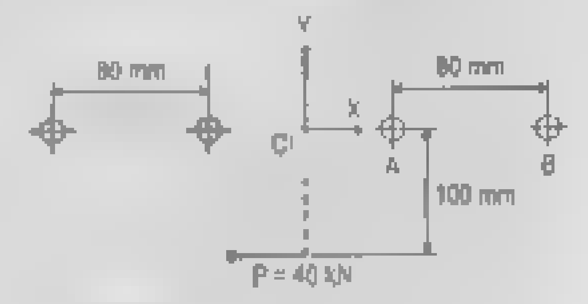
$M_t = 40\ \text{kN}\times100\times10^{-3}\ \text{m}$

$M_t = 4\ \text{kN·m}$

La carga constante es:

$P_{d_x} = \dfrac{40\ \text{kN}}{4} = 10\ \text{kN} \rightarrow$

$P_{d_y} = 0$



Trasladando fuerzas tenemos

Luego: $\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 2\times40^2 + 2\times120^2 = 0.032\ \text{m}^2$

Tomamos punto crítico en el remache extremo derecho remache B

Donde: $P_{t_y} = \dfrac{4\ \text{kN·m}}{0\,032\ \text{m}^2}\times120\times10^{-3}\ \text{m} \Rightarrow P_{t_y} = 15\ \text{kN}\uparrow$

El otro componente: P_t [illegible]

La carga en B es: $P_r = \sqrt{(10\ kN)^2 + (15\ kN)^2} \Rightarrow P_r = 18{,}02775638\ kN$

Luego: $\tau_{máx} = \dfrac{18{,}0277 \times 10^3}{\dfrac{\pi\ (...)}{4}}$

De donde $\boxed{\tau_{máx} = 47{,}4249015\ MPa}$

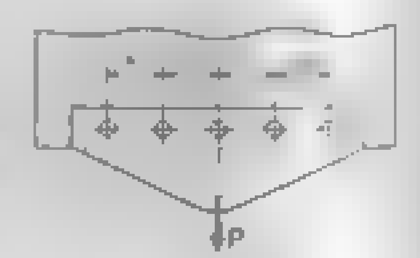
El esfuerzo mínimo será en el remache A

$$P_{d_x} = 10\ kN \rightarrow;\ P_{d_y} = 0 \Rightarrow P_{d_y} = \frac{4\ kN\ m}{0{,}032\ m^2} \times 40 \times 10^{-3} m = 5\ kN \uparrow$$

Luego: $P_{mín} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11{,}18033989\ kN;\ \tau = \dfrac{11{,}18033989 \times 10^3\ N}{\dfrac{\pi\ (...)}{4}}$

De donde $\boxed{\tau_{mín} = 29{,}41167535\ MPa}$ en el remache A

1232 En la unión de la placa de amarre a un bastidor, que representa la figura, cada remache tiene 300 mm² de sección. La carga de trabajo había sido calcula- [illegible] zo cortante de 70 MPa. Calcular el esfuerzo cortante máximo si el remache A no se colocó bien y no transmite carga alguna.

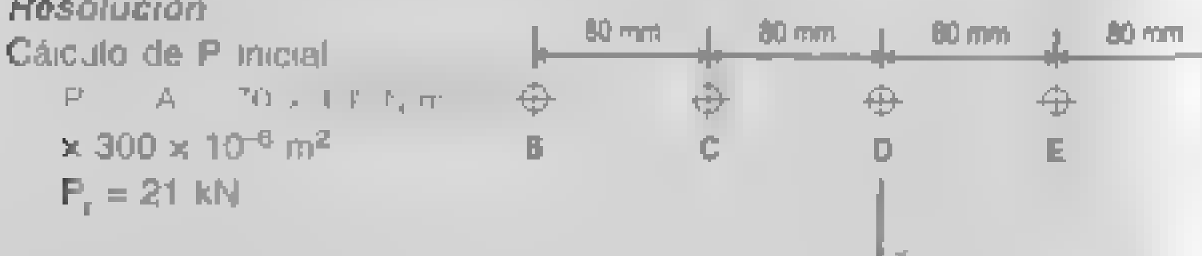


Resolución

Cálculo de P inicial

$P_A = 70 \times 10^6\ N/m^2 \times 300 \times 10^{-6}\ m^2$

$P_r = 21\ kN$



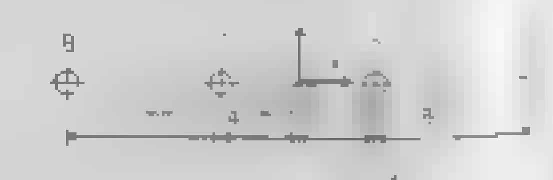
Como se tenía 5 remaches

$P = 5P_r = 5 \times 21 = 105\ kN$

Cálculo de cortante máximo

El momento $M_t = (105\ kN)(40 \times 10^{-3}\ m)$

$M_t = 4{,}2\ kN{\cdot}m$ en el centro gravedad



Luego: $\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 2 \times 40^2 + 2 \times 120^2 = 0{,}032\ m^2$

Para todos los remaches B, C, D y E remache crítico es E

Carga constante: $P_{d_y} = \dfrac{105\ kN}{4} = 26{,}25\ kN;\ P_{d_x} = 0$

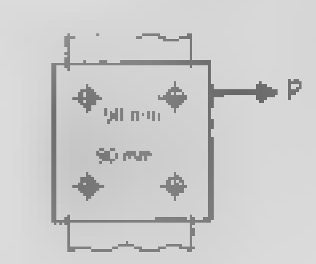
Carga variable:

$$P_{t_y} = \frac{4{,}2\ kN\ m}{0{,}032\ m^2} \times 120 \times 10^{-3}\ m \Rightarrow P_{t_y} = 15{,}75\ kN,\ P_{t_x} = 0$$

Luego carga en remache E: $P = P_{d_y} + P_{t_y} = 26{,}25 + 15{,}75 \Rightarrow P = 42\ kN$

De donde: $\tau_{máx} = \dfrac{42\ kN}{300\ mm^2} = \dfrac{42 \times 10^3\ N}{300 \times 10^{-6} m^2}$ $\boxed{\tau_{máx} = 140\ MPa}$

1233 Si la carga máxima admisible en los remaches de la conexión representada en la figura es de 15 kN, determinar el valor de seguridad de P.



Resolución:

Calcular P

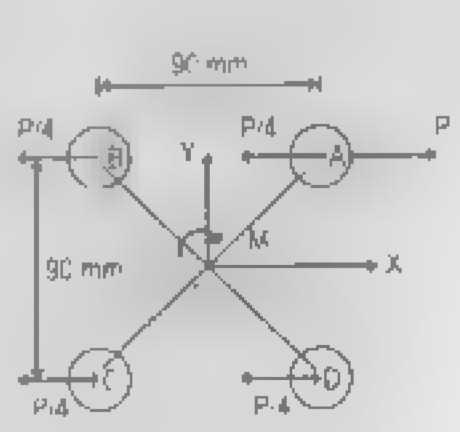
$M_t = 45P$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 4 \times 45^2 + 4 \times 45^2 = 16\ 200\ mm^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 0{,}0162\ m^2$; para todos los remaches

Se toma el remache A como el crítico o de carga máxima

$P_{d_x} = P/4 \leftarrow;\ P_{d_y} = 0$, carga constante



Carga variable: $P_{t_x} = \dfrac{45P \times 10^{-3}\ m}{0{,}0162\ m^2} \times 45 \times 10^{-3} m$

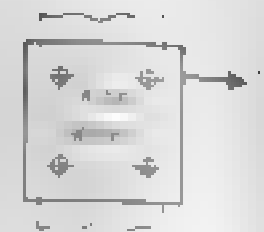
$P_{t_x} = \dfrac{P}{8} \leftarrow;\ P_{t_y} = \dfrac{P}{8}$

Luego: $P_{máx} = \sqrt{(P_{d_x} + P_{t_x})^2 + (P_{d_y} + P_{t_y})^2} \Rightarrow P_{máx} = \sqrt{\left(\dfrac{P}{8} + \dfrac{P}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{P}{8}\right)^2}$

$P = \dfrac{P\sqrt{10}}{8}$

Como $P_{r_{máx}} = 15$ kN por dato

$\frac{P\sqrt{17}}{8} = 15$ kN $\Rightarrow$ $\boxed{P = 37{,}94733192\ kN}$



1234. Repetir el problema 1233 si el remache de la esquina superior izquierda ha sido mal colocado y no soporta carga alguna

Resolución

Se tiene

$M_t = 60\ P$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 30^2 + 30^2 + 60^2 + 60^2 + 30^2 + 30^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 10\ 800\ mm^2 = 0{,}0108\ m^2$

Se toma el remache A como el crítico.

Carga constante. $P_{d_x} = P/3$

$P_{d_y} = 0$

Carga variable en A

$$P_{t_x} = \frac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\ y = \frac{60\ P \times 10^{-3} m}{0{,}0108\ m^2} \times 60 \times 10^{-3} m \Rightarrow P_{t_x} = \frac{60^2 P}{10\ 800} = \frac{P}{3}$$

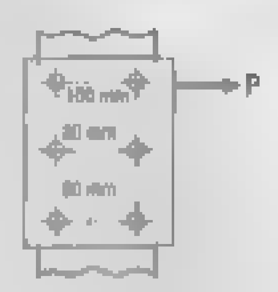
$$P_{t_y} = \frac{60\ P \times 10^{-3} m}{0{,}0108\ m^2} \times 30 \times 10^{-3} m \Rightarrow P_{t_y} = \frac{P}{6}$$

Luego carga en A: $P_r = \sqrt{\left(\frac{P}{3} + \frac{P}{3}\right)^2 + \left(\frac{P}{6}\right)^2}$

De donde $\frac{\sqrt{17}}{6} P = P_r$, como: $P_r = 15$ kN

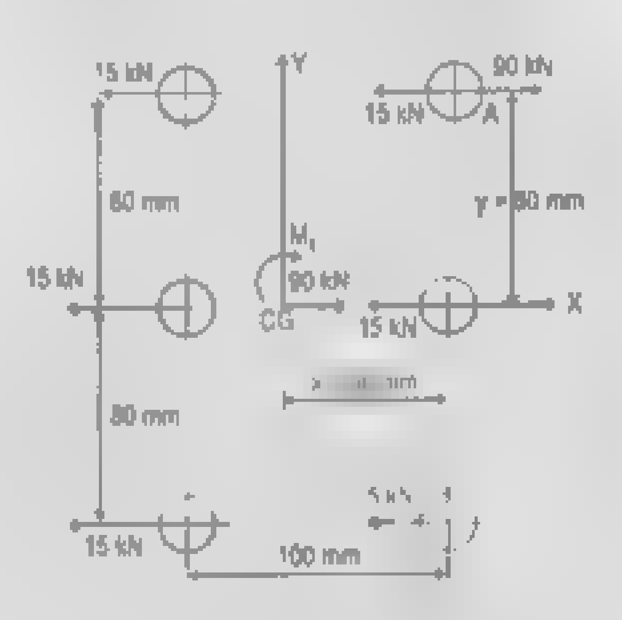
Se tiene $\frac{\sqrt{17}}{6} P = 15$ kN; de donde $\boxed{P = 21{,}8282\ kN}$ carga de seguridad

1235. En la unión remachada de la figura se ha empleado remaches de 22 mm de diámetro. Si P = 90 kN hallar el espesor que debe tener la placa para que la presión de contacto no exceda de 140 MPa.



Resolución:

(Por contacto, esfuerzo admisible)



Cálculo del espesor de placa

$M_t = (90\ kN)(80 \times 10^{-3}\ m)$

$M_t = 7{,}2\ kN{\cdot}m$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 6 \times 50^2 + 4 \times 80^2$

$= 40\ 600\ mm^2 = 0{,}0406\ m^2$

Carga constante por remache

$P_{d_x} = 15$ kN ← ; $P_{d_y} = 0$

Remache crítico en el remache A.

Carga variable en A

$$P_{t_x} = \frac{7{,}2\ kN{\cdot}m}{0{,}0406\ m^2} \times 80 \times 10^{-3}\ m \Rightarrow P_{t_x} = 14{,}18719212\ kN \leftarrow$$

$$P_{t_y} = \frac{7{,}2\ kN{\cdot}m}{0{,}0406\ m^2} \times 50 \times 10^{-3} m \Rightarrow P_{t_y} = 8{,}866995\ kN \uparrow$$

Luego en A. $P_r = \sqrt{(15 + 14{,}18719212)^2 + (8{,}866995)^2}$

De donde $P_r = 30{,}50435681$ kN

Conocido P_r, se tiene que chequear que el esfuerzo por contacto no debe sobrepasar $\sigma_b = 140$ MPa

$$\frac{P_r}{(22 \times 10^{-3} m)(e)} \le 140 \times 10^6\ MPa$$

Con valores $\frac{30{,}50435681 \times 10^3 N}{22 \times 10^{-3}\ m(e \times 10^{-3} m)} \le 140 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$

Donde "e" está en milímetros.

Luego: $e \ge 9{,}90401195 \times 10^{-3}$ m $\Rightarrow$ $\boxed{e = 9{,}90401195\ mm}$

1236. En el problema 1235 anterior, determinar P de manera que la máxima carga por remache sea de 20 kN

Resolución:
Momento en CG
$M_t = 80P$ mm
$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 40\ 600\ mm^2 = 0\ 4006\ m^2$

Tomamos como remache crítico el A

Carga constante en A. $P_{dx} = \frac{P}{6}$; P_{ty} 0

Carga variable en A

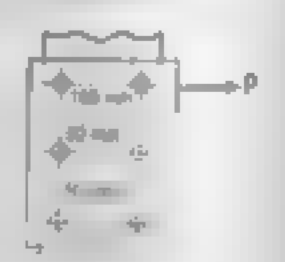
$$P_{t_x} = \frac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\ y = \frac{80P\ mm}{40\ 600\ mm^2} \times 80\ mm$$

$$P \quad \frac{32}{203} P \quad P_y \quad \frac{80P \quad 50\ mm}{40\ 600} \quad \frac{20P}{203}$$

Luego en A. $P_r = \sqrt{\left(\frac{P}{6} + \frac{32P}{203}\right)^2 + \left(\frac{20P}{203}\right)^2}$ ... P 0 ...

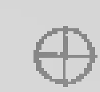
Como $P_{máx} = 20$ kN,
... 0 ... P ... 20 kN [P ... kN] ... A

1237. Resolver el problema 1235, suponiendo que la carga P se sustituye por una de 90 kN que pasa por el centro del remache superior con pendiente de 75% hacia arriba a la derecha



Resolución
Trasladando a. CG
Tenemos el momento en CG
$M_t = 54 \times 50 - 72 \times 80$
$M_t = 3\ 060\ 000$ N mm
$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 40\ 600\ mm^2$
Tomamos punto crítico en el remache A
Carga constante en A

$$P_{d_x} = \frac{72\ kN}{6} = 12\ kN \leftarrow \quad P_{d_y} = \frac{54\ kN}{6} = 9\ kN \downarrow$$



Carga variable en A

$$P_{t_x} = \frac{3\ 060\ 000\ N\ mm}{40\ 600\ mm^2} \times 80\ mm \Rightarrow P_{t_x} = 6{,}02955665\ kN \leftarrow$$

$$P_{t_y} = \frac{M_t}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\ x = \frac{3\ 060\ 000}{40\ 600} \times 50 = 3.7684729\ kN \downarrow$$

$$P_r = \sqrt{(P_{dx} + P_{tx})^2 + (P_{dy} + P_{ty})^2}$$

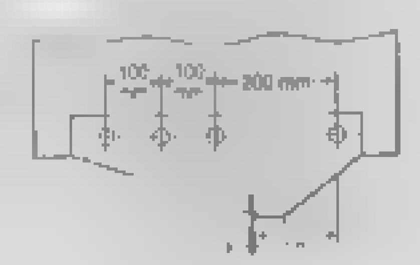
$$P_r = \sqrt{(12 + 6{,}02955665)^2 + (9 + 3{,}7684729)^2} \Rightarrow P_r = 22\ 09295845\ kN$$

Esfuerzo de contacto ≤ 140×10^6 N/m²

$$\frac{22{,}09295845 \times 10^3\ N}{...} \leq 140 \times 10^6\ N/m^2 \Rightarrow e \geq 6\ 97378739\ mm$$

$e = 6\ 974$ mm

1238. En la conexión de la placa de amarre a un bastidor fijo que representa la figura, si P = 60 kN, calcular ... tro remaches de 22 mm



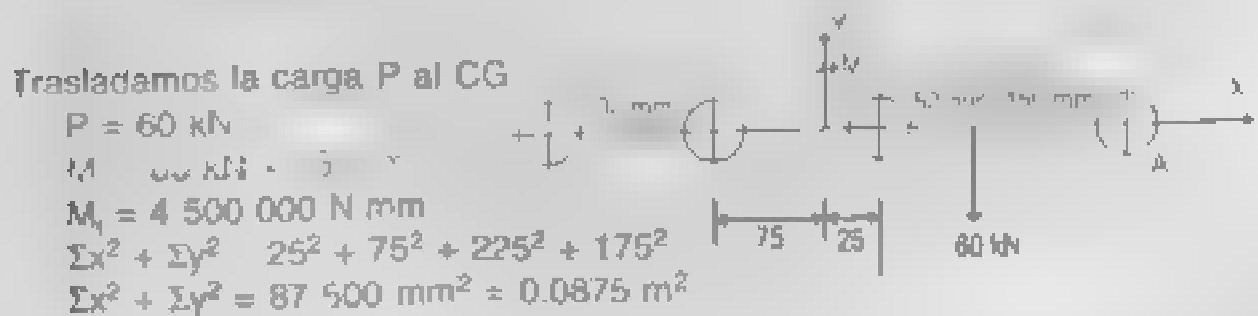
Resolución
Calculo del CG

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A}$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + \ldots}{A_1 + \ldots}$$

$$\bar{x} = \frac{0 + 100 + 200 + 400}{4} = 175\ mm$$

Trasladamos la carga P al CG
P = 60 kN
$M_t = 60$ kN ...
$M_t = 4\ 500\ 000$ N mm
$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 25^2 + 75^2 + 225^2 + 175^2$
$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 87\ 500\ mm^2 = 0.0875\ m^2$



Remache crítico en A

Carga constante: $P_{d_x} = 0$, $P_{d_y} = \frac{60}{4} = 15\ kN\uparrow$

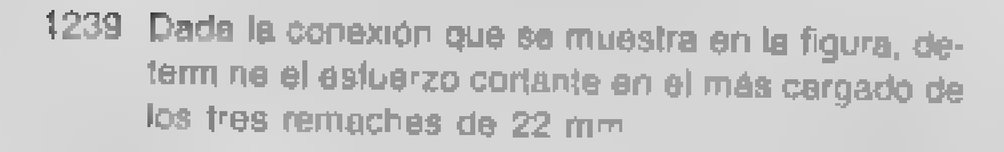
Carga variable: $P_{t_y} = \frac{4\ 500\ 000}{87\ 500} \times 225$

$P_{t_y} = 11{,}57142857\ kN\uparrow,\ P_{t_x} = 0$

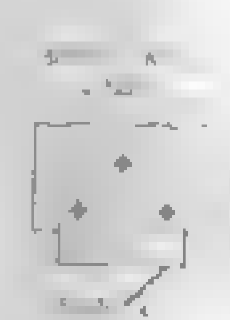
$P = P + P = 15 + 11{,}57142857 = 26{,}57142857\ kN$

Luego como: $\tau = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$, d = 22 mm, $\rightarrow \tau = \frac{26{,}57142857 \times 10^3\ N}{\frac{\pi \times (22 \times 10^{-3})^2\ m^2}{4}}$

De donde: $\boxed{\tau = 69{,}90040003\ MPa}$



1239 Dada la conexión que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante en el más cargado de los tres remaches de 22 mm



Resolución.

En figura adjunta, trasladando la carga al CG del remache

$M_t = (48\ kN)(130\ mm) + (36\ kN)(80\ mm)$

$M_t = 9\ 120\ 000\ N{\cdot}mm$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 2 \times 80^2 + 2 \times 30^2 + 60^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 18\ 200\ mm^2 = 0{,}0182\ m^2$

Tomamos al remache A como crítico

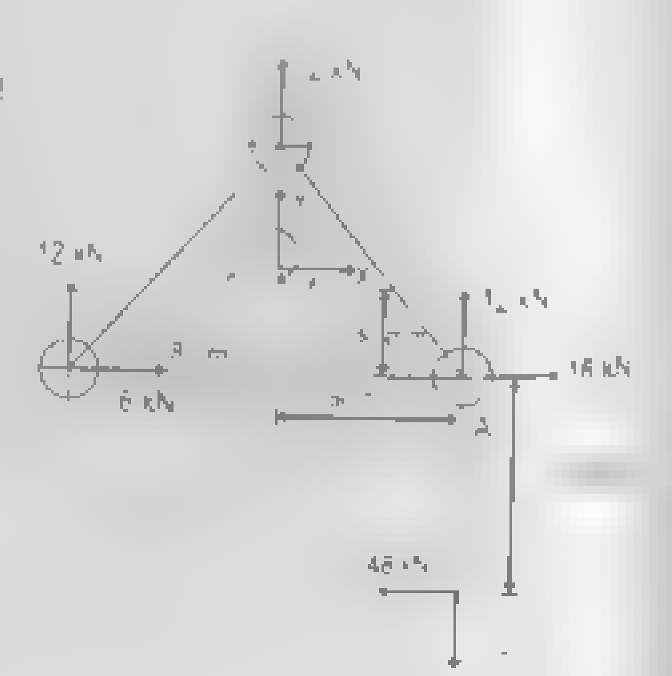
Carga constante: $P_{d_x} = 16\ kN\rightarrow$

$P_{d_y} = 12\ kN\uparrow$

Cargas variables

$P_{t_x} = \frac{9\ 120\ 000\ N{\cdot}mm}{18\ 200\ mm^2}(30\ mm)$

$P_{t_x} = 15{,}03296703\ kN\rightarrow$



$P = \frac{9\ 120\ 000\ N{\cdot}mm}{18\ 200\ mm}(80\ mm)$

$P = 40{,}0879\ kN\uparrow$

$P = P + P$

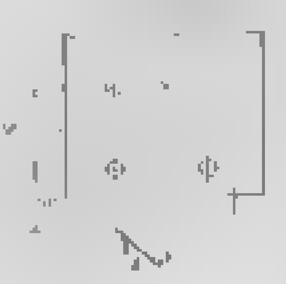
Con valores conocidos

$P_t = \sqrt{(16 + 15{,}03296703)^2 + (12 + 40{,}0879)^2}$ $P = 60{,}63162846\ kN$

Luego: $\tau = \frac{P_t}{\frac{\pi d^2}{4}}$, pero d = 22 mm

$\frac{60{,}63162846 \times 10^3\ N}{\frac{\pi (22 \times 10^{-3})^2\ m^2}{4}}$ $\boxed{\tau = 159{,}5012128\ MPa}$

Dada la conexión de la figura, calcular la carga admisible P si el esfuerzo cortante en los remaches de 25 mm está limitado a 140 MN/m²



Resolución.

En la figura adjunta, trasladando la carga al centro de gravedad

$M_t = (0{,}8P)(100) + (0{,}6P)(40)$

$M_t = 104P$

Tomamos el punto crítico en el remache A

Carga constante. $P_{d_x} = \frac{0{,}8P}{3} = \frac{4P}{15}$

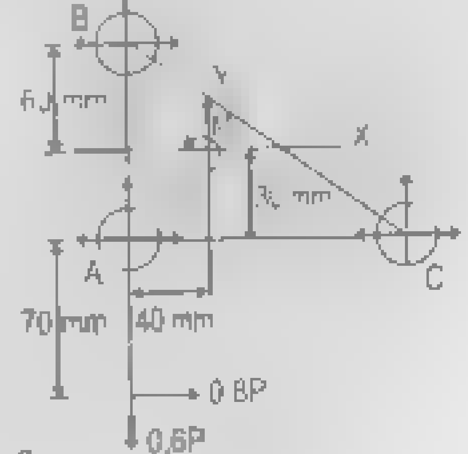
$P = \frac{0{,}6P}{3} = \frac{P}{5}$

Carga variable en A.

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 60^2 + 40^2 + 40^2 + 60^2 + 30^2 + 30^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 15\ 000\ mm^2$

$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = 0{,}015\ m^2$



$P_x = \frac{104P\,mm}{15\,000\,mm}(30\,mm) = \frac{26}{125}P$

$P_y = \frac{104P\,mm}{15\,000\,mm}(40\,mm) = \frac{104}{375}P \uparrow$

Sumando ambas cargas en A

$P = \sqrt{\left(\frac{4P}{15}+\frac{26}{125}\right)^2 \ldots}\;P$

De donde $P_t = 0{,}673168296\,P$ (α)

Como: $\frac{P_t}{\frac{\pi d^2}{4}} \le 140\times10^6\,N/m^2$ (β)

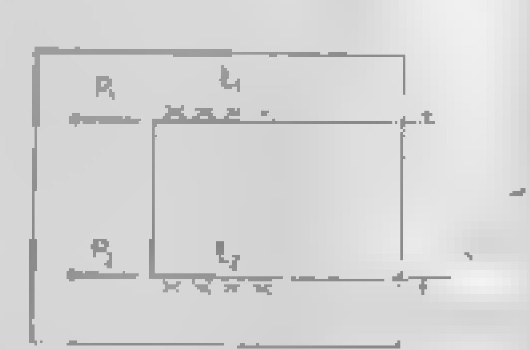
Con [illegible]

1241 Problema Ilustrativo

1242 Una placa de 150 mm de ancho por 14 mm de espesor se coloca s[illegible] placa fija y se suelda mediante filetes laterales. Determinar la minim[illegible] tud de una soldadura de filete de 8 mm si la placa ha de soportar un[illegible] de tracción axial que le produce un esfuerzo de 140 MPa. el esfuerzo cor[illegible] te admisible en la garganta de la soldadura es de 145 MPa

Resolución:

En figura adjunta tenemos:



Cálculo de carga P

$\sigma_t = 140\times10^6\,N/m^2 = \frac{P}{150\times14\times10^{-6}}$

Resistencia a tracción de la placa usada

$P = 294\,kN$

Detalle cordón

Cálculo de $L_1 = L_2$

$P_1 = P_2 = \frac{P}{2} = 147\,kN$

$103a = 103{,}8$

También $\frac{P}{L} = 145\times10^6(\cos45°)\,a\times10^{-6}$; $q = \frac{P}{L} = 820{,}2438662\ \frac{N}{mm}$

Se sabe: $\frac{P_1}{L_1} = q \rightarrow L_1 = \frac{P_1}{q}$

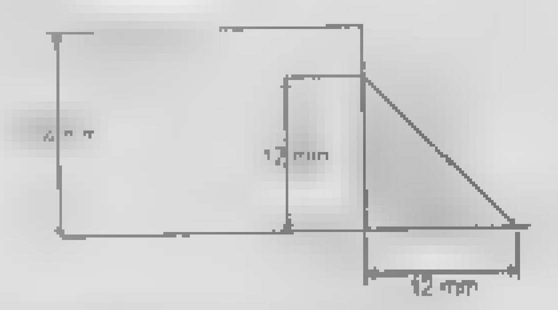
$L_1 = \frac{147\times10^3\,N}{820{,}2438662\,\frac{N}{mm}} \Rightarrow \boxed{L_1 = 179{,}21\,mm}$

[illegible] dura

Resolución:

En problema anterior considere "a" lo máximo posible

Tenemos de la figura



$q = 145\times10^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a\times10^{-6}$

Como a = 12 mm

$q = 1230{,}365799\ N/mm$

$L_1 = \frac{P}{q} = \frac{147\times10^3\,N}{1230{,}365799\,\frac{N}{mm}}$ $\boxed{L_1 = 119{,}476663\,mm}$, por cada lado

[illegible] 100 × 1[illegible] mm [illegible] de 150 mm [illegible] carga centrada [illegible] 400 kN [illegible] de la soldadura, es de 145 MPa

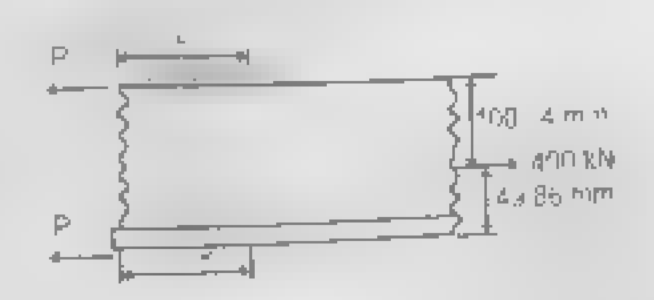
Resolución:

En la figura adjunta

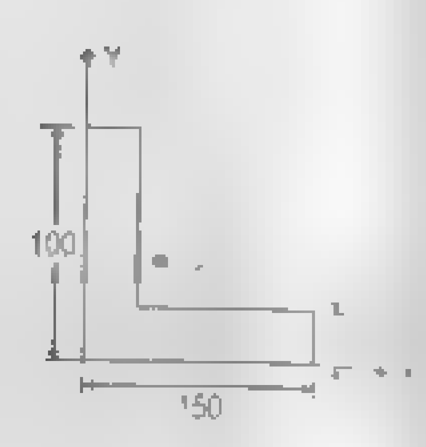
Tamaño del cordón: a = 8 mm

Sabemos: $\sigma_a = 145\,MPa$

Resistencia del cordón



Cálculo del CG.



$$x = \frac{\sum xA}{\sum A}$$

$$\bar{x} = \frac{75 \times 150 \times 100 - 81{,}5 \times 87 \times 137}{}$$

x 49 86 mm

Cálculo de P_1 y P_2

Momentos respecto a la normal al plano que corte a P_1 y P_2

$400 \times 100\ 16 = 150P_2 \Rightarrow P_2 = 267{,}056$ kN

$150\ P_1 = 400 \times 49\ 86 \Rightarrow P_1 = 132\ 945$ kN

$$145 \times 10^6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) a \times 10^6 \frac{N}{mm}\ ;\ a$$

$q = 820\ 244$ N/mm

q 820.244 N/mm

$$L_1 = \frac{132\ 945 \times 10^3 N}{820\ 244\ N/mm} \Rightarrow \boxed{L_1 = 162\ 08\ mm}$$

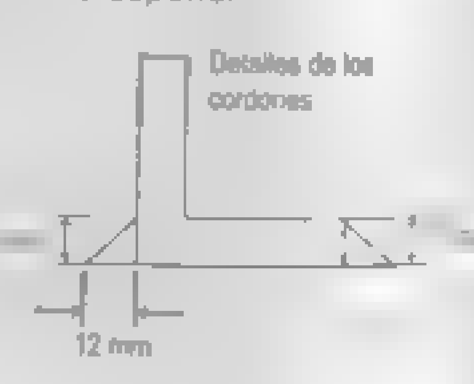
1245. Resolver el problema anterior si los cordones son de 12 mm en la base del ángulo y del máximo tamaño permitido en el borde superior

Resolución:

En el problema anterior

12 mm, en la base del ángulo

13 − 2 = 11 mm, en borde superior



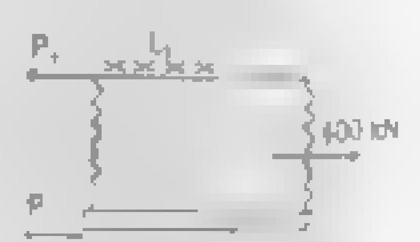
Del problema anterior tenemos

$P_2 = 267{,}056$ kN

$P_1 = 132\ 945$ kN

Sabemos que

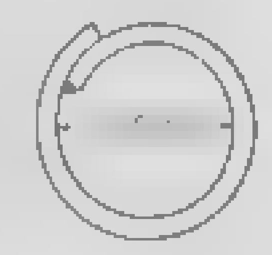
$$q_2 = \frac{P_2}{L_2},\ L_2 = \frac{P_2}{q_2}$$



$$L = \frac{267\ 056 \times 10^3\ N}{} \Rightarrow \boxed{L\quad 217\ 053\ mm}$$

$$L_1 = \frac{132\ 945 \times 10^3\ N}{\sqrt{2}\quad N} \Rightarrow \boxed{L_1 = 117\ 876\ mm}$$

Con una placa de acero de 16 mm se forma un cilindro de 1 5 m de diámetro que se suelda mediante filetes frontales interior y exterior como indica la figura. Determinar la máxima presión interior que puede aplicarse si los esfuerzos admisibles son de 160 MN/m² en la chapa y de 120 MN/m² a cortante en las gargantas de la soldadura. Emplear cordones del mayor tamaño admisible



Resolución.

En la figura adjunta

$t = 16$ mm

$D = 1\ 5$ m

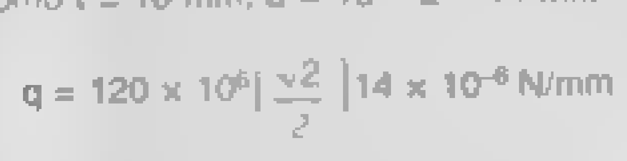
Sabemos: $\sigma_t = \dfrac{pD}{2t}$

Para casos D >> 1

Resistencia de la chapa: $\sigma_t = 160$ MPa

Resistencia de soldadura $\sigma_a = 120$ MPa

Como $t = 16$ mm, $a = 16 - 2 = 14$ mm



$$q = 120 \times 10^6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) 14 \times 10^{-6}\ N/mm$$

$q = 1187\ 939$ N/mm

$$160 \times 10^6\ N/m^2 = 160 \times 10^6 \frac{N}{10^6\ mm^2} = 160\ N/mm^2$$

Tomamos de la placa espesor = 16 mm y profundidad = 1 mm

Carga que soporta la placa. $P_1 = A\sigma_1 = \dfrac{pD}{2t} A$

$P_1 = 160 \frac{N}{mm^2} \times 16\ mm \times 1\ mm = 2560\ N/mm$ profundidad

Resistencia de cordon por cada milímetro de profundida

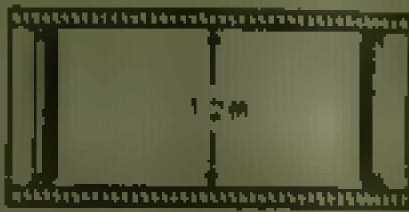
$P_2 = 2q = 2(1187{,}9394\ N/mm) = 2375{,}8787\ N/mm$

Sumando ambas cargas para 1 mm de profundidad

$4935{,}878784\ N = p \times 1{,}5 \times 10^3 \times 1\ mm^2 \Rightarrow p = 3{,}29 \frac{N}{mm^2}$

$p = 3{,}29\ MPa$ máxima carga o presión en cilindro

1247 Se construye un deposito cilíndrico soldando, como se ve en la figura dos tapas en los extremos de un cilindro de 1,20 m de diámetro. Tanto el cilindro como las tapas son de placa de 10 mm. Determinar la presión interior de seguridad de manera que no se exceda un esfuerzo cortante de 110 MPa en la garganta del filete circunferencial que será del maximo tamaño admisible



Resolución:

De la figura adjunta tenemos.

Fuerza debida a la presión sobre la tapa es

$$F_p = p\frac{\pi D^2}{4}$$

La carga de resistencia que el cordón opone.

$$F_{cordon} = qL = q\pi D$$

Sabemos que $q = \frac{P}{L} = \sigma_a L_a \cos 45°$

$$q = 110 \times 10^6 \frac{N}{m^2} \times 8\ mm \times 10^{-6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q = 622{,}254 \frac{N}{mm}$$

Como $F_p = F_{cordon}$

$p\pi \frac{D^2}{4} = q\pi D$ donde "p" presión del tanque

1249 Un sop[...]se de una maquina como indica[...]a de lo[...]usando $\tau = 145$ MPa en las gargantas de la soldadura

Resolución:

En figura adjunta trasladando la carga al centro de gravedad

$M_t = (80\ kN)(200\ mm)$

$M_t = 16\ kN{\cdot}mm$

$$I_p = \Sigma L\left[\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right]$$

$$I_p = 2 \times 250\left[\frac{250^2}{12} + 100^2 + 0^2\right]$$

$$I_p = 7\ 604\ 166\ \frac{2}{3}\ mm^3$$

Tomamos como punto crítico el punto A

Carga constante $q_{d_y} = \frac{80 \cdot 10^3\ N}{500\ mm} = 160 \frac{N}{mm} \uparrow \quad q_{d_x} = 0$

Carga variable en A $q_{t_x} = \frac{16\ 000\ 000\ N\ mm}{7\ 604\ 166\ \frac{2}{3}\ mm^3}(125\ mm) = 263{,}014 \frac{N}{mm}$

$$q_{t_y} = \frac{16\ 000\ 000\ mm^2}{7\ 604\ 166\ \frac{2}{3}\ mm^3}(100) = 210{,}411\ N/mm \uparrow$$

La resultante en A será. $q_A = \sqrt{(q_{d_x} + q_{t_x})^2 + (q_{d_y} + q_{t_y})^2}$

$q_A = \sqrt{(160 + 210{,}411)^2 + 263{,}014^2} \quad q_A = 454{,}2914\ N/mm$

Como τ = 145 MPa , resistencia del cordón

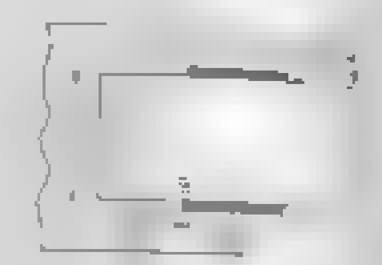
$q = 103a = q_A$ 454 2914 N/mm

Luego. 103a = 454 2914 N/mm

De donde a = 4 41 mm

El superior más cercano **a = 5 mm**

1250. Se suelda una placa soporte a una placa fija como se indica en la figura. Determinar el calibre de los cordones rodeando al milímetro. Hallar el valor máximo de P que podría aplicarse con cordones de 8 mm usando τ = 145 MPa en las gargantas de la soldadura



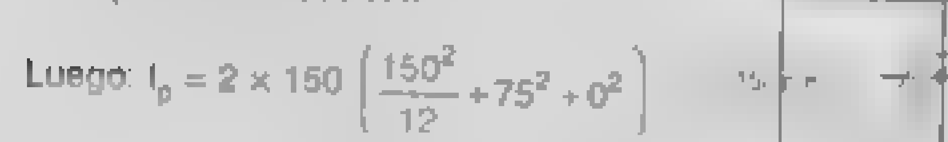
Resolución.

En figura adjunta

a) Cálculo de "a", para P = 90 kN

M_t = (90 kN)(175 mm)

M_t = 15 750 000 N mm

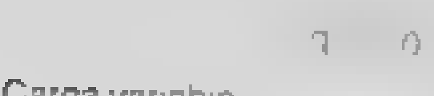


Luego: $I_p = 2 \times 150\left(\frac{150^2}{12} + 75^2 + 0^2\right)$

I_p = 2 250 000 mm³

Tomamos A como punto crítico

Carga constante $q_{d_y} = \frac{90 \times 10^3\ N}{300\ mm}$



Carga variable

$q_{tx} = \frac{M_t\, y}{I_p} = \frac{15\ 750\ 000\ N\ mm}{2250000\ mm^3} \times 75\ mm = 525\ \frac{N}{mm}$

$q_{ty} = 525\ \frac{N}{mm}$ ↑

Luego $q_A = \sqrt{(300 + 525)^2 + (525)^2}$, de donde: q_A = 977 88 N/mm

Como τ_a = 145 MPa en cordón E-70; A36

q_A = 103a = 977 88 N/mm

De donde: a = 9 4939 mm

El más cercano superior **a = 10 mm**

b) Si a = 8 mm Cálculo de valor máximo de P

Considerando A el punto crítico

Carga constante: $q_{d_y} = \frac{P}{300}$ ↑; $q_{d_x} = 0$

Momento en CG M_t = 175 P

Carga variable en A

$q_{t_x} = \frac{175\ P \times 75}{2\ 250\ 000} = \frac{7P}{1200}$ ← ; $q_{t_y} = \frac{7\ P}{1200}$ ↑

$q_A = \sqrt{\left(\frac{P}{300} + \frac{7P}{1200}\right)^2 + \left(\frac{7P}{1200}\right)^2} = 0\ 010865337P$

Como $q_A = 103a = 103(8) = 824\ \frac{N}{mm} = 0{,}010865337P \Rightarrow$ **P = 75,8375 kN**

1251. E... de cordones se añade otro cordón frontal a lo largo de todo el borde AE

Resolución.

En figura adjunta:

Centro de gravedad es

$\bar{y}$ = 75 mm

$\bar{x} = \frac{\sum x}{\sum L}$

El momento torsor es

$M_t = 90 \times 150 \times 10^3$ N·mm

M_t = 13 500 000 N mm

$\sum L\left[\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right]$

$2 \times 150\left(\frac{150^2}{12} + 25^2 + 75^2\right) + 150\left(\frac{150^2}{12} + 50^2\right) \Rightarrow I_p = 3\ 093\ 750\ mm^3$

Se toma punto crítico en el punto E

Carga constante: $q_{d_y} = \frac{90\ 000\ N}{450\ mm} = 200\ \frac{N}{mm}$ ↓ ; $q_{d_x} = 0$

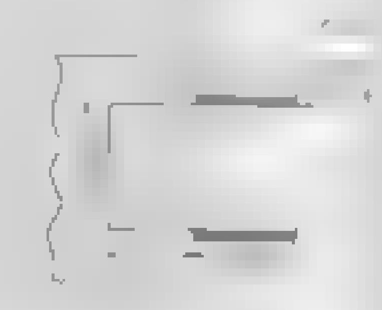
Carga variable en E crítico en E

$$q_{t_x} = \frac{M_t\, y}{I} = \frac{13\,500\,000\ \text{N mm}}{3\,093\,750\ \text{mm}^3} \times 75\ \text{mm} \Rightarrow q_{t_x} = 327.273\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$q = \frac{M_t\, x}{I} = \frac{13\,500\,000}{3\,093\,750\ \text{mm}}(50\ \text{mm}) \Rightarrow q_{t_y} = 218.182\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}\ \uparrow$$

$$\boxed{q_E = 531.02147\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$, carga máxima que soporta el cordón p

1252 En la figura se sueldan también los bordes AE y GF. Determinar la fuerza máxima por milímetro de cordón.



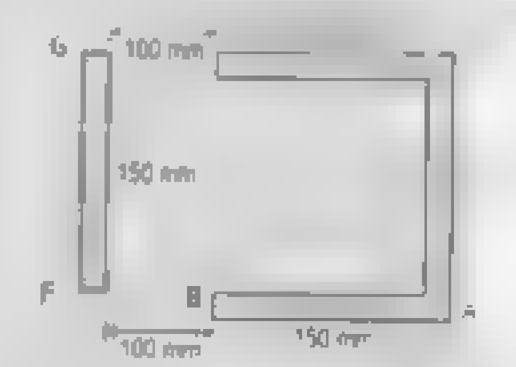
Resolución

El problema 1250 se suelda AE y GF

Hallar el $q_{máx}$ del cordón

Cálculo de $\bar{x}$ y $\bar{y}$

Refiendo a A



$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x} L}{\sum L}$$

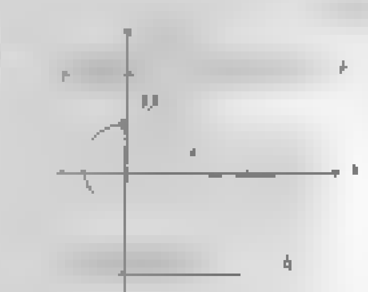
$$\bar{x} = \frac{75 \times 150 \times 2 + 250 \times 150}{600}$$

$\bar{x} = 100$ mm; por simetría, $\bar{y} = 75$ mm

El momento M_t es:

$M_t = (90\ \text{kN})(200\ \text{mm})$

$M_t = 18\,000\,000$ N·mm



Tomamos como punto crítico A o E

igual es por simetría

Carga constante $q_{d_y} = \frac{90\,000\ \text{N}}{600\ \text{mm}} = 150\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}\ \uparrow$, $q_{d_x} = 0$

Carga variable en E

$$I_p = \sum L\left(\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$$

$$I_p = 150\left(\frac{150^2}{12} + 25^2 + 75^2\right) \times 2 + 150\left(\frac{150^2}{12} + 100^2\right) + 150\left(\frac{150^2}{12} + 150^2\right)$$

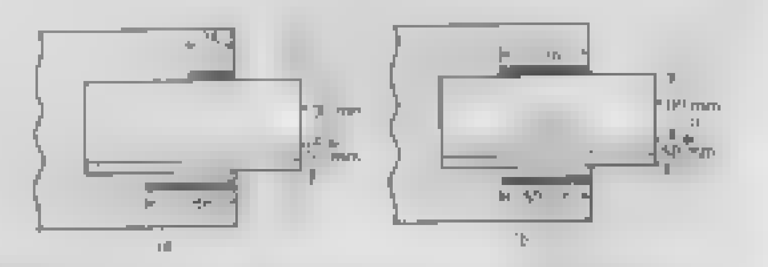
De donde $I_p = 7\,875\,000\ \text{mm}^3$

$$q_{t_x} = \frac{M_t}{I_p} y = \frac{18\,000\,000\ \text{N·mm}}{7\,875\,000\ \text{mm}^3}(75\ \text{mm}) \Rightarrow q_{t_x} = 171{,}428\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}\ \leftarrow$$

$$q_{t_y} = \frac{18\,000\,000\ \text{N·mm}}{7\,875\,000\ \text{mm}^3}(100\ \text{mm}) \Rightarrow q_{t_y} = 228{,}571\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}\ \uparrow$$

$$q_E = \sqrt{171{,}428^2 + (228{,}571 + 150)^2} \Rightarrow \boxed{q_E = 415{,}576\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

Valor máximo del cordón en E



1253 Se suelda un ángulo a una placa para soportar una carga P cuya línea de acción pasa por el centro de gravedad de la sección del ángulo. (a) En la figura se indican las longitudes necesarias de los cordones de 8 mm, pero un soldador aplicó los cordones como en (b) de la misma figura. Con la carga P determinada en (a), calcular la máxima carga por milímetro de cordón en (b) suponiendo que las placas son rígidas y que solo las soldaduras trabajan elásticamente, con un valor de τ = 145 MPa en las gargantas de las soldaduras.

Resolución:

a) Cálculo de P, en la figura (a) se tiene

$P = P_1 + P_2$

Como τ = 145 MPa

$q = 103\,a$

$q = 103(8) = 824\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

$P = (75\ mm)\ (824\ \frac{N}{mm}) + 150\ mm\ (824\ \frac{N}{mm}$

$P = 185\ 400\ N$

$P = 185{,}4\ kN$

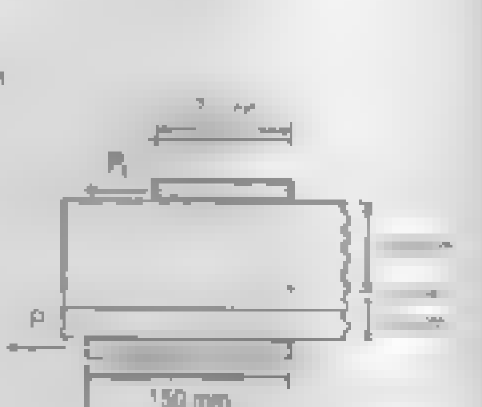
b) Carga máxima $q_{máx}$ si por error en vez de (a) se hizo (b)

De lo anterior: $P = 185{,}4\ kN$

$M = 185\ 400\ N \times 25\ mm = 4\ 635\ 000\ N\cdot mm$

$I_p = \Sigma L \left(\frac{L^2}{12} + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$

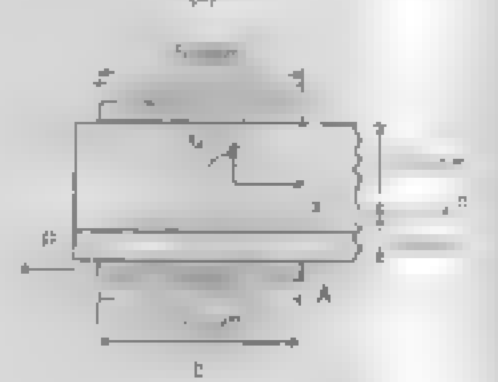
I_p [illegible] 2×150 [illegible] 12 [illegible]

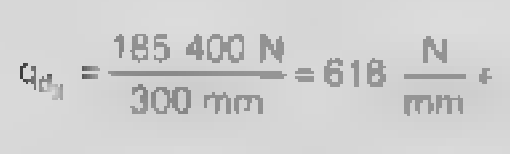


$= 2\ 250\ 000\ mm^3$

Se toma punto crítico en interior derecho A

Carga constante





$q_{d_x} = \frac{185\ 400\ N}{300\ mm} = 618\ \frac{N}{mm}$

$q_{d_y} = 0$

Carga variable: $q_{t_y} = \frac{M \cdot y}{I_p}$; $\frac{M \cdot x}{I_p}$

$q_{t_x} = \frac{4\ 635\ 000\ N\cdot mm}{2\ 250\ 000\ mm^3}\ (75\ mm) = 154{,}5\ \frac{N}{mm} \leftarrow$

$q_{t_y} = 154{,}5\ \frac{N}{mm} \downarrow$

$q_A = \sqrt{(618 + 154{,}5)^2 + 154{,}5^2} \rightarrow q_A = 787{,}7985\ \frac{N}{mm}$

[illegible]4 Resolver el problema ilustrativo 1248 si se añade otro cordón a lo largo del borde de 100 mm de espesor en A

Resolución:

E[illegible] cordones DE, EA, AB [illegible] P

y calculo de $\bar{x}$ e $\bar{y}$

Refiriendo al punto A

100 E 40 kN
100 mm
M
Y
100
X
$\bar{y}$
x
A

$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x} L}{\Sigma L}$

$\bar{x} = \frac{50 \times 100 + 75 \times 150}{350}$

$\bar{x} = 46\frac{3}{7}\ mm$; $\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} L}{\Sigma L} = \frac{100 \times 100 + 100 \times 50}{350}$

$\bar{y} = 42\frac{6}{7}\ mm$

Trasladando la carga al CG hallado

$M_t = (40\ 000\ N)\left(146\frac{3}{7}\right)\ mm \Rightarrow M_t = 5\ 857\ 142{,}857\ N\cdot mm$

$I_p = \Sigma L \left(\frac{L^2}{12} + x^2 + y^2\right)$

$I_p = 100$ [illegible] 12 [illegible] $\frac{4}{7}$ [illegible] $\frac{1}{7}$ [illegible] 100 [illegible] 12 [illegible] $46\frac{3}{7}$ [illegible] $7\frac{1}{7}$ [illegible]

[illegible] 150 [illegible] 12 [illegible] $28\frac{4}{7}$ [illegible] $42\frac{6}{7}$ [illegible]

$I_p = 1\ 394\ 345{,}238\ mm^3$

Elegimos el punto E como crítico

Carga constante en E

$P_{d_y} = \frac{40\ 000}{350\ mm} N = 114\frac{2}{7}\ N.m \uparrow$

$P_{d_x} = 0$

Carga variable en E: $P_{t_y} = \frac{M_t}{I_p} y$

$$P_x = \frac{5\,857\,142{,}857 \text{ N mm}}{1\,394\,345\,238 \text{ mm}^3}\left(57\frac{1}{7}\text{mm}\right) \Rightarrow P_x = 240{,}0366\ \frac{N}{mm}$$

$$P_{t_y} = \frac{5\,857\,142\,857 \text{ N mm}}{1\,394\,345\,238}\left(46\frac{3}{7}\text{mm}\right) \Rightarrow P_{t_y} = 195{,}0297\ \frac{N}{mm}$$

Luego: $P_E = \sqrt{\left(114\frac{2}{7} + 195{,}0297\right)^2 + 240{,}0366^2}$

$P_t = 391{,}5272594$ N/mm

Como $\tau = 145$ MPa; electrodo E-70, A36

$q_E = 103a$, $q_E = 391{,}5272394 \frac{N}{mm}$

De donde $a = 3{,}801235$ mm

El más cercano superior es: $a = 4$ mm recomendable.

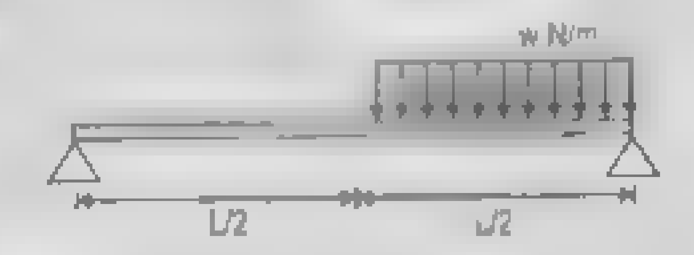
CAPÍTULO 13

TEMAS ESPECIALES

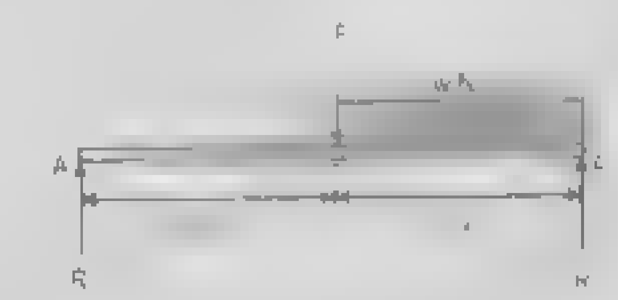
1301, 1302 problemas ilustrativos

1303. Determinar el valor de EIδ en el centro del claro en una viga simplemente apoyada en sus extremos, de longitud L que soporta una carga uniformemente distribuida de w N/m sobre su mitad derecha

Resolución



Graficando una viga simplemente apoyada con carga uniforme sobre su mitad derecha



Como nos piden la deflexión en el centro del claro, es decir en el punto medio de la viga, aplicaremos ahí una carga ficticia F de valor nulo en ese punto. En el diagrama del cuerpo libre del sistema hallaremos las reacciones en los puntos de apoyo

Por las ecuaciones de la estática $\Sigma M_A = R_2(L) - F\left(\frac{L}{2}\right) - w\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{4}\right) = 0$

A$\cdot$ R $\frac{F}{2}$ $\frac{3}{8}$

R F

Así R $\frac{F}{2}$ $\frac{wL}{8}$ ...(2)

La deflexión en el punto B será ... $\frac{\partial T}{\partial F}$, donde $T = \int \frac{M^2}{2EI} ds$

Así ... $\frac{1}{E}\int M \frac{M}{F}$ ... para F ... 0

Ya que EI es constante

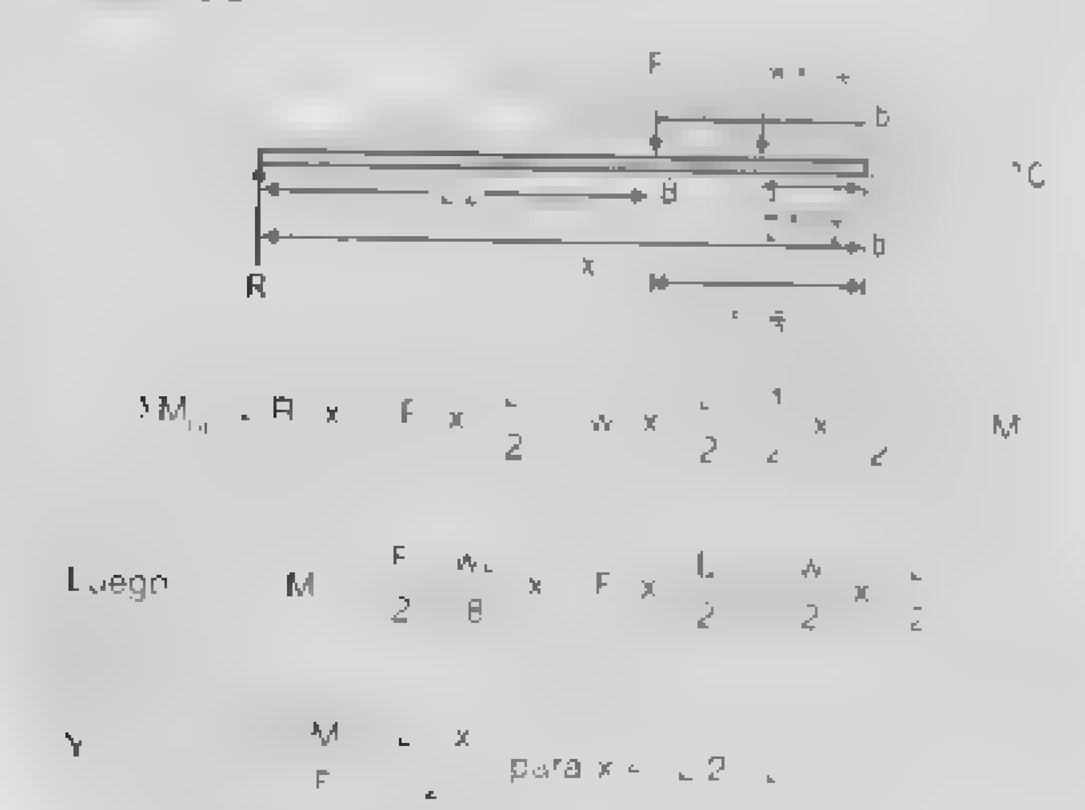
Hallando los momentos flectores en cada tramo respecto a la variable ... dante "x"

Tramo AB

ΣM ... R x ... $\frac{F}{2}$ x ... $\frac{w}{8}$ ... x ... M

donde $\frac{M}{F}$ ... $\frac{x}{2}$ para x ... L ...

Tramo BC



ΣM ... R x ... F x ... $\frac{L}{2}$ ... w x ... $\frac{L}{2}$ ... $\frac{1}{2}$ x ... M

Luego ... M ... $\frac{F}{2}$ $\frac{wL}{8}$ x ... F x ... $\frac{L}{2}$ ... $\frac{w}{2}$ x ...

Y ... $\frac{M}{F}$ ... x ... para x ... L 2 ...

Como F = 0, hallando δ_B

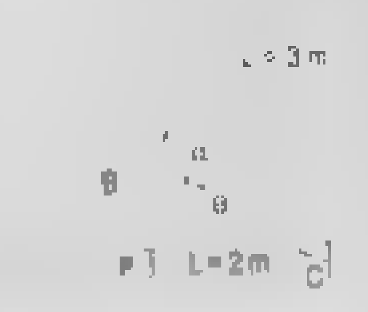
$\delta_B = \frac{1}{E}\int_0^{L/2}\left(\frac{wL}{8}x\right)\frac{x}{2}dx + \ldots$

$EI\delta_B = \frac{w}{16}\left(\int_0^{L/2} Lx^2 dx + \int_{L/2}^{L}(4x^3 \ \ 9 \ldots x \ \ldots 6L \ldots x \ldots x)\right)$

Operando y simplificando. $EI\delta_B = \frac{w}{16} \ldots$

Tenemos que: $EI\delta_B$ ... $\frac{\ldots}{768}$ ...

Como se indica en la figura, dos varillas de aluminio AB y BC articuladas en A y C a apoyos rígidos, soportan en B una carga vertical de 20 kN. Si las dos varillas tienen la misma sección recta de 400 mm² y E = 70 GPa, calcular los desplazamientos horizontal y vertical del punto B. Tómese α = 30° y θ = 30°



Resolución:

Por efecto de la carga P ... varillas AB y BC ... efectos de tensión o compresión. Haciendo el diagrama del cuerpo libre en el punto B

Para el equilibrio

$\Sigma F_x = 0$ así

$P_{AB}(\cos 30°) = P_{CB}(\cos 30°)$

$\Sigma F_y = 0$, así

$P_{AB}(\text{sen } 30°) + P_{CB}(\text{sen } 30°) = P$

Resolviendo

$P_{AB} = P_{CB} = P$ ... (1)

Las deformaciones de cada varilla son: (utilizando $\delta = \frac{PL}{EA}$

Varilla AB: $P_{AB} = P$, de tensión

Así $\delta_{AB} = \frac{P_{AB}L_{AB}}{EA}$ de alargamiento $\Rightarrow \delta_{AB} = \frac{(20\ kN)(3m)}{(70GPa)(400\ mm^2)}$

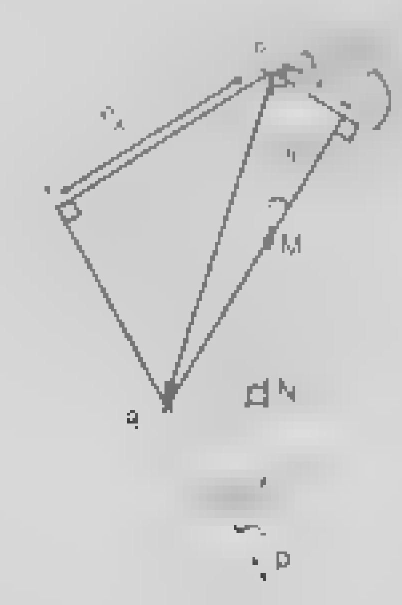
$$\delta_{AB} = \frac{(20\times10^3\ N)(3)(1000)^3\ mm^3}{(70\times10^9\ N)(400\ mm^2)} \Rightarrow \delta_{AB} = \frac{15}{7}\ \text{mm de alargamiento}$$

Varilla CB

$P_{CB} = P$ de compresión

$$\delta_{AB} = \frac{P_{CB}\,L_{CB}}{EA} = \frac{(20\ kN)(2m)}{(70GPa)(400\ mm^2)} \Rightarrow \delta_{AB} = \frac{10}{7}\ \text{mm de acortamient}$$

Haciendo el gráfico de deformaciones



Por efecto de las deformaciones el punto B es trasladado al punto B'

Es decir, sufre una deformación vertical $\delta_v = BN = BM + MN$

y una deformación horizontal $\delta_h = B'N$

Por relaciones geométricas: $BM = 2\delta_{CB}$; $BP = 2\delta_{AB}$ y $MN = NP = \delta_{AB} - \delta$

Así $\qquad BN = \delta_{AB} + \delta_{CB} = \delta_V \qquad$ ... (2)

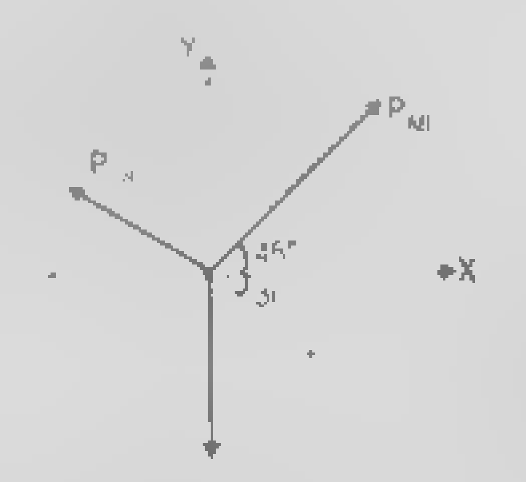
Además $\quad B'N = \frac{\sqrt{3}}{4}MN = \frac{\sqrt{3}}{3}$ [illegible] $\qquad$ ... (3)

Por lo tanto $\quad \boxed{\delta_v = \frac{25}{7}\ mm} \quad \boxed{\delta_h = \frac{5\sqrt{3}}{21}\ mm}$

130) **Resolver el problema anterior si la varilla AB es de acero, con E = 200 GPa. $\alpha = 45°$ y $\theta = 30°$. El resto de los datos no varía**

Resolución

Haciendo el diagrama del cuerpo libre en el punto B



Para el equilibrio

$\Sigma F_x = 0$, $P_{AB}\cos 45° = P_{CB}\cos 30°$ $\qquad$ ...(1)

$\Sigma F_y = 0$, $P_{AB}\text{sen } 45° - P_{CB}\text{sen } 30° = P$ $\qquad$ ... (2)

Resolviendo: $P_{AB} = \frac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}-1)P$, de tensión

$P_{CB} = (\sqrt{3}-1)P$, de compresión

Como tenemos los datos

$P = 20\ kN$; $L_{AB} = 3\ m$; $L_{CB} = 2\ m$

$E = 200\ GPa$; $A = 400\ mm^2$

Hallando las deformaciones

$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB}L_{AB}}{EA} = \frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{(\sqrt{3}-1)(20\ kN)(3\ m)}{(200GPa)(400\ mm^2)}$$

$$\delta_{AB} = \frac{3}{8}\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)\ \text{mm. de alargamiento}$$

$$(200\ \text{GPa})(400\ \text{mm}^2)$$

B se deforma hasta alcanzar el punto B

La deformación horizontal será

$\delta_h = B'N$ ... (3)

La deformación vertical será

$\delta_v = BN = BM + MN$ ... (4)

Por relaciones geométricas

$$BR = \sqrt{2}\delta_{AB}\ ;\ BM = 2\delta_{CB}\ ;\ B'N = NR\ ;\ MN = \sqrt{3}\,B'N$$

Así, $BR = BM + MN + NR$

Luego: $\sqrt{2}\delta_{AB} = 2\delta_{CB} + \sqrt{2}\,B'N + B'N$

Por lo tanto: $\delta_h = B'N = \dfrac{\sqrt{2}\delta_{AB} - 2\delta_{CB}}{(\sqrt{3}+1)}$

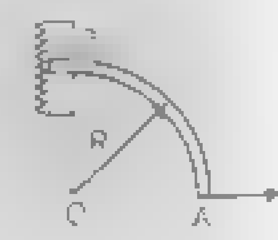
y, $\delta_v = 2\delta_{CB} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\left(\sqrt{2}\delta_{AB} - 2\delta_{CB}\right) \Rightarrow \delta_v = \dfrac{2\delta_{CB} + \sqrt{6}\,\delta_{AB}}{\sqrt{3}+1}$

Reemplazando los valores

$\delta_h = 0{,}08$ mm

$\delta_v = 0{,}87$ mm

1306. Una barra curva en forma de cuarto de círculo, empotrada en un extremo, está situada en un plano vertical, como se indica en la figura. Calcular los desplazamientos horizontal y vertical del punto A



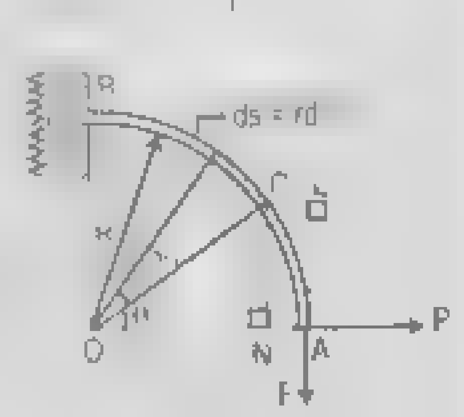
Resolución:

Para hallar el desplazamiento vertical aplicaremos una fuerza F ficticia de ... de Castigliano en el punto A tendremos

Donde $\delta_v = \dfrac{\partial U}{\partial F}$, para F = 0

Donde

Haciendo el diagrama del cuerpo libre y tomando momentos en un punto genérico C, para un elemento diferencial



El momento flexionante respecto a C es

$$M = P(AL) - F(CL)$$

De las relaciones trigonométricas

$$AL = CN = R\text{sen}\theta$$
$$CL = NA = R(1 - \cos\theta)$$

Así: $M = (R\text{sen}\theta)P - (R)(1 - \cos\theta)F$

Donde: $\dfrac{\partial M}{\partial P} = R\text{sen}\theta\ ;\ \theta \in \langle 0, \pi/2\rangle \ \wedge\ \dfrac{\partial M}{\partial F} = -R(1 - \cos\theta)$

De (1), $\delta_h = \dfrac{\partial U}{\partial P} = \int \dfrac{M}{EI}\dfrac{\partial M}{\partial P}$

Asumiendo que EI es constante

$$\delta_h = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{R\text{sen}\theta}{EI}\right)P(R\text{sen}\theta)R\,d\theta$$

Como $\frac{\partial U}{\partial F} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F} ds$, $F = 0$

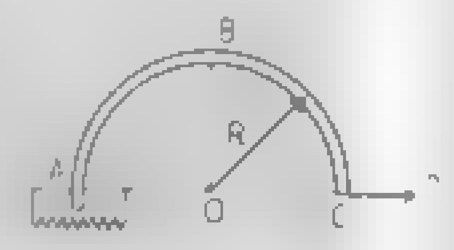
$$\int_0^{\pi/2} \frac{(R\,sen\theta)}{EI} P(-R)(1-\cos\theta)\,Rd\theta$$

$$\frac{R^3P}{E}\int^{\pi/2} (-1+\cos\theta)\,sen\theta d\theta \Rightarrow$$

El signo negativo indica que el desplazamiento vertical es hacia arriba

Nota: la fuerza ficticia hay que colocarla siempre en la dirección que se busca ...

1307 Una barra ... está situada en un plano vertical, como indica la figura. Determinar el desplazamiento horizontal del punto C y el vertical del punto B



Resolución:

El análisis ...

Para el desplazamiento ... C

$$\delta_h = \int_0^{\pi} \frac{R^3P}{EI} sen^2\theta\,d\theta \Rightarrow \delta_h = \frac{R^3P}{EI}\frac{\pi}{2} = \delta_h$$

Para el desplazamiento vertical del punto B ... así

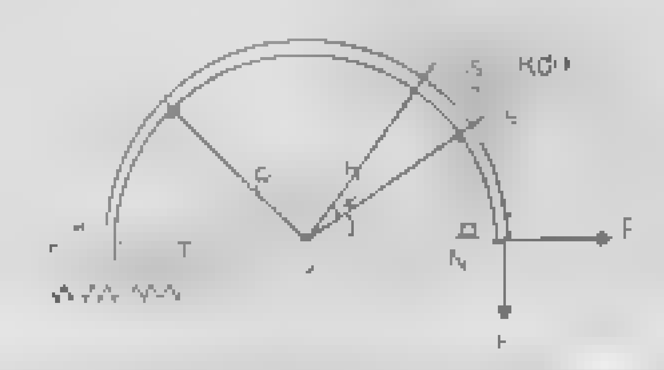
$$\frac{R^3P}{EI}\int^{\pi/2} (1-\cos\theta)\,sen\theta d\theta \qquad \frac{R^3P}{2EI}$$

Nota: aquí ya cambiamos el signo, dado que el desplazamiento vertical es hacia arriba.

1308 Repetir el problema anterior si P está aplicada en C, pero verticalmente hacia abajo.

Resolución

Graficando la carga P vertical en C y ... F ... horizontal en C donde se supone se desplaza



... momento flexionante en el punto ... D

$M = F(LC) - P(DL)$ ...(1)

...

$DL = NC = R(1-\cos\theta)$

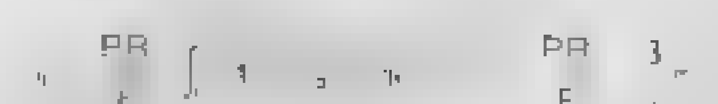
En (1) $M = F(R\,sen\theta) - PR(1-\cos\theta)$ (1)'

con $\theta \in (0;\pi)$

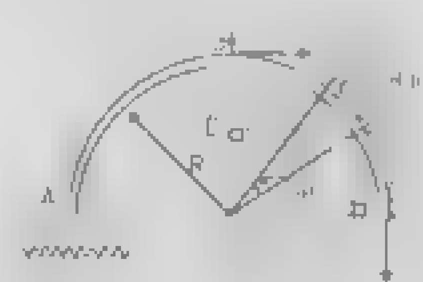
...

Para el desplazamiento horizontal en C

$$\delta_h = \int_0^{\pi} \frac{PR(1-\cos\theta)}{EI} \ldots R\,d\theta$$



Para el desplazamiento vertical en B, y también horizontal, colocar dos [illegible] zas ficticias de valor nulo F_o y H_o. Hallando momentos respecto a un g[illegible] co D



Por efecto de la carga P vertical solo genera flexión, así

Desplazamiento vertical

[illegible]

Desplazamiento horizontal [illegible]

Como: $U = \int \frac{M^2}{2EI} ds$ y [illegible]

El momento flexionante en el punto D es

$$M = F_o(BD) + P(DC') - H_o(D'D)$$

Así $M = F_o(R)(1 - \cos\theta) + PR(1 - \cos\theta) - H_oR\cos\theta$, donde F_o [illegible] H

Luego $\frac{\partial M}{\partial F} = R(1 - \cos\theta)$ ...(1)

$$\frac{\partial M}{\partial H_o} = -R(\cos\theta) \quad ...(2)$$

y $M = PR(1 - \cos\theta)$ ...(3)

Utilizando las ecuaciones

$$\delta_h = \int \frac{PR}{EI}(1 - \cos\theta)\, R\,(1 - \cos\theta)\, Rd\theta$$

$$\delta_h = \int_0^{\pi} \frac{PR^3}{EI}(1 - \cos\theta)^2\, d\theta$$

$$\delta_h = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$\frac{PR^3}{EI}\left[\frac{3\theta}{2} - 2\operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{\delta_h = \frac{PR^3}{EI}\frac{3\pi}{2}}$$

Para el desplazamiento vertical: $\delta_v = \int_0^{\pi}\frac{PR}{EI}(1 - \cos\theta)(-R\cos\theta)Rd\theta$

$$\delta_v = \int_0^{\pi}\frac{PR^3}{EI}\left(\cos^2\theta - \cos\theta\right)d\theta$$

$$\delta_v = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

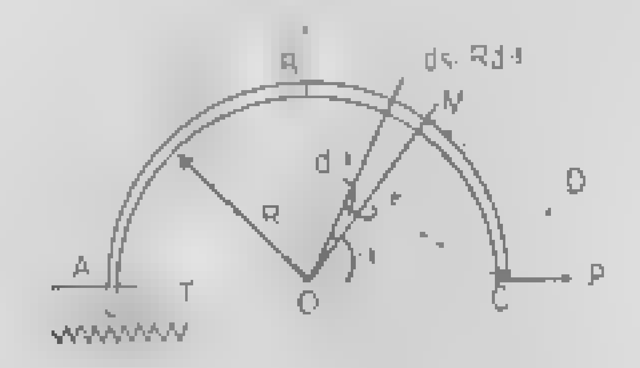
$$\delta_v = \frac{PR^3}{EI}\left[\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{\delta_v = \frac{PR^3}{EI}\frac{\pi}{2}}$$

1309 En el problema 1307, si la carga P está aplicada en C perpendicular al plano ABC, calcular el desplazamiento de C en la dirección de la carga.

Resolución.

La carga perpendicular en C al plano ABC genera tanto torsión como flexión.

Graficando



Hallando el momento flexionante

$$M = MD \cdot P = FC \cdot P \Rightarrow M = R\operatorname{sen}\theta \cdot P \quad ...(1)$$

Donde $\frac{\partial M}{\partial P} = R\operatorname{sen}\theta$ ...(2)

Hallando el momento torsionante

$$T = FM \quad P = R(1 - \cos\theta)P$$

Donde: $\dfrac{\partial T}{\partial P} = R(1 - \cos\theta)$

Por el teorema de Castigliano: $\delta = \dfrac{\partial U}{\partial P}$

Siendo: $\dfrac{\partial U}{\partial P} = \int \dfrac{M}{EI}\dfrac{\partial M}{\partial P}\, ds + \int \dfrac{T}{JG}\dfrac{\partial T}{\partial P}\, ds$

Llevando los valores

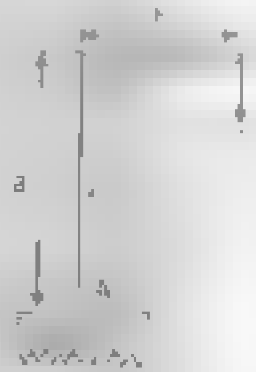
[illegible]

$$\int_0^{\pi} \frac{PR^3 \text{sen}^2\theta}{EI} \;[illegible]\; \int_0^{\pi} \frac{PR^3}{JG} \;[illegible]$$

$$[illegible] + \frac{PR^3}{JG}\left(\frac{3\theta}{2} - 2\text{sen}\theta + \frac{\text{sen}2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

[illegible]

1310 Se aplica una carga vertical P a la estructura en voladizo que representa la figura. Suponiendo EI constante, determinar los desplazamientos vertical y horizontal en los puntos B y C. Despreciar la deformación axial.



Resolución

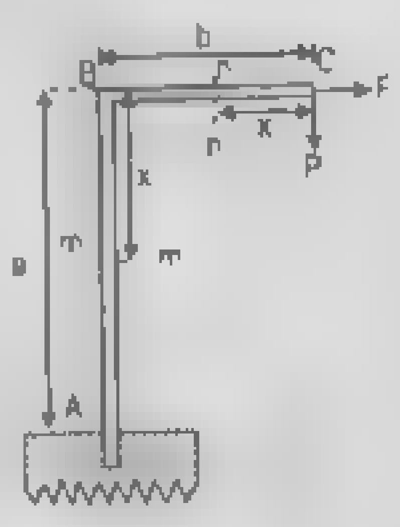
Para hallar el desplazamiento horizontal en el punto C, colocamos una ficticia F de valor nulo. Para el desplazamiento vertical ya está la car[illegible]
Por el teorema de Castigliano tenemos:

Desplazamiento vertical: $\delta_v = \dfrac{\partial U}{\partial P}$, $F = 0$

Desplazamiento horizontal: $\delta_h = \dfrac{\partial U}{\partial F}$, $F = 0$

Donde $U = \int \dfrac{M^2}{2EI} ds$

Realizando el diagrama para hallar los momentos flectores
(Ojo, solo hay flexión en la estructura)



Momentos flectores. (ojo: F = 0)

$M = Fx + Pb \; ; \quad x \in \langle 0, a\rangle$

Donde: $\dfrac{\partial M}{\partial F} = x \;\wedge\; \dfrac{\partial M}{\partial P} = b$

$M = Px \quad x \in \langle 0, b\rangle$

Donde: $\dfrac{\partial M}{\partial F} = 0 \quad \dfrac{\partial M}{\partial P} = x$

Hallando el desplazamiento horizontal en el punto C

$$\delta_h = \frac{\partial U}{\partial F} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F} ds \Rightarrow \delta_h = \int_0^a \frac{Pb}{EI} x\, dx + \int_0^b \frac{Px}{EI}(0)\, dx$$

$$\delta_h = \frac{Pb}{EI}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a \Rightarrow \frac{Pba^2}{2EI} = \delta_{C_h}$$

Para el desplazamiento vertical en C

$$\delta_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P} ds \Rightarrow \delta_v = \int_0^a \frac{Pb}{EI} b\, dx + \int_0^b \frac{Px}{EI} x\, dx$$

$$\delta_v = \frac{Pb^2}{EI} x \Big|_0^a + \frac{P}{EI}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^b \Rightarrow \delta_v = \frac{Pb^2 a}{EI} + \frac{P}{EI}\frac{b^3}{3} = \frac{Pb^2}{EI}\left(a + \frac{b}{3}\right)$$

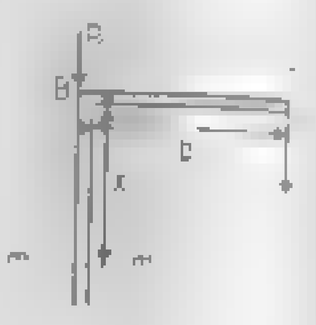
$$\boxed{\delta_v = \delta_{C_v} = \frac{Pb^2}{EI}\left(a + \frac{b}{3}\right)}$$

Para el desplazamiento horizontal en el punto B: si colocamos una [illegible] ficticia F_o de valor nulo en dirección horizontal en el punto B, produ[illegible] el mismo efecto flexionante que F, por lo tanto, el desplazamiento horiz[illegible] en B es igual al de C

F

C

Para el desplazamiento vertical en el punto B: si colocamos una carga ficticia P_o de valor nulo en dirección horizontal donde el momento flector en el corte es $M = b$, pero como $\frac{\partial M}{\partial P_o} = 0$ y $\delta_{B_v} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_o}$ [illegible]

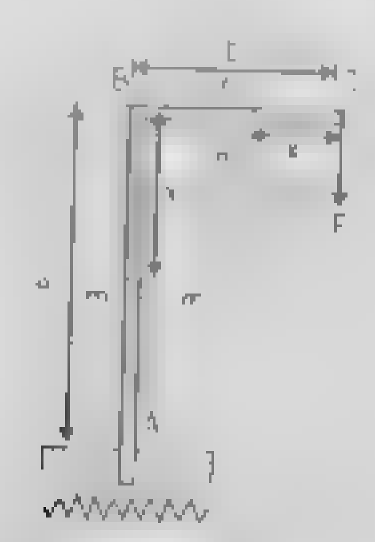


Así $\boxed{\delta_{B_v} = 0}$

1311 En el problema anterior, la carga P está aplicada perpendicularmente a [illegible] ABC. D[illegible] B y C [illegible] carga

Resolución

[illegible] P [illegible] ABC [illegible] y [illegible] a una variable "x" genérica. Graficando



Hay torsión en el tram[illegible] AB [illegible] P [illegible] b as [illegible] T = Pb [illegible] x ∈ [illegible]

Luego [illegible]

En este mismo tiempo, en el corte mm' hay flexión. El brazo flexionante es "x" así:

$$M = Px \quad ; \quad x \in \langle 0;a \rangle \quad y \quad \frac{\partial M}{\partial P} = x$$

Para el tramo BC, el momento flexionante es

$$M = Px \;\wedge\; \frac{\partial M}{\partial P} = x \;;\; x \in \langle 0;b \rangle$$

Por el teorema de Castigliano, la deformación viene dada por

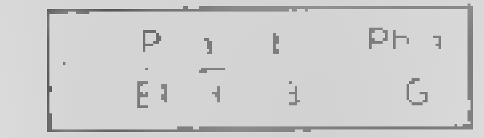
$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} \;;\quad \text{siendo } U = \int \frac{M^2}{2EI}ds + \int \frac{T^2}{2JG}ds$$

No[illegible] BC [illegible] despreciable, por lo tanto, no hay brazo torsionante, o mejor dicho, es de valor nulo

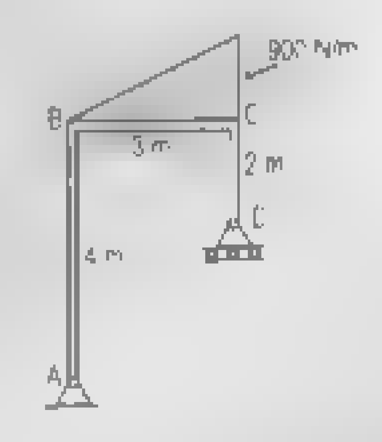
Como $$\frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}ds + \int \frac{T}{JG}\frac{\partial T}{\partial P}ds$$

P[illegible] [illegible] $\frac{(Px)}{[illegible]}xdx + \int^{b}\frac{(Px)}{[illegible]}xdx + \int^{a}\frac{(Pb}{[illegible]}$ [illegible]

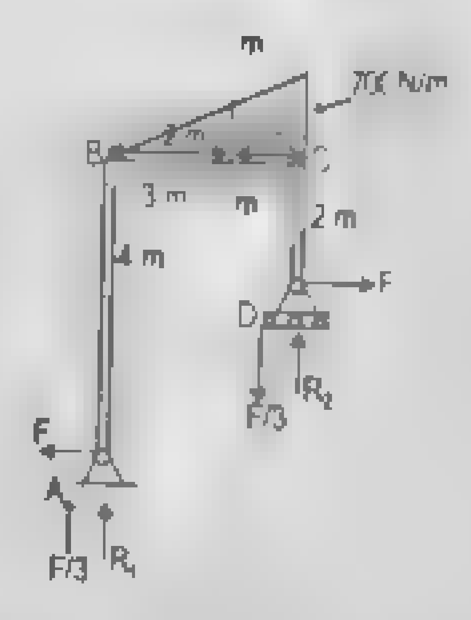
$$\delta_C = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|^{a} + \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|^{b} + \frac{Pb^2}{JG}(x)$$



1312 El pórtico de la figura está articulado en A y apoyado en D mediante rodillos. Soporta una carga distribuida triangularmente. Con EI constante, calcular EIδ en el apoyo D. Despreciar la deformación axial.



Resolucion.



Por estática hallamos R_1 y R_2 (además equilibramos la fuerza ficticia que hemos puesto para hallar el desplazamiento del sistema

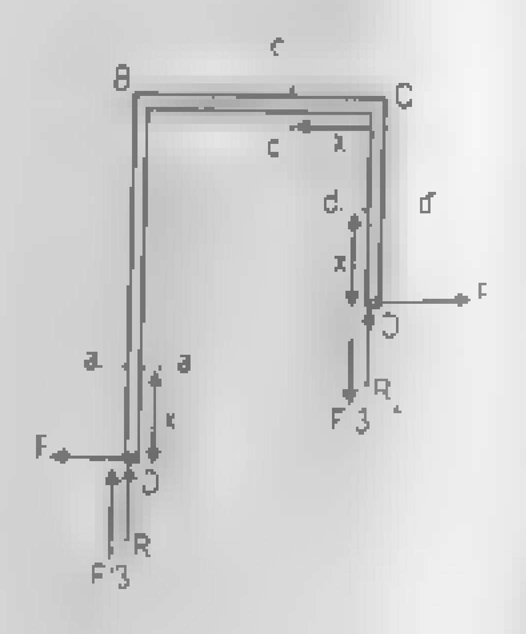
$\Sigma M_{m'm} = 0 = 2R_1 - R_2 = 0$

ΣF_y 0 $R_1 + R_2 - 450(3)$ N

Resolviendo

$R_1 = 450$ N $\wedge$ $R_2 = 900$ N

Hallando los momentos flexionantes respecto a una variable "x" genérica



Tramo AB. $x \in (0;4)$

M_{aa} Fx , como F = 0 M_{aa} 0

Tramo BC $x \in$ 0.3

$M_{cc'} = 2F + xR_2 - \frac{F}{3}x \quad 150\frac{x}{3}(9 - x)$

Donde $\frac{\partial M}{\partial F} = 2 - \frac{x}{3}$

Y: $M = R_2x - 150\frac{x}{3}(9 - x) \Rightarrow M = 450x + 50x^2$

Tramo CD x (0:2)

Fx, como F = 0 ⇒ M_d

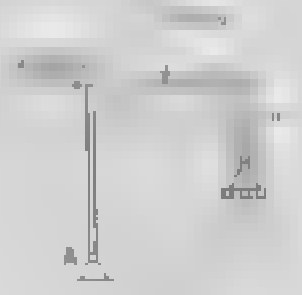
Solo existe flexión en el tramo BC aplicando el teorema de Castigliano

para F = 0 como $U = \frac{M}{2EI}$

$\int_0^3 \frac{(450x + 50x^2)}{EI}(2 - x/3)\,dx$

EIδ 3262,5 N.m

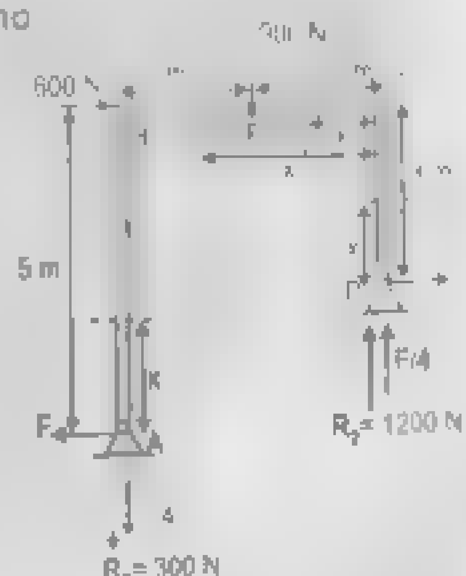
1313 Se aplican cargas horizontal y vertical a la estructura de la figura. Si EI es constante y se desprecia la deformación axial, determinar el valor de EIδ en el apoyo D



Resolución

Aplicando una fuerza ficticia de valor nulo en dirección del movimiento. (Por las leyes de la estática se hallan las demás reacciones)

Hallando los momentos flectores en cada tramo respecto a una variable "x" genérica



Tramo AB. $x \in$ (0:5

$M = Fx + 600x$; $\frac{\partial M}{\partial F}$ x

Tramo CF $x \in$ 0;2

$M = 3F + \frac{F}{4}x + 1200x$. $\frac{\partial M}{\partial F} = 3 + \frac{x}{4}$

Tramo CB $x \in$ 2;4

$$M = 3F + \frac{F}{4}x + 1200x - 900(x-2) \; ; \; \frac{\partial M}{\partial F} = 3 + \frac{x}{4}$$

Tramo DC, $x \in \langle 0;3 \rangle$, entonces: $M = Fx \; ; \; \frac{\partial M}{\partial F} = x$

Por el teorema de Castigliano el desplazamiento

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F} ds \; ; \text{ si } F = 0$$

Así:

[illegible]

Luego:

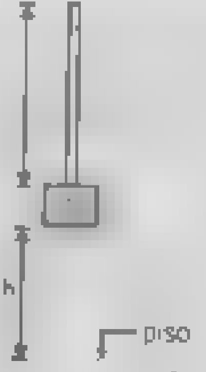
$$EI\delta = 600\int_0^6 x^2\,dx + 1200\int_0^2 x\left(3+\frac{x}{4}\right)dx + 300\int_2^4 (x+6)\left(3+\frac{x}{4}\right)dx$$

$$EI\delta = 53\,300 \text{ N.m}^3 \Rightarrow \boxed{EI\delta = 53{,}3 \text{ kN m}^3}$$

1314 Una masa de 50 kg [illegible] de 30 m de longitud cae desde [illegible] de 2 [illegible] y se supone que el módulo elástico es E = 100 GPa. Calcular el esfuerzo máximo en el alambre.

Resolución:

El alambre de acero al caer libremente con la masa atada a su extrem almacena energ[illegible] al chocar con el piso.



Donde la deformación final es: $\delta = \delta_{ST}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{ST}}}\right)$ ...(1)

Tenemos que δ_{ST}, es la deformación estática causada solo por el peso de la masa "m"

Así: $\delta_{ST} = \frac{mgL}{EA}$

Donde: m = 50 kg ; g = 9,81 m/s² ; L = 30 m ; A = 250 mm² ; E = 100 GPa

Luego: $\delta_{ST} = \frac{(50)(9{,}81)(30) \text{ N m}}{(10^{11})(250\times10^{-6}) \frac{N}{m^2}}$ [illegible] $58{,}86 \times 10^{-5}$ m

En [illegible] 2 [illegible] dinámica [illegible]

$$\delta = (58{,}86 \times 10^{-5}\text{ m})\left(1+\sqrt{1+\frac{2(2)}{58{,}86\times10^{-5}}}\right) \Rightarrow \delta = 0{,}0491 \text{ m}$$

La relación entre el esfuerzo máximo y la deformación máxima es

$$\sigma_{máx} = \frac{E}{L}\delta_{máx}, \text{ es decir } \sigma_{máx} = \frac{E}{L}\delta$$

Llevando los datos: $\sigma_{máx} = (100 \text{ GPa})\left(\frac{0{,}0491 \text{ m}}{30 \text{ m}}\right)$

$$\sigma_{máx} = 0{,}163714 \text{ GPa} \text{ ó } \boxed{\sigma_{máx} = 163{,}714 \text{ MPa}}$$

1315 Un ascensor [illegible] masa es 2 Mg, desciende a una velocidad de 2 m/s. El [illegible] se detiene bruscamente cuando se ha desenrollado 30 m de cable. Si la sección recta de este es de 50 mm² y E = 100 GN/m², calcule el esfuerzo máximo que aparece en el cable despreciando el peso del mismo.

Resolución:

En el frenado del ascensor toda la energía cinética de la masa del ascensor genera la deformación dinámica y por ende el máximo esfuerzo dinámico.

Así, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{AE}{2L}\delta^2$ ...(1)

Pero [illegible] $\frac{L}{E}$ [illegible] ...(2)

(2) en (1): $\sigma^2 = \dfrac{E}{AL}mv^2$

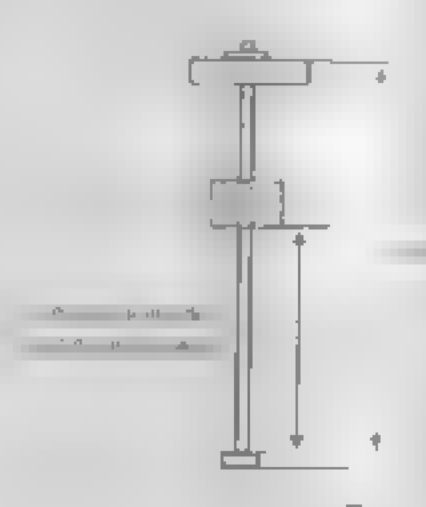
De los datos $m = 2\ Mg = 2000\ kg$, $v = 2\ m/s$
$L = 30\ m$, $A = 600\ mm^2$ [illegible]
$E = 100\ GN/m^2 = 10^{11}\ N/m^2$

Operando

$$\sigma^2 = \frac{(2000)(4)(10^{11})}{6\times10^{-4}(30)}\frac{N^2}{m^4} \rightarrow \sigma^2 = \frac{40}{9}\ 10^{16}\ \frac{N^2}{m^4}$$

$\sigma = 2{,}108 \times 10^8\ N/m^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{máx} = 210{,}8\ MN/m^2 = 210{,}8\ MPa}$

1316 Una masa de 6 kg cae desde una altura de 0,8 m golpeando la cabeza de un perno de acero, como se indica en la figura. Suponiendo que toda la energía es absorbida por el perno calcular el espesor e de su cabeza si el esfuerzo cortante, en la superficie cilíndrica de unión de la cabeza, no debe exceder de 80 MN/m², suponiendo que E = 200 GN/m²



Resolución.
Despreciando la energía acumulada en la varilla, solo tomaremos en cuenta la energía trasmitida por la masa "m" a la cabeza del perno de espesor "e".

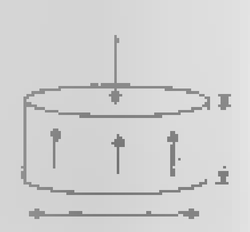
La energía potencial de la masa "m" se trasmite a la deformación dinámica δ

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{AE}{2L}\delta^2 \qquad ...(1)$$

Siendo A: área de la sección de la varilla

Así $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$ ... (2)

La fuerza P que golpea la cabeza se opone a la fuerza cortante "τ" que actua a lo largo de su superficie



Así $\tau = \dfrac{P}{A_1}$ ...(3)

A_1: área de la superficie del cilindro de diámetro "d" y altura "e"

Donde: $A_1 = \pi de$ ... (4)

De (3) y (4): $\pi de = \dfrac{P}{\tau}$

Como: $\delta = \dfrac{PL}{EA}$, luego: $\pi de = \dfrac{\delta EA}{L\tau}$

Entonces $\delta = \dfrac{\pi deL\tau}{EA}$ ... (5)

(5) y (2) en (1) $e^2 = \dfrac{mghE}{[illegible]}$ (obsérvese que "e" no depende de "d")

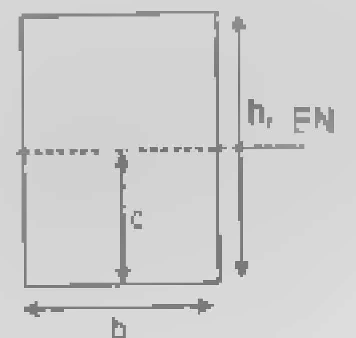
De los datos. $m = 6\ kg$ $\tau = 80\ MN/m^2 = 80 \times 10^6\ N/m^2$
$h = 0{,}8\ m$ $E = 200\ GN/m^2 = 2 \times 10^{11}\ N/m^2$
$g = 9{,}81\ m/s^2$

Reemplazando $e^2 = \dfrac{6(9{,}81)(0{,}8)(2 \times [illegible])}{2\pi(15)(80)\ [illegible]}$ (mm)

$\boxed{e = 12{,}49\ mm}$

1317 Una viga simplemente apoyada, de longitud L y sección rectangular, es golpeada en su centro por una masa m que cae desde una altura h. Demostrar que el valor del esfuerzo máximo en la viga, es $\sigma^2 = 18\ mghE/AL$

Resolución.
Como la sección de la viga es rectangular, tenemos.



Así $A = bh_1$ $\qquad c = \frac{h_1}{2}$ $\qquad I = \frac{bh_1^3}{12}$

Del problema de la página 438 tenemos

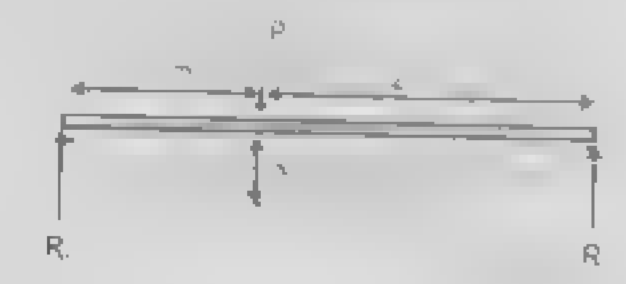
$$\sigma^2_{máx} = \frac{6(12)mghEh_1^2}{4L\,(bh_1^3)} \Rightarrow \sigma^2_{máx} = \frac{18mghE}{Lbh_1}$$

$$\boxed{\sigma^2_{máx} = \frac{18mghE}{AL}}$$

1318 [illegible] a de 3 m de [illegible] altura de 2.5 m en un punto a 1.0 m de uno de los apoyos. Supóngase que la sección de la viga es rectangular y mide 40 mm de ancho por 90 mm de altura y que $E = 200 \times 10^9\ N/m^2$. Despreciar el peso de la viga.

Resolución.

Primero hallamos la deformación estática δ_T producida por una carga de masa 900 kg colocada sobre la superficie de la viga



Por las ecuaciones de la estática: $R = \frac{2}{3}P$; $R = \frac{1}{3}P$

Téngase en cuenta que $P = mg$ ... (1)

Siendo M el momento flector, por el teorema de Castigliano tenemos

Donde: $\qquad M = \frac{2}{3}Px \wedge \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{2}{3}x \quad$ si $x \in (0;1)$

Y: $\qquad M = P\left(1 - \frac{x}{3}\right);\ \frac{\partial M}{\partial P} = \left(1 - \frac{x}{3}\right)$ si $x \in (1;3)$

Así $\quad \delta_T = \int_0^1 \frac{4}{9EI}Px^2dx + \int_1^3 \frac{P}{EI}(1 - x/3)^2\,dx$

$$\delta_T = \frac{4P}{9EI} \qquad (2)$$

Para la sección rectangular

Así $\quad I = \frac{bh_1^3}{12}$ $\qquad$ ...(3)

h_1

b

(3) en (2): ¡cuidado con las unidades!

$$\frac{4P(12)}{9Ebh_1^3} = \frac{16P}{3Ebh_1^3}$$

De los datos: $\quad m = 900$ kg $\qquad b = 40$ mm
$E = 200 \times 10^9\ N/m^2 \qquad h_1 = 90$ mm

Luego: $\quad \delta_T = \frac{16(900)(9.81)\ N.m^3}{3(200 \times 10^9)\frac{N}{m^2}(40)(90)^3\ mm^4}$

$$\frac{16(900)(9,81)(10^3)^3\ mm}{3(200 \times 10^9)(40)(90)^3} \Rightarrow \delta_T = 8,074\ mm$$

El coeficiente de impacto es [illegible]

donde $h = 2.5$ m = 2500 mm

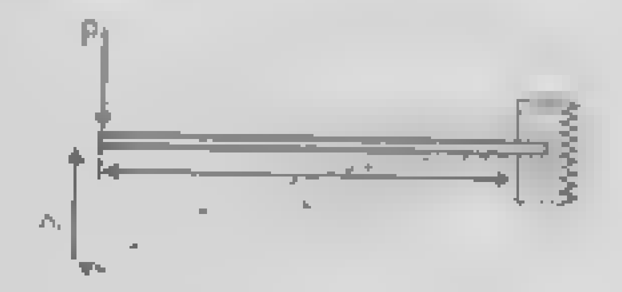
Reemplazando valores

$$\frac{\delta}{\delta_T}=1+\sqrt{1+\frac{2500}{8.074}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\delta}{\delta_T}=25{,}9}$$

1319. **Una viga de sección rectangular de 60 mm de ancho por 100 mm de altura se emplea como viga en voladizo de 2 m de [illegible] una masa de 40 kg [illegible] desde una altura de 0,2 m [illegible] su extremo libre. [illegible] máximo y la deflexión máxima en el punto de impacto, E = 200 GPa**

Resolución:

Primero hallamos la deflexión [illegible] una masa de [illegible] el extremo del voladizo



El momento flector genérico es

$$M = Px \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x \quad , \quad x \in \langle 0;\, L\rangle$$

Por el teorema de Castigliano

$$\delta_T = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{E}\frac{\partial M}{\partial P}ds \quad \Rightarrow \quad \delta_T = \frac{1}{EI}\int_0^L (Px)(x)dx = \frac{P}{EI}\int_0^L x^2dx$$

$$\delta_T = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \text{...(1)}$$

Para la sección rectangular

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(60)(100)^3}{12}\ mm^4 = 5\times10^6\ mm^4$$

Además $c = \frac{h_1}{2} = 50$ mm

Do los datos

m = 40 kg L = 2 m E = 200 × 10⁹ N/m²

$h_1 = 100$ mm

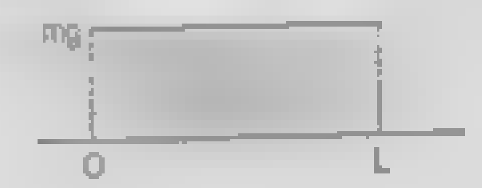
$$\delta_T = \frac{(40)(9{,}81)\ N(8)\ m^3}{[illegible]} \quad \Rightarrow \quad \delta_T = 1{,}0464\ mm$$

Para hallar la deflexión dinámica

$$\delta = \delta_T\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_T}}\right), \text{ donde } h = 0{,}2\ m = 200\ mm$$

$$\delta = (1{,}0464)\left(1+\sqrt{1+\frac{[illegible]}{[illegible]}}\right) [illegible]$$

[illegible]



Así $M = mgL$

El esfuerzo estático es

$$\sigma_T = \frac{Mc}{I} \quad \Rightarrow \quad \sigma_T = \frac{(mgL)(h_1/2)}{\frac{bh_1^3}{12}}$$

$$\sigma_T = \frac{(40)(9{,}81\ N)(2\ m)(50\ mm)}{[illegible]}$$

$$\sigma_T = \frac{40(9{,}81)(2)(50)}{[illegible]}\ N/m^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_T = 7848\times10^3\ N/m^2 = 7{,}848\ MPa$$

El esfuerzo dinámico se expresa por

$$\sigma = \sigma_T\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_T}}\right)$$

Luego, $\sigma = (7{,}848\ MPa)\left(1+\sqrt{1+\frac{2(200)}{1{,}0464}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = 161{,}489\ MPa}$

1320. Un furgón de ferrocarril de 12 Mg de masa se mueve a razón de 1,2 m/s cuando choca con un tope que tiene un juego de 8 resortes en paralelo. Cada uno de los resortes tiene 10 espiras de varilla de acero de 25 mm de diámetro, siendo el radio medio de la espira de 100 mm. Aplicando la fórmula de Wahl dada en la ecuación (3-10), determinar el esfuerzo máximo desarrollado en los resortes si G = 80 GPa

Resolucion.

La energia cinética del tren es "absorbida" por los 8 resortes recibiendo estos una contracción "δ"

Así $\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^{\delta} kxdx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^{\delta}$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k\delta\,\delta}{2} \qquad (1)$$

Como $k\delta = P_1$ la fuerza es aplicada para contraer los ocho resortes de (1) tenemos

$$mv^2 = P_1\delta \qquad (2)$$

Del diagrama del cuerpo libre de un resorte

Por la fórmula de Wahl tenemos esfuerzo máximo

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m_0-1}{4m_0-4} + \frac{0.615}{m}\right)$$

Donde $m = \frac{D}{d} = \frac{2R}{d}$

De los datos. n = 10 (numero de espiras)
d = 25 mm
R = 100 mm
G = 80 GPa = 80 × 10⁹ N/m²
P = P₁/8
m = 12 mg = 12 000 kg
v = 1,2 m/s

La deformación del resorte es: $\delta = \frac{P_1 R^2(2\pi R n)}{JG}$

Donde: $J = \frac{\pi d^4}{32}$

Asi $\delta = \frac{64P_1R^3n}{Gd^4}$. (3)

En (2). $mv^2 = P_1\frac{(64P_1R^3n)}{Gd^4} \Rightarrow P_1^2 = \frac{mv^2Gd^4}{64R^3n}$

$$P_1^2 = \frac{(12\,000\ \text{kg})(1,2)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2(80\times109)\ \text{N/m}^2\ (0,025)^4\ \text{m}^4}{(\ )\ \ (\ )}$$

$$P_1^2 = \frac{(12\,000)(1,2)^2(80\ 10^9)(0.025)^4\ \text{N}^2}{64(0,1)^3(10)} \Rightarrow P_1 = 29\,047,375\ \text{N}$$

En la fórmula de Wahl

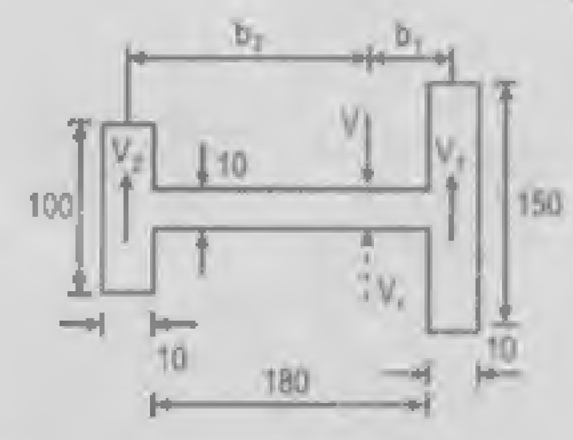
$$\tau_{máx} = \frac{16(29\,047,375/8)(0.1)}{\pi(0.025)^3}\left(\frac{4(8)-1}{4(8)-4} + \frac{0,615}{8}\right)\text{Pa}$$

$$\tau_{máx} = 140\,128\,102,4\ \text{Pa} \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 140,128\ \text{Pa}}$$

1321. Problema ilustrativo

1322. Determinar la posición del centro de torsión en la sección indicada en la figura, si $t_1 = t_2 = t_3 = 10$ mm, $h_1 = 150$ mm, $h_2 = 100$ mm y $h_3 = 180$ mm.

Resolución:



Cálculo del centro torsión:

En el centro de torsión se contraponen V y V_1, luego en la figura:

$b_1 + b_2 = 190$; por Geometría

Por equilibrio: $V_1b_1 = V_2b_2$; momentos en centro torsión. Por igual radio de curvatura del derecho e izquierdo: $\frac{P}{E} = \frac{I_1}{M_1} = \frac{I_2}{M_2}$; pero V_1 y V_2 son D.P. a M_1 y M_2. De donde: $\frac{I_1}{V_1} = \frac{I_2}{V_2}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{I_2}{I_1}$

Con datos: $\frac{b_1}{b_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{10\times100^3}{12}}{\frac{10\times150^3}{12}} = \frac{8}{27}$, con lo cual: $\begin{cases} b_1 + b_2 = 190 \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{8}{27} \end{cases}$

Resolviendo tenemos: $b_1 = 43\frac{3}{7}$ mm y $b_2 = 146\frac{4}{7}$ mm

1323. Determinar la posición del centro de torsión en la sección de la figura, que consiste en un cilindro de pared delgada, partido a lo largo de una generatriz. El espesor de la pared es e y el radio medio r.

Resolución:

Ubicación del centro de torsión

Cálculo de q, flujo de cortante cuando el ángulo es ϕ:

$$q = \frac{V}{I}Q \;;\; \text{donde } Q = \int_0^{\phi}(r\,\text{sen}\phi)\,tr\,d\phi$$

Luego $q = \frac{Vt}{I}r^2\left[-\cos\phi\right]_0^{\phi}$, resolviendo: $q = \frac{Vtr^2}{I}(1-\cos\phi)$

Momentos de fuerzas respecto del centro: $Ve = 2\int_0^{\pi} r\,dF = 2\int_0^{\pi}(q\,ds)r$

Reemplazando el valor de q en la integral: $Ve = 2\int_0^{\pi}\frac{Vtr^3}{I}(1-\cos\phi)\,r\,d\phi$

Consideramos $r = r_m$; un valor medio: $e = \frac{2tr_m^4}{I}\int_0^{\pi}(1-\cos\phi)\,d\phi$

Calculamos I:

Por tablas: $I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ donde: $R = r_m + \frac{t}{2}$; $r = r_m - \frac{t}{2}$

Luego: $e = \frac{2tr_m^4}{\frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)}\int_0^{\pi}(1-\cos\phi)\,d\phi = \frac{2tr_m^4\pi}{\frac{\pi}{4}(R^2 + r^2)(R + r)(R - r)}$; pero: $R - r = t$,

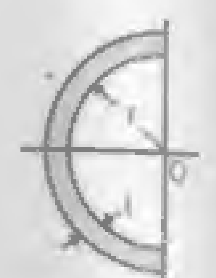
También: $R + r = 2r_m$; $R^2 + r^2 = 2\left(r_m^2 + \frac{t^2}{4}\right)$

Despreciamos $\frac{t^2}{4} << r_m^2$; con esto: $e = \frac{2tr_m^4}{\frac{\pi}{4}(2r_m^2)(2r_m)t} = 2r_m$

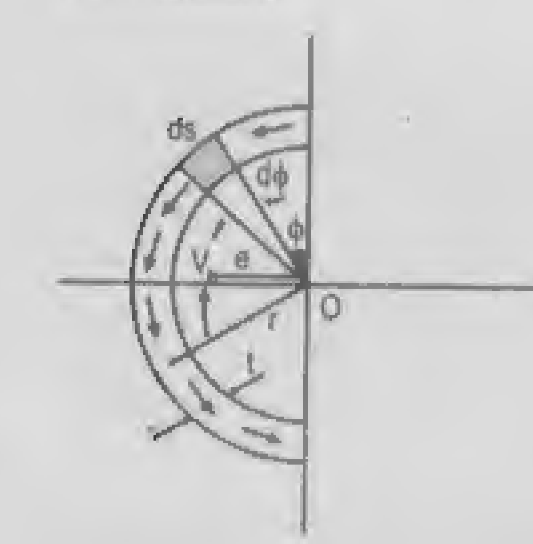
$\Rightarrow e = 2r_m$, donde r_m es radio medio

∴ e: ubicado a $2r_m$ del centro del cilindro a la izquierda

1324. Demostrar que la posición del centro de torsión en el anillo semicircular delgado de la figura, viene dada por $e = 4r/\pi$ a la izquierda de O.



Resolución:



Demostración: el centro de torsión está a $e = \frac{4r}{\pi}$ a la izquierda del centro

$$q = \frac{V}{I}Q = \frac{V}{I}\int_0^{\phi} r\cos\phi(trd\phi)$$

$$q = \frac{Vtr^2}{I}\text{sen}\phi$$

Equilibrio de momentos respecto del centro:

$$Ve = 2\int_0^{\pi/2}(qds)r \text{; tomamos la mitad y duplicamos}$$

$$Ve = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Vtr^2\text{sen}\phi}{I}\, r\, rd\phi$$

$$e = \frac{2tr_m^4}{I} \text{; consideramos } r = r_m \text{: radio medio}$$

Como: $I = \frac{\pi}{8}(R^4 - r^4)$ para un círculo hueco $\Rightarrow I = \frac{\pi}{8}(R^2 + r^2)(R + r)(R - r)$

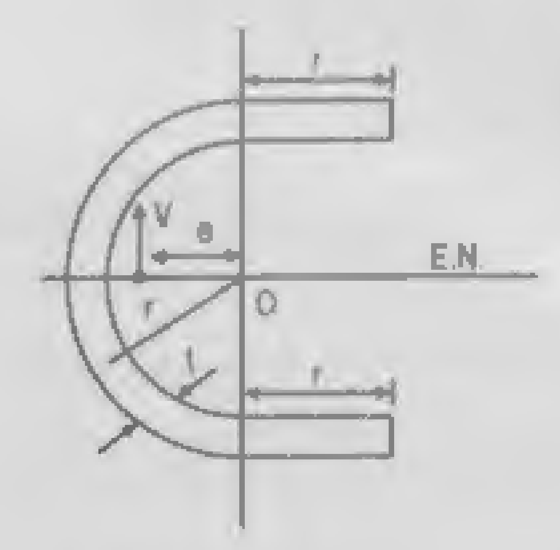
Donde: $R + r = 2r_m$; $R - r = t$; $R^2 + r^2 = 2r_m^2$

Reemplazando valores tenemos:

$$e = \frac{2t\,r_m^4}{\frac{\pi}{8}(2r_m^2)(2r_m)t} \text{, simplificando: } \boxed{e = \frac{4r_m}{\pi}} \text{; donde } r_m \text{: radio medio.}$$

1325. La sección de pared delgada representada en la figura consiste en un anillo semicircular de radio medio r, prolongado por dos partes rectas de longitud r. Comprobar que el centro de torsión está a una distancia $e = (tr^4/I)\ (\pi + 3)$ a la izquierda de O, y que para $r = 50$ mm y $t = 2{,}5$ mm, se obtiene $e = 86{,}0$ mm. ¿Es necesario conocer el valor del espesor t?

Resolución:



Calculamos I respecto al eje neutro:

$$I = 2r_m t r_m^2 + \frac{\pi}{8}(R^4 - r^4) = 2r_m^3 t + \frac{\pi}{8}(2r_m^2)t(2r_m)$$

$$\Rightarrow I = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r_m^3 t \text{; donde } r_m \text{: radio medio}$$

Cálculo de cargas en el semicírculo y las horizontales:

$$q_B = q_A = \frac{V}{I}r_m t r_m \Rightarrow q_B = q_A = \frac{Vr_m^2 t}{I}$$

Luego: $H = \frac{1}{2} q_B r_m \Rightarrow H = \frac{V r_m^3 t}{2I}$

Luego: $dF = q\,ds$; $dM = q r_m\, ds$.

Equilibrando momentos respecto del centro:

$$Ve = \frac{V r_m^3 t}{2I} \times r_m \times 2 + 2\int_0^{\pi/2} r_m^3 d\phi \left(\frac{V r_m^2 t}{I} + \frac{V t r_m^2 \operatorname{sen}\phi}{I}\right)$$

Operando:

$$Ve = \frac{V r_m^4 t}{I} + 2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{V r_m^2 t}{I} + \frac{V t r_m^2 \operatorname{sen}\phi}{I}\right) r_m^2 d\phi$$

$$Ve = \frac{V r_m^4 t}{I} + \frac{2 r_m^4 V t}{I}\frac{\pi}{2} + \frac{2 V t r_m^4}{I}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow e = \frac{r_m^4 t}{I} + \frac{r_m^4 t \pi}{I} + \frac{2 t r_m^4}{I}$$

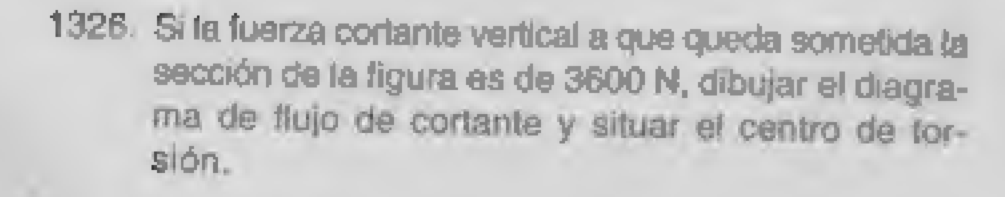
∴ $\boxed{e = \frac{r_m^4 t(\pi + 3)}{I}}$ Donde: $I = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) r_m^3 t$

Reemplazando y simplificando:

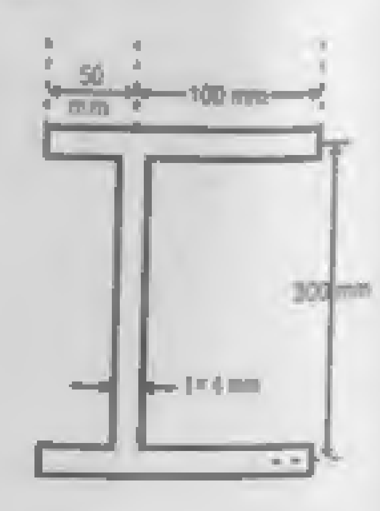
$$e = \frac{r_m^4 t}{I}(3+\pi) = \frac{2 r_m (3+\pi)}{(4+\pi)};\ \text{si } r_m = 50 \text{ mm};\ t = 2{,}5 \text{ mm}$$

$$e = \frac{2\times 50(3+\pi)}{(4+\pi)} = 85{,}9975 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{e = 86{,}0 \text{ mm}}$$

∴ No es necesario conocer t = 2,5 mm para hallar "e".



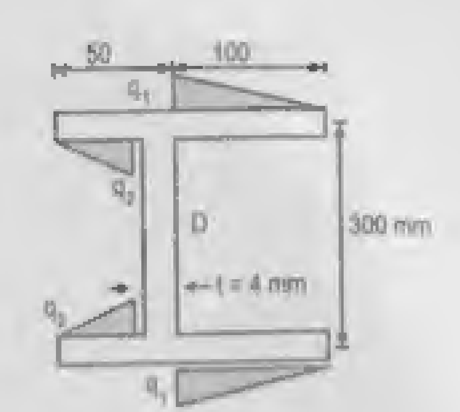
1326. Si la fuerza cortante vertical a que queda sometida la sección de la figura es de 3600 N, dibujar el diagrama de flujo de cortante y situar el centro de torsión.



Resolución:

En el patín más largo: $q_{(z)} = \left(\frac{Vht}{2I}\right) z$

para $z = 100$ mm; $t = 4$ mm; y $h = 300$ mm



$$q_1 = \frac{3600 \text{ N} \times 300 \text{ mm} \times 4 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}}{2\times 36\times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$q_1 = 6\frac{\text{N}}{\text{mm}} <> 6\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

En el patín más corto:

$$q_2 = \frac{3600\times 300\times 2\times 50\times 2}{2\times 36\times 10^6}$$

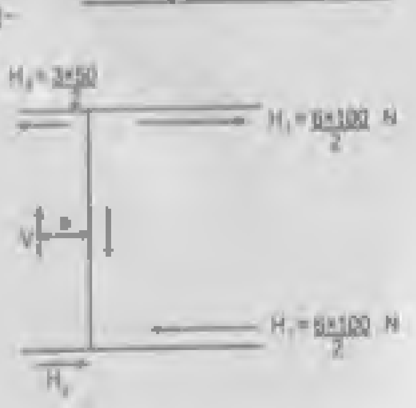
$$q_2 = 3\frac{\text{N}}{\text{mm}} <> 3\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$\Rightarrow q_B = q_1 + q_2 = 3 + 6 = 9\frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Flujo que ingresa al alma:

$$q_D = 9\frac{\text{N}}{\text{mm}} + \frac{3600 \text{ N}\times 150 \text{ mm}\times 4 \text{ mm}\times 150 \text{ mm}}{36\times 10^6 \text{mm}^4 \times 2}$$

Luego: $q_D = 9\frac{\text{N}}{\text{mm}} + 4{,}5\frac{\text{N}}{\text{mm}} = 13{,}5\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; que es el valor máximo de q_D en el alma.



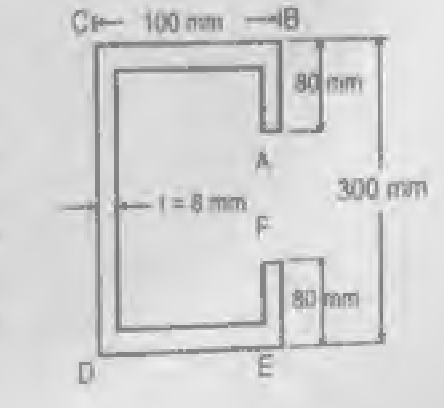
Equilibrando momentos respecto al alma de la viga de modo que la carga en el alma se anule:

Ve = 300 N x 300 mm - 75 N x 300 mm

(3600 N)(e) = 225 x 300 N·mm

$\boxed{e = 18{,}75 \text{ mm, izquierda del alma}}$

1327 Si la fuerza cortante vertical en la sección representada en la figura es de 3000 N, trazar el diagrama de flujo de cortante y situar el centro de torsión. Nota: aunque el flujo de cortante en AB y FE varía realmente en forma parabólica, puede suponerse sin error apreciable que varía linealmente.

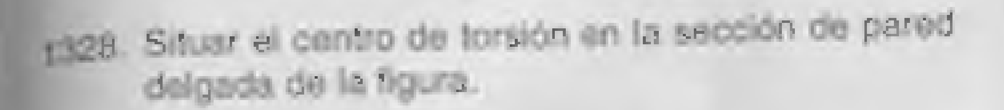


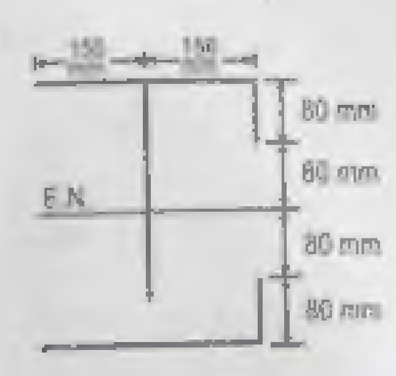
Resolución:
Cálculo de I del eje neutro:

$$I_{E.N.} = \frac{8 \times 300^3}{12} + 2 \times 8 \times 100 \times 150^2 + \left(\frac{8 \times 80^3}{12} + 80 \times 8 \times 110^2\right) \times 2$$

De donde: $I_{E.N.} = 70\ 170\ 666\frac{2}{3}\ mm^4$

Cálculo de $q_{..} = q_{..}$: $q = \frac{V}{I}\left(8z\left(70 + \frac{z}{\ }\right)\right)$


1328. Situar el centro de torsión en la sección de pared delgada de la figura.



Resolución:
Cálculo de los flujos de cortantes:

Sabemos: $q = \frac{V}{I}Q$;

luego: $q_B = q_H = 9600\frac{V_1}{I}$